

РАБОТА ПО АЛГЕБРЕ

ПОВТОРЕНИЕ

ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБЛАСТЬ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ

- ❖ **Функция определена на всей числовой прямой;**
- ❖ **Множество значений функции – отрезок $[-1; 1]$**

ПОВТОРЕНИЕ

ПЕРИОДИЧНОСТЬ

□ $\cos(x + 2\pi) = \cos x,$

**Функция $y = \cos x$ -
периодическая с периодом
 2π (строим график на
промежутке длиной 2π ,
например $[-\pi; \pi]$)**

ПОВТОРЕНИЕ

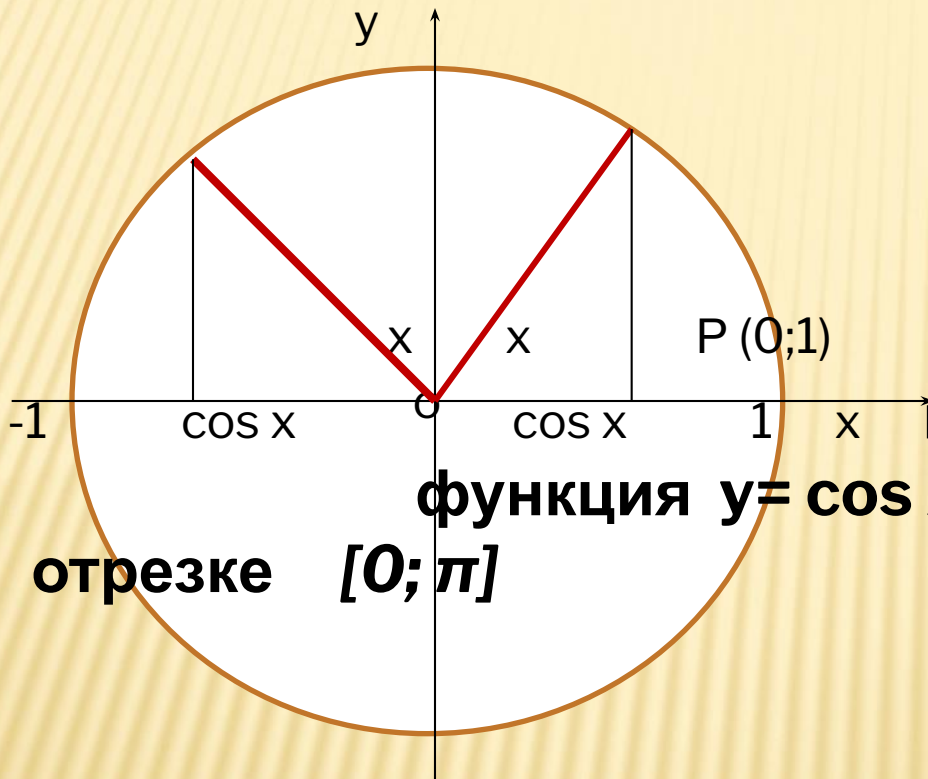
ЧЁТНОСТЬ И НЕЧЁТНОСТЬ:

$$\square \cos(-x) = \cos x,$$

Функция $y = \cos x$ является чётной (график симметричен относительно оси OY , строим график на промежутке $[0; \pi]$)

ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

□



□

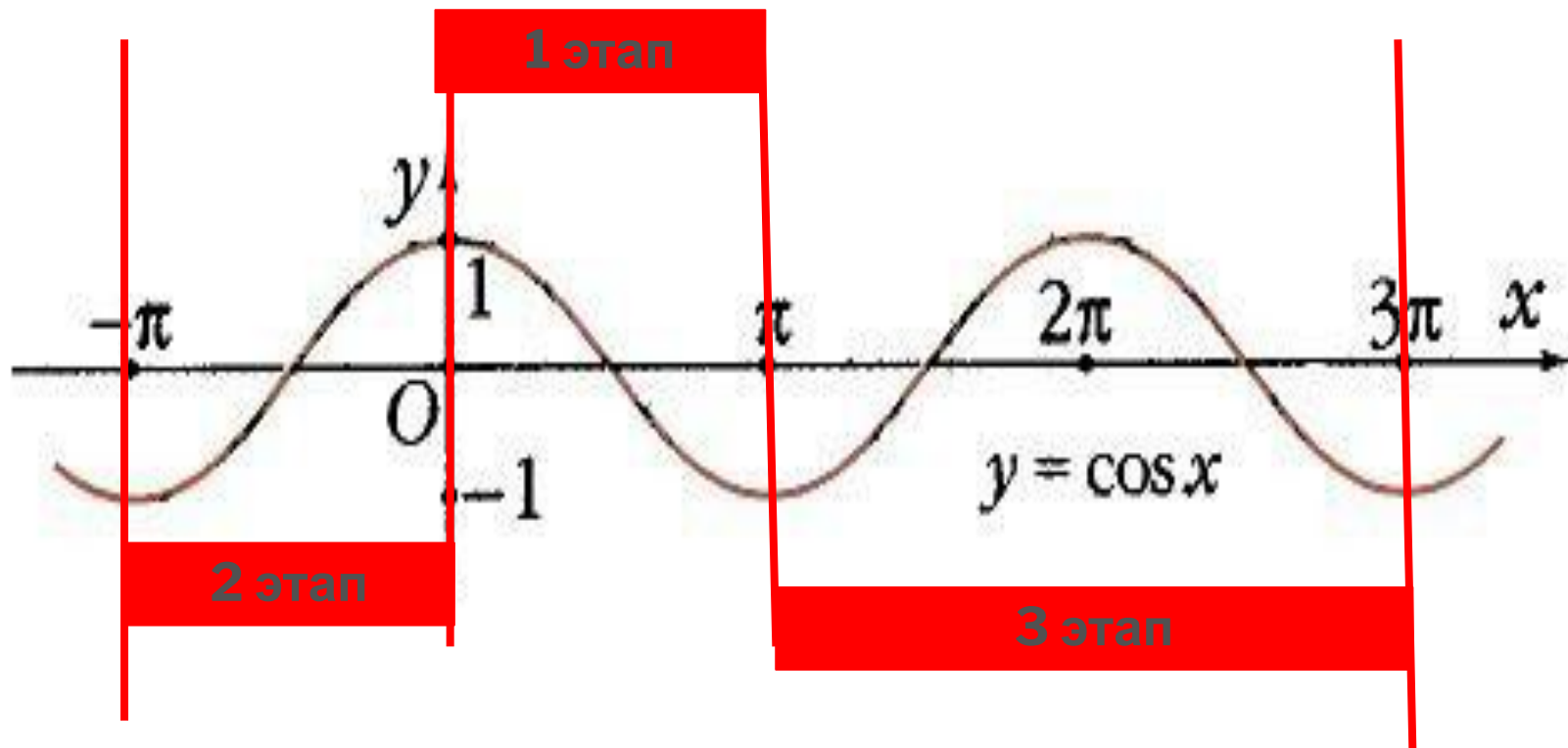
□

на рис. видно, что

функция $y = \cos x$ убывает на

отрезке $[0; \pi]$

ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

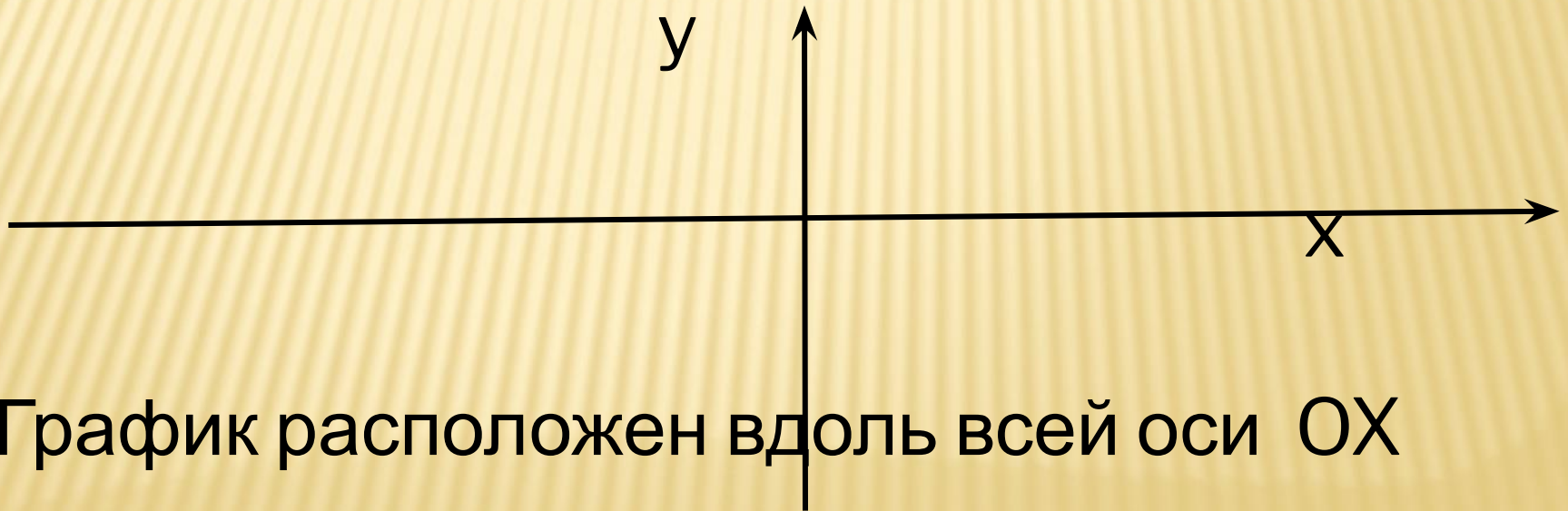


ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИИ

$Y = \cos X$

1. Область определения

– множество \mathbb{R} всех действительных чисел



ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИИ

$Y = \cos X$

▣ 2. Множество значений функции

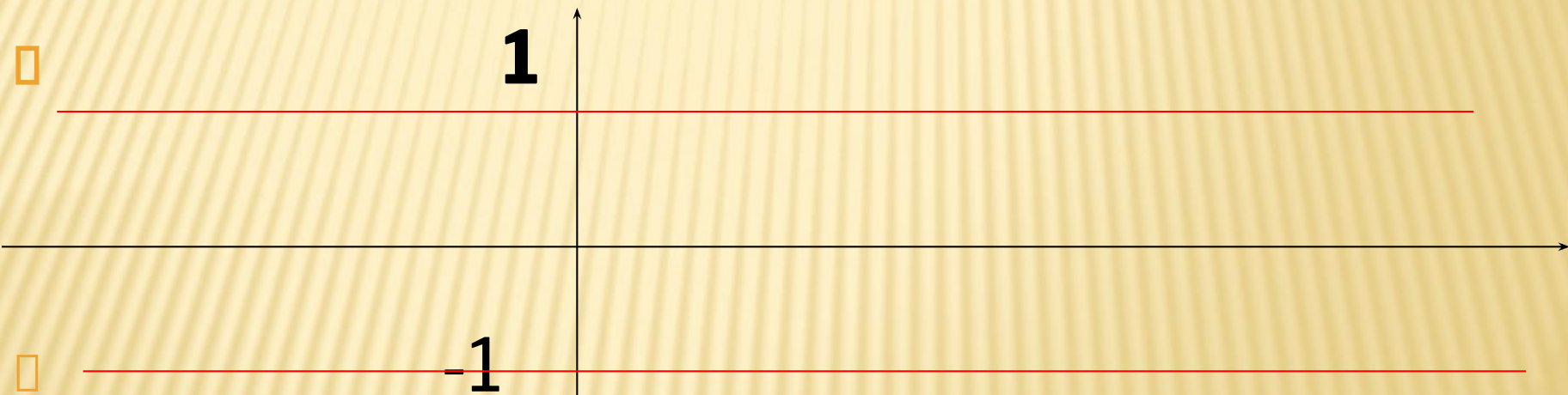


График ограничен линиями $Y = -1$ и $Y = 1$

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИИ

$Y = \cos X$

□ 3. Функция $y = \cos x$
периодическая с периодом
 2π

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИИ

$Y = \cos X$

- 4. Функция $y = \cos x$ – четная

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИИ

$Y = \cos X$

- 5. $Y=0$ при $x = \pi/2 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$
- Наибольшее значение $y=1$, если $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$
- Наименьшее значение $y=-1$, если $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$
- $Y > 0$ на интервале $(-\pi/2; \pi/2)$ и на интервалах со сдвигом на 2π
- $Y < 0$ на интервале $(\pi/2; 3\pi/2)$ и на интервалах со сдвигом на 2π

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИИ $Y = \cos X$

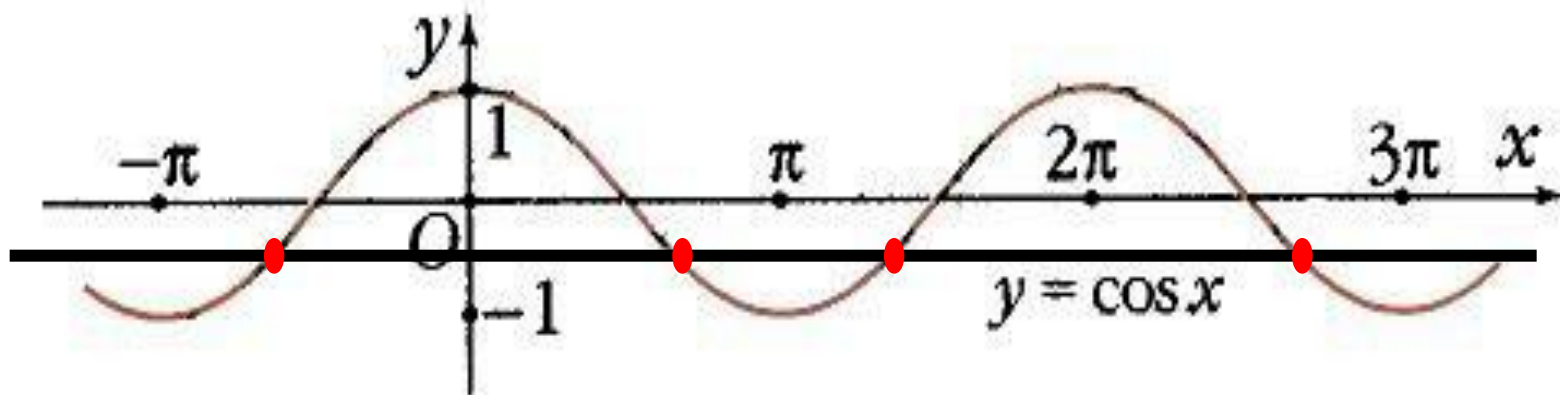
- ▣ 6. возрастает на $(\pi; 2\pi)$ и на интервалах, получаемых сдвигами этого отрезка на 2π

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИИ $Y = \cos X$

▣ 7. убывает на $(0; \pi)$ и на интервалах , получаемых сдвигами этого отрезка на 2π

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

- Пример 1:
- найти все корни уравнения $\cos x = -1/2$, принадлежащие отрезку $[-\pi; 2\pi]$
- Решение: построим графики функций $y = \cos x$ и $y = -1/2$

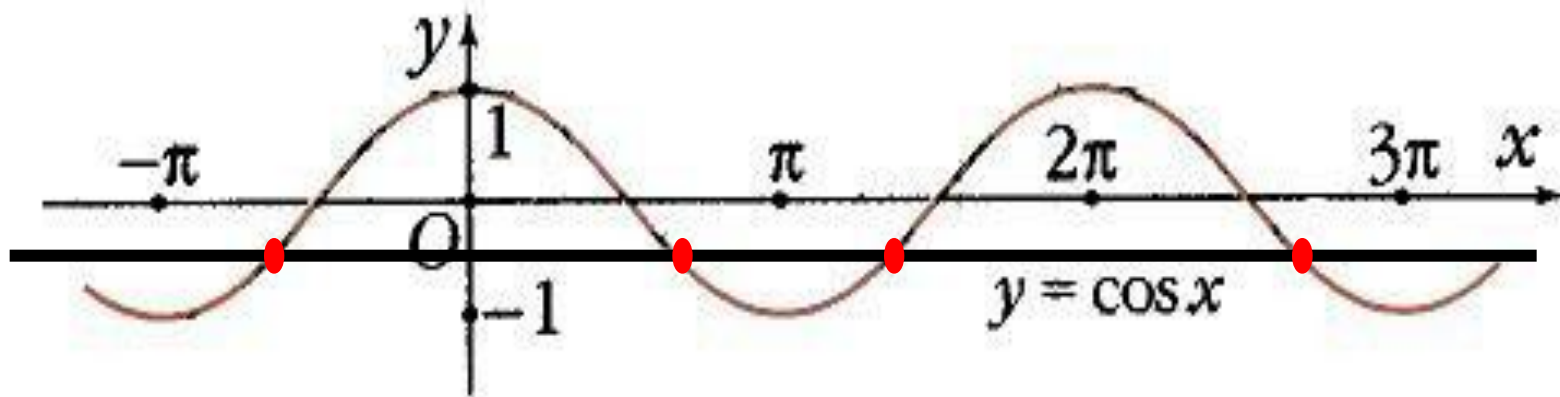


ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

- *Графики заданных функций пересекаются в точках, отмеченных на графике:*
- *Абсциссы этих точек являются решениями данного уравнения*
- *На отрезке **[0; π]** корнем уравнения $\cos x = -1/2$ является число $\arccos(-1/2) = 2\pi/3$.*
- *Следующим решением является число, симметричное относительно оси ОУ: $x = -2\pi/3$.*
- *Третий корень уравнения равен: $-2\pi/3 + 2\pi = 4\pi/3$*
- **Ответ: $2\pi/3; -2\pi/3; 4\pi/3$**

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

- Пример 2:
- найти все корни уравнения $\cos x = -1/2$, принадлежащие отрезку $[-\pi; 2\pi]$
- Решение: построим графики функций $y = \cos x$ и $y = -1/2$

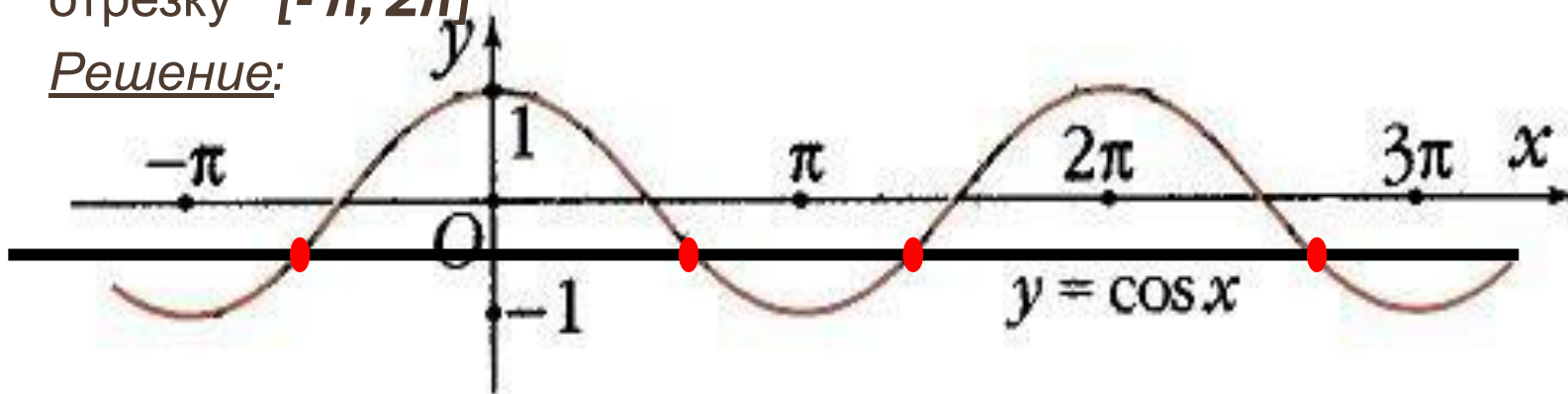


ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

□ Пример 2:

□ Найти все решения неравенства $\cos x > -1/2$, принадлежащие отрезку $[-\pi; 2\pi]$

□ Решение:



□ Из рисунка видно, что график функции $y = \cos x$ лежит выше графика функции $y = -1/2$ на промежутках $(-2\pi/3; 2\pi/3)$ и $(4\pi/3; 2\pi)$

□ **Ответ:** $-2\pi/3 < x < 2\pi/3; 4\pi/3 < x < 2\pi$

УПРАЖНЕНИЯ (УСТНО)

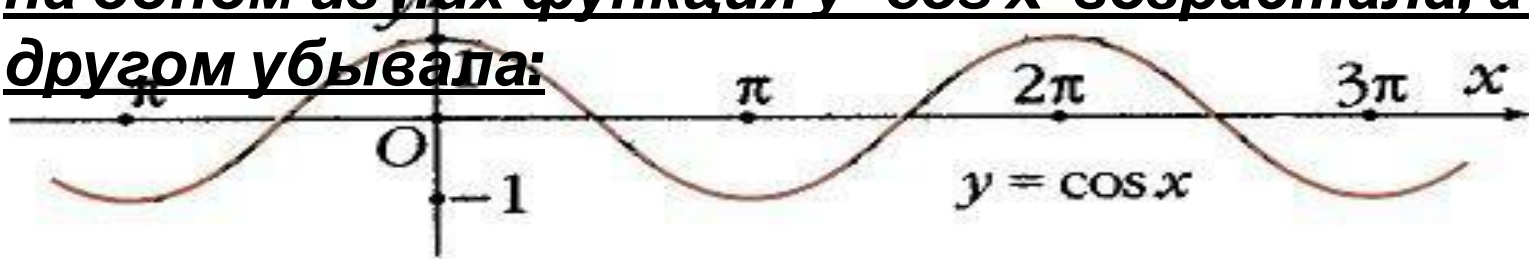
- **№ 708** Выяснить, при каких значениях x , принадлежащих отрезку $[0; 3\pi]$, функция $y = \cos x$ принимает :
 - 1) значение , равное 0
 - Ответ : $\pi/2; 3\pi/2; 5\pi/2$
 - 2) значение, равное 1
 - Ответ : $0; 2\pi$
 - 3) значение , равное -1
 - Ответ : $\pi; 2\pi$
 - 4) положительные значения
 - Ответ: $(0; \pi/2); (3\pi/2; 5\pi/2)$
 - 5) отрицательные значения
 - Ответ : $(\pi/2; 3\pi/2) ; (5\pi/2; 3\pi)$

УПРАЖНЕНИЯ (УСТНО)

- **№ 709** *Выяснить, возрастает или убывает функция $y = \cos x$ на отрезке:*
- 1) $[3\pi; 4\pi]$
- Ответ: возрастает
- 2) $[-2\pi; -\pi]$
- Ответ: убывает
- 3) $[2\pi; 5\pi/2]$
- Ответ: убывает
- 4) $[-\pi/2; 0]$
- Ответ: возрастает
- 5) $[1; 3]$
- Ответ: убывает
- 6) $[-2; -1]$
- Ответ: возрастает

УПРАЖНЕНИЯ

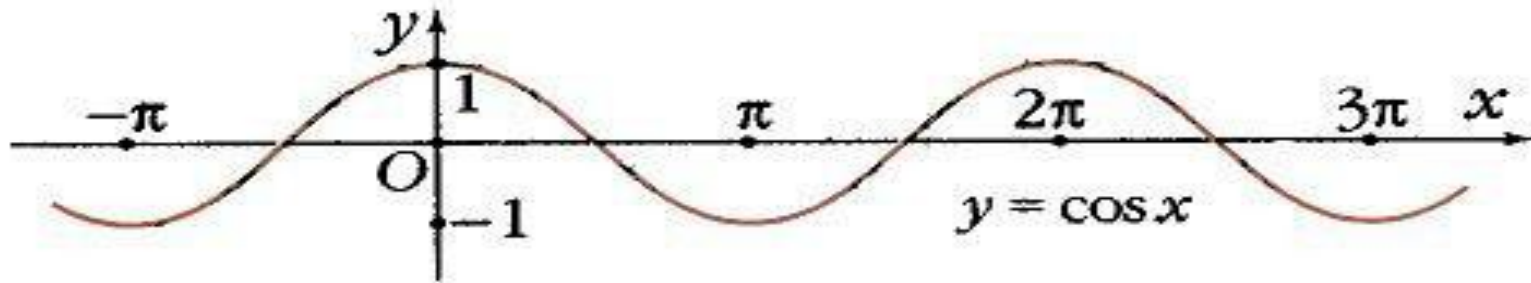
- **№ 710 Разбить данный отрезок на два так, чтобы на одном из них функция $y = \cos x$ возрастала, а на другом убывала:**



- 1)) $[\pi/2; 3\pi/2]$
- Ответ :) $[\pi/2; \pi]$ и $[\pi; 3\pi/2]$
- 2)) $[-\pi/2; \pi/2]$
- Ответ:) $[-\pi/2; 0]$ и $[0; \pi/2]$

УПРАЖНЕНИЯ

- ▣ **№ 710 Разбить данный отрезок на два так, чтобы на одном из них функция $y = \cos x$ возрастала, а на другом убывала:**



- ▣ 3) $[0; 3\pi/2]$
- ▣ Ответ:) $[0; \pi]$ и $[\pi; 3\pi/2]$
- ▣ 4)) $[-\pi; \pi/2]$
- ▣ Ответ :) $[-\pi; 0]$) $[0; \pi/2]$

УПРАЖНЕНИЯ

□ **№ 711** Используя свойство возрастания или убывания функции $y = \cos x$, сравнить числа:

□ 1) $\cos \pi/7$ и $\cos 8\pi/9$

□ Ответ: на интервале $(0; \pi)$ функция убывает, значит т.к.

$$\pi/7 < 8\pi/9, \text{ то } \cos \pi/7 > \cos 8\pi/9$$

□ 2) $\cos 8\pi/7$ и $\cos 10\pi/7$

□ Ответ: на интервале $(\pi; 2\pi)$ функция возрастает, значит т.к.

$$8\pi/7 < 10\pi/7, \text{ то } \cos 8\pi/7 < \cos 10\pi/7$$

□ 3) $\cos (-6\pi/7)$ и $\cos (-\pi/8)$

□ Ответ: на интервале $(-\pi; 0)$ функция возрастает, значит т.к.

$$-6\pi/7 < -\pi/8, \text{ то } \cos (-6\pi/7) < \cos (-\pi/8)$$

УПРАЖНЕНИЯ

- ▣ **№ 711** Используя свойство возрастания или убывания функции $y = \cos x$, сравнить числа:
- ▣ 4) $\cos(-8\pi/7)$ и $\cos(-9\pi/7)$
- ▣ Ответ: на интервале $(-3\pi/2; -\pi)$ функция убывает, значит т.к.
 $-8\pi/7 > -9\pi/7$, то $\cos(-8\pi/7) < \cos(-9\pi/7)$
- ▣ 5) $\cos 1$ и $\cos 3$
- ▣ Ответ: на интервале $(0; \pi)$ функция убывает, значит т.к.
 $1 < 3$, то $\cos 1 > \cos 3$
- ▣ 6) $\cos 4$ и $\cos 5$
- ▣ Ответ: на интервале $(\pi; 2\pi)$ функция возрастает, значит т.к.
 $4 < 5$, то $\cos 4 < \cos 5$

УПРАЖНЕНИЯ

- №712 Найти все корни уравнения, принадлежащие отрезку $[0; 3\pi]$:
- 1) $\cos x = 1/2$
- Решение: На отрезке $[0; \pi]$ корнем уравнения $\cos x = 1/2$ является число $x = \arccos(1/2) = \pi/3$, на промежутке $[\pi; 2\pi]$ - , $x = \pi/3 + 3\pi/2 = 11\pi/6$, на промежутке $[2\pi; 3\pi]$ - , $x = \pi/3 + 2\pi = 7\pi/3$
- Ответ: $x = \pi/3$; $x = 11\pi/6$; $x = 7\pi/3$

УПРАЖНЕНИЯ

- №712 Найти все корни уравнения, принадлежащие отрезку $[0; 3\pi]$:
- 2) $\cos x = \sqrt{2} / 2$
- Решение: На отрезке $[0; \pi]$ корнем уравнения $\cos x = \sqrt{2} / 2$ является число $x = \arccos(\sqrt{2} / 2) = \pi/4$. На отрезке $[\pi; 2\pi;]$ корнем уравнения $\cos x = \sqrt{2} / 2$ является число $x = 7\pi/4$. На отрезке $[2\pi; 3\pi;]$ корнем уравнения $\cos x = \sqrt{2} / 2$ является число $x = \pi/4 + 2\pi = 9\pi/4$
- Ответ: $x = \pi/4$; $x = 7\pi/4$; $x = 9\pi/4$

УПРАЖНЕНИЯ

- №712 Найти все корни уравнения, принадлежащие отрезку $[0; 3\pi]$:
- 3) $\cos x = \sqrt{2}/2$
- Решение: На отрезке $[0; \pi]$ корнем уравнения $\cos x = \sqrt{2}/2$ является число $x = \arccos(\sqrt{2}/2) = \pi/4$. На отрезке $[\pi; 2\pi]$ корнем уравнения $\cos x = \sqrt{2}/2$ является число $x = 5\pi/4$. На отрезке $[2\pi; 3\pi]$ корнем уравнения $\cos x = \sqrt{2}/2$ является число $x = 3\pi/4 + 2\pi = 11\pi/4$
- Ответ: $x = \pi/4$; $x = 5\pi/4$; $x = 11\pi/4$

УПРАЖНЕНИЯ

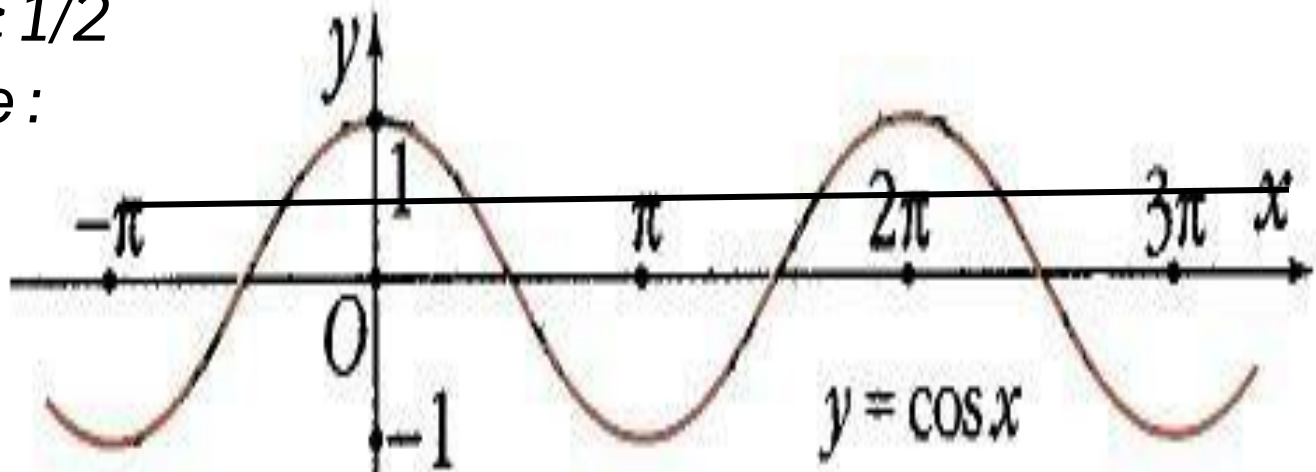
- №712 Найти все корни уравнения, принадлежащие отрезку $[0; 3\pi]$:
- 4) $\cos x = -\frac{1}{2}$
- Решение: На отрезке $[0; \pi]$ корнем уравнения $\cos x = -\frac{1}{2}$ является число $x = \arccos(-\frac{1}{2}) = \mathbf{2\pi/3}$, на промежутке $[\pi; 2\pi]$ - , $x = \pi/3 + \pi = \mathbf{4\pi/3}$, на промежутке $[2\pi; 3\pi]$ - , $x = 2\pi/3 + 2\pi = \mathbf{8\pi/3}$
- Ответ: $x = \mathbf{2\pi/3}$; $x = \mathbf{4\pi/3}$; $x = \mathbf{8\pi/3}$

УПРАЖНЕНИЯ

□ № 713. Найти все решения неравенства, принадлежащие отрезку $[0; 3\pi]$:

□ 1) $\cos x \geq 1/2$

□ Решение:



□ По рисунку видно, что график функции $y = \cos x$ расположен выше графика функции $y = 1/2$ на промежутках $[0; \pi/3]$ и $[5\pi/3; 2\pi]$

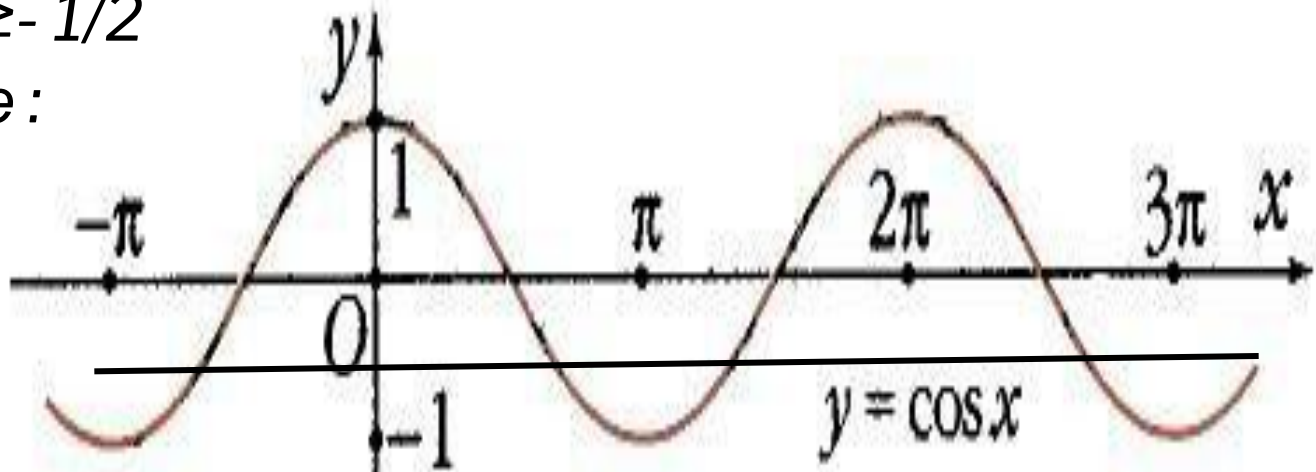
□ Ответ: $[0; \pi/3]$ и $[5\pi/3; 2\pi]$

УПРАЖНЕНИЯ

□ № 713. Найти все решения неравенства, принадлежащие отрезку $[0; 3\pi]$:

□ 2) $\cos x \geq -1/2$

□ Решение:



□ По рисунку видно, что график функции $y = \cos x$ расположен выше графика функции $y = -1/2$ на промежутках $[0; 2\pi/3]$ и $[4\pi/3; 8\pi/3]$

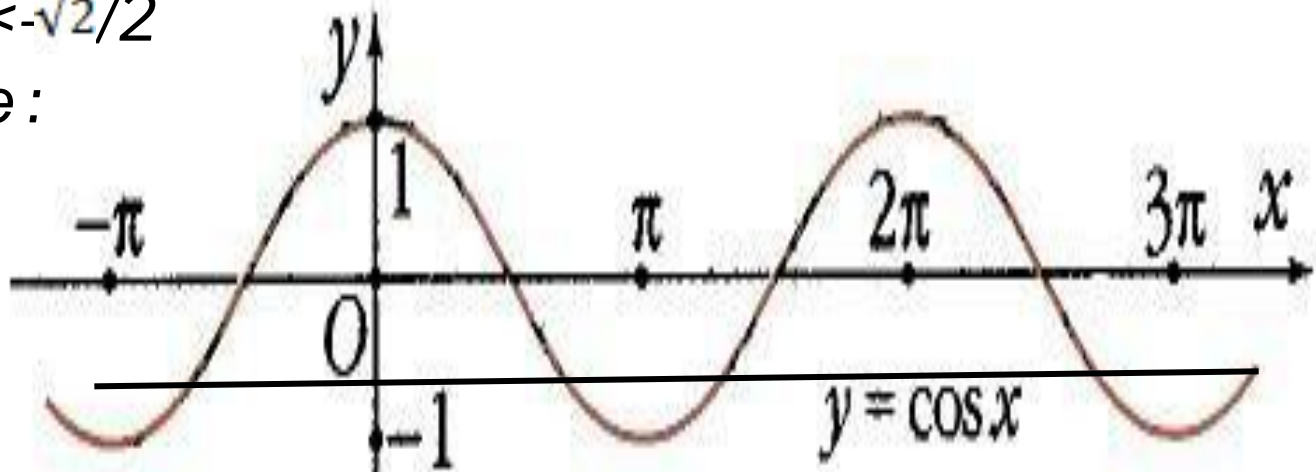
□ Ответ: $[0; 2\pi/3]$ и $[4\pi/3; 8\pi/3]$

УПРАЖНЕНИЯ

□ № 713. Найти все решения неравенства, принадлежащие отрезку $[0; 3\pi]$:

□ 3) $\cos x < -\sqrt{2}/2$

□ Решение:



□ По рисунку видно, что график функции $y = \cos x$ расположен ниже графика функции $y = -\sqrt{2}/2$ на промежутках $(3\pi/4; 5\pi/4)$ и $(11\pi/4; 3\pi)$

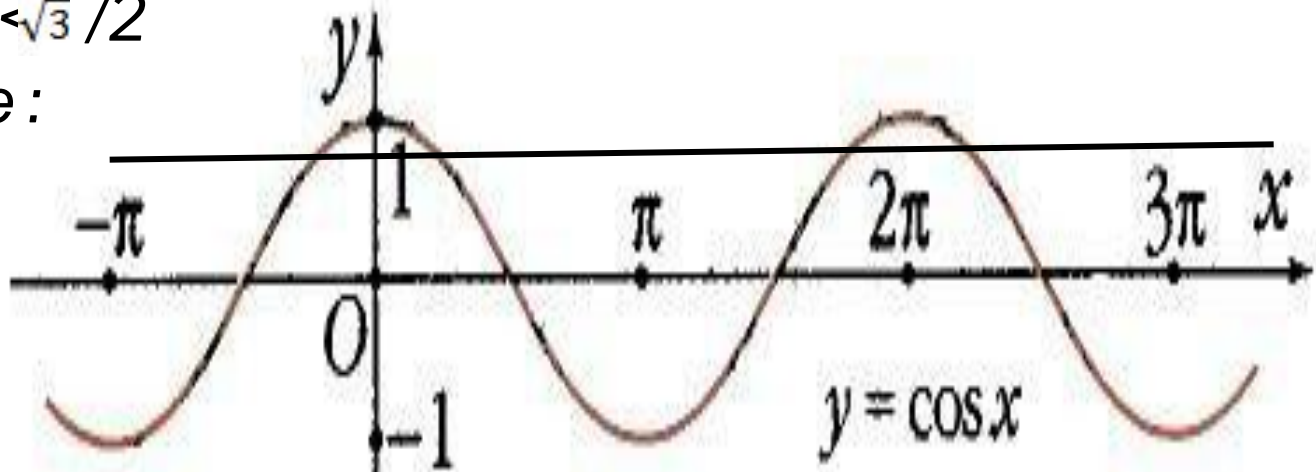
□ Ответ: $(3\pi/4; 5\pi/4)$ и $(11\pi/4; 3\pi)$

УПРАЖНЕНИЯ

□ № 713. Найти все решения неравенства, принадлежащие отрезку $[0; 3\pi]$:

□ 4) $\cos x < \sqrt{3}/2$

□ Решение:



□ По рисунку видно, что график функции $y = \cos x$ расположен ниже графика функции $y = \sqrt{3}/2$ на промежутках $(0; \pi/6)$ и $(11\pi/6; 13\pi/6)$

□ Ответ: $(0; \pi/6)$ и $(11\pi/6; 13\pi/6)$

УПРАЖНЕНИЯ

- № 714 Выразите синус через косинус по формулам приведения, сравните числа:
- 1) $\cos \pi/5$ и $\sin \pi/5$
- Решение: $\sin \pi/5 = \sin (\pi/2 - 3\pi/5) = \cos 3\pi/10$. Сравним $\cos \pi/5$ и $\cos 3\pi/10$; $\pi/5 < 3\pi/10$, значит $\cos \pi/5 > \cos 3\pi/10$, а значит $\cos \pi/5 > \sin \pi/5$
- Ответ: $\cos \pi/5 > \sin \pi/5$
- 2) $\sin \pi/7$ и $\cos \pi/7$
- Решение: $\sin \pi/7 = \sin (\pi/2 - \pi/7) = \cos 5\pi/14$. Сравним $\cos \pi/7$ и $\cos 5\pi/14$; $\pi/7 < 5\pi/14$, значит $\cos \pi/7 > \cos 5\pi/14$, а значит $\cos \pi/7 > \sin \pi/7$
- Ответ: $\sin \pi/7 < \cos \pi/7$

УПРАЖНЕНИЯ

- № 714 Выразите синус через косинус по формулам приведения, сравните числа:
- 3) $\cos 3\pi/8$ и $\sin 5\pi/8$
- Решение: $\sin 5\pi/8 = \sin(\pi/2 + \pi/8) = \cos \pi/8$. Сравним $\cos 3\pi/8$ и $\cos \pi/8$; $\pi/8 < 3\pi/8$, значит $\cos 3\pi/8 < \cos \pi/8$, а значит $\cos 3\pi/8 < \sin 5\pi/8$
- Ответ: $\cos 3\pi/8 < \sin 5\pi/8$
- 4) $\sin 3\pi/5$ и $\cos \pi/5$
- Решение: $\sin 3\pi/5 = \sin(\pi/2 + \pi/10) = \cos \pi/10$. Сравним $\cos 3\pi/5$ и $\cos \pi/10$; $3\pi/5 > \pi/10$, значит $\cos 3\pi/5 < \cos \pi/10$, а значит $\sin 3\pi/5 < \cos \pi/5$
- Ответ: $\sin 3\pi/5 < \cos \pi/5$

УПРАЖНЕНИЯ

- № 714 Выразите синус через косинус по формулам приведения, сравните числа:
- 5) $\cos \pi/6$ и $\sin 5\pi/14$
- Решение: $\sin 5\pi/14 = \sin (\pi/2 - \pi/7) = \cos \pi/7$. Сравним $\cos \pi/6$ и $\cos \pi/7$; $\pi/6 > \pi/7$, значит $\cos \pi/6 < \cos \pi/7$, а значит $\cos \pi/6 < \sin 5\pi/14$
- Ответ: $\cos \pi/6 < \sin 5\pi/14$
- 6) $\cos \pi/8$ и $\sin 3\pi/10$
- Решение: $\sin 3\pi/10 = \sin (\pi/2 - \pi/5) = \cos \pi/5$. Сравним $\cos \pi/8$ и $\cos \pi/5$; $\pi/8 < \pi/5$, значит $\cos \pi/8 > \cos \pi/5$, а значит $\cos \pi/8 > \sin 3\pi/10$
- Ответ: $\cos \pi/8 > \sin 3\pi/10$

УПРАЖНЕНИЯ

- № 715 Найти все корни уравнения, принадлежащие отрезку $[-\pi/2; 3\pi/2]$:
- 1) $\cos 2x = 1/2$
- Решение: На отрезке $[-\pi/2; 3\pi/2]$ корнем уравнения $\cos 2x = 1/2$ является число $2x = \arccos(1/2) = \pi/3$. Решая уравнение $2x = \pi/3$, получим $x = \pi/6$
- Ответ : $x = \pi/6$

УПРАЖНЕНИЯ

- № 715 Найти все корни уравнения, принадлежащие отрезку $[-\pi/2; 3\pi/2]$:
- 2) $\cos 3x = \sqrt{3}/2$
- Решение: На отрезке $[-\pi/2; 3\pi/2]$ корнем уравнения $\cos 3x = \sqrt{3}/2$ является число $3x = \arccos(\sqrt{3}/2) = \pi/6$. Решая уравнение $3x = \pi/6$, получим $x = \pi/18$
- Ответ : $x = \pi/18$

УПРАЖНЕНИЯ

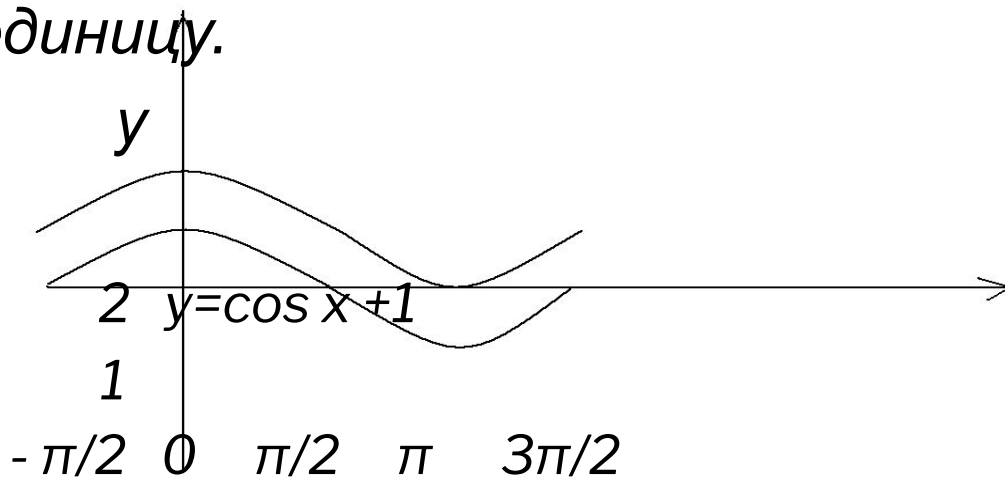
- № 716 Найти все решения неравенства , принадлежащие отрезку $[-\pi/2; 3\pi/2]$:
- 1) $\cos 2x < 1/2$
- Решение: На отрезке $[-\pi/2; 3\pi/2]$ корнем уравнения $\cos 2x = 1/2$ является число $2x = \arccos(1/2) = \pi/3$. Решая неравенство $\pi/3 < 2x < 3\pi/2$, получим $\pi/6 < x < 3\pi/4$
- Ответ : $\pi/6 < x < 3\pi/4$

УПРАЖНЕНИЯ

- № 716. Найти все корни уравнения, принадлежащие отрезку $[-\pi/2; 3\pi/2]$:
- 2) $\cos 3x = \sqrt{3}/2$
- Решение: На отрезке $[-\pi/2; 3\pi/2]$ корнем уравнения $\cos 3x = \sqrt{3}/2$ является число $3x = \arccos(\sqrt{3}/2) = \pi/6$. Решая неравенство $0 < 3x < \pi/6$, получим $0 < x < \pi/18$
- Ответ : $0 < x < \pi/18$

УПРАЖНЕНИЯ

- № 717 Построить график функции и выяснить её свойства:
- 1) $y=1+\cos x$
- Решение: График функции $y=\cos x+1$ получается из графика функции $y=\cos x$ смещением по оси OY на 1 единицу.



Свойства функции: 1) ООФ – вся числовая прямая

- 2) Область значений функции - $[0; 2]$
- 3) Периодическая с периодом - 2π

- 4) четная
- 5) принимает значение, равное 0, при $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$
- Наибольшее значение, равное 2, принимает при $x = 0$, $n \in \mathbb{Z}$ и в точках, получаемых сдвигом на $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$
- Наименьшее значение, равное 0, принимает при $x = \pi$ и в точках, получаемых сдвигом на $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
- Положительные значения на интервале на всей числовой прямой, кроме точек, в которых значение функции равно 0.
- Отрицательных значений у функции нет.
- 6) Возрастает на отрезке $(\pi; 2\pi)$ и на отрезках, получаемых сдвигом на $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$
- 7) Убывает на отрезке $(0; \pi)$ и на отрезках, получаемых сдвигом на $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

УПРАЖНЕНИЯ

- № 718 Найти множество значений функции $y = \cos x$, если x принадлежит промежутку:
- 1) $[\pi/3; \pi]$
- Решение: Найдем значения функции на концах промежутка. $\cos(\pi/3) = 1/2$; $\cos(\pi) = -1$. На заданном промежутке функция строго убывающая, значит, множество значений функции – отрезок $[-1; 1/2]$
- Ответ: $[-1; 1/2]$

УПРАЖНЕНИЯ

□ № 719 Построить график функции :

□ 1) $y = |\cos x|$

□ Решение: Строим график функции $y = \cos x$, а затем те части графика, где y принимает отрицательные значения, отображаем симметрично оси Ox

