

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

ПОНЯТИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛА ФУНКЦИИ

Пусть функция $y=f(x)$ определена на промежутке X и дифференцируема в некоторой окрестности точки $x \in X$

Тогда существует конечная производная

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

На основании теоремы о связи бесконечно малых величин с пределами функций имеем:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x)$$

Где $\alpha(\Delta x)$ - бесконечно малая величина при $\Delta x \rightarrow 0$

Следовательно,

$$\Delta y = \underline{f'(x) \cdot \Delta x} + \underline{\underline{\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x}}$$

Таким образом, приращение функции Δy

состоит из двух слагаемых:

1. линейного относительно Δx
2. нелинейного, являющегося бесконечно малой величиной более высокого порядка, чем

Δx

Дифференциалом функции называется главная, линейная относительно Δx , часть приращения функции, равная произведению производной на приращение независимой переменной:

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x$$

Пример.

*Найти приращение и дифференциал
функции*

$$y = 2x^3 - x$$

при $x=10$ и $\Delta x=0.1$

Решение:

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) = \\ &= 2(x + \Delta x)^3 - (x + \Delta x) - 2x^3 - x = \\ &= (3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2 - 1) \cdot \Delta x\end{aligned}$$

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x = (3x^2 + 3x \cdot \Delta x + \Delta x^2 - 1) \cdot \Delta x$$

при $x=10$ и $\Delta x=0.1$

$$\Delta y = 302.91$$

$$dy = 302.8$$

Пример.

Найти дифференциал функции

$$y = x$$

Решение:

$$dy = dx = f'(x) \cdot \Delta x = x' \cdot \Delta x = \Delta x$$

Следовательно, дифференциал независимой переменной равен приращению этой переменной:

$$\Delta x = dx$$