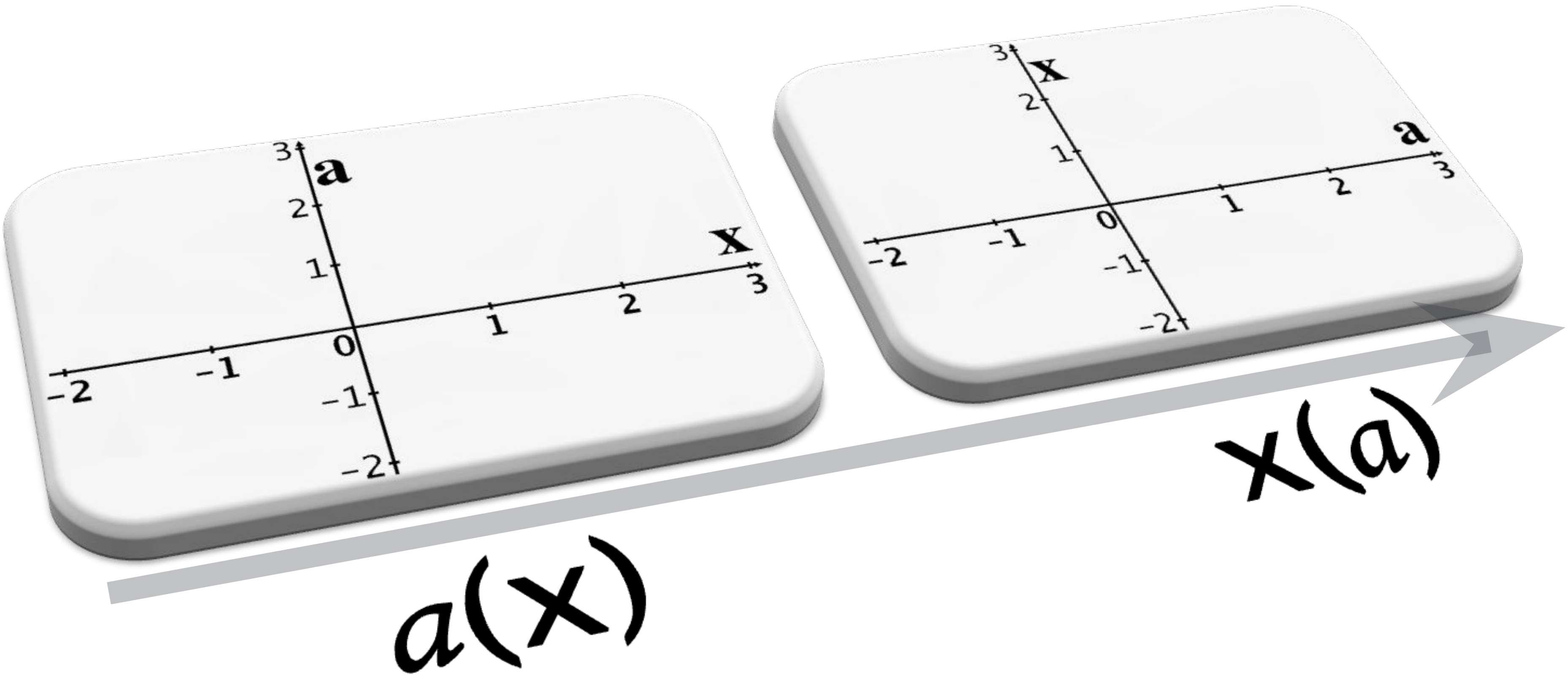
РЕШЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ ЗАДАНИЙ КООРДИНАТНО-ПАРАМЕТРИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

МБОУ «Физико – математический лицей»
Учитель: Могильникова И.Н.

«Но когда эти науки (алгебра и геометрия) объединились, они энергично поддержали друг друга и быстро зашагали к совершенству.»

Ж.А. Лагранж

- Пусть на плоскости даны две взаимно перпендикулярные с общим началом (точкой О) числовые оси. Одну из них (Ох) назовем координатной; другую (Оa) – параметрической, а плоскость (хОa или aОх) – координатно-параметрической. Метод решения задач с параметрами, использующий *КП-плоскость*, назовем координатно-параметрическим, или *КП-методом*.



a
x
x
a
a(x)
x(a)

C5

- Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

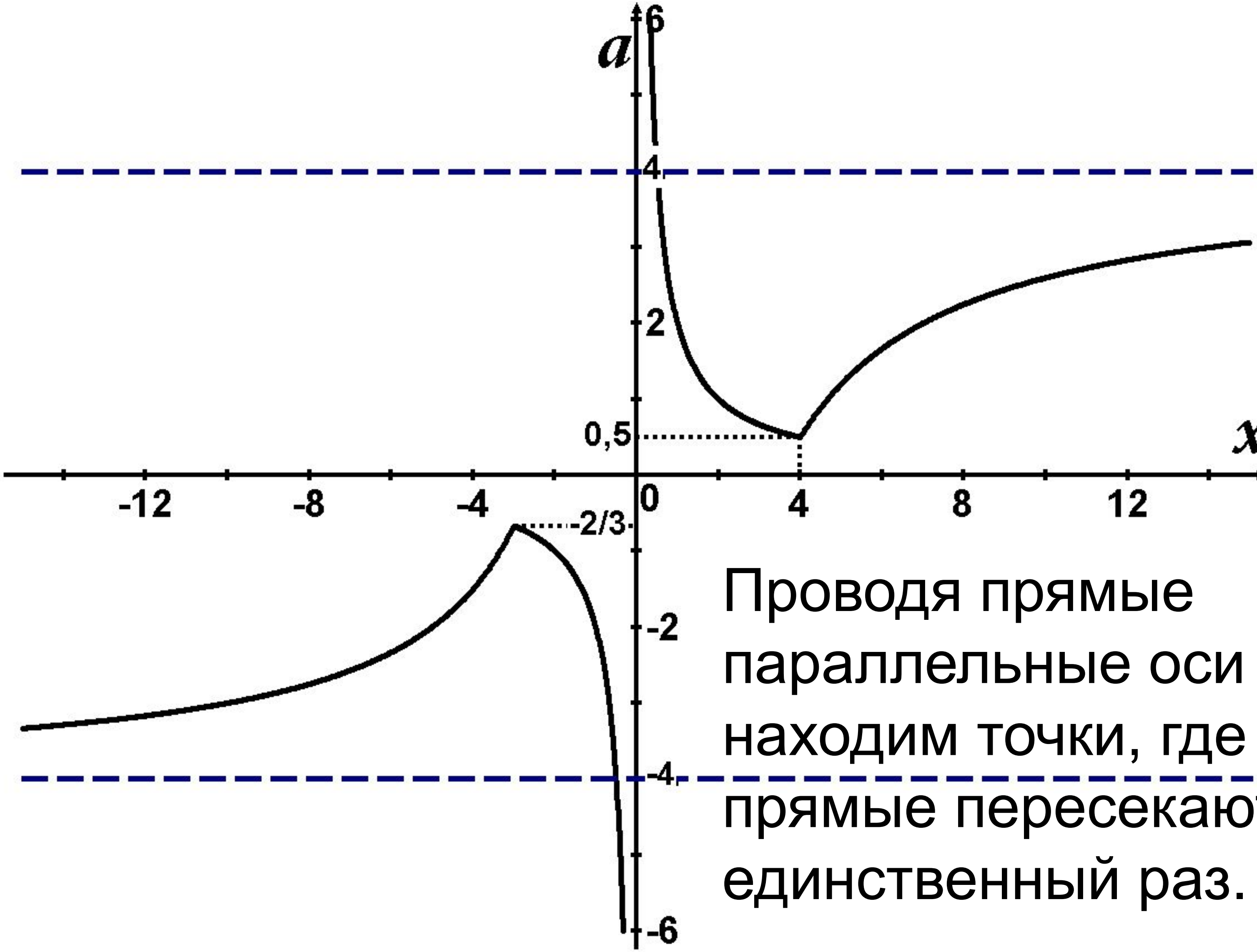
$$|2x+6|+|2x-8|=ax+12$$

имеет единственное решение.

- Заметим, что x=0 не является решением уравнения.

$$|2x+6|+|2x-8|=ax+12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\in(-\infty;-3], \\ ax=-4x-10, \end{cases} \\ \begin{cases} x\in(-3;4), \\ ax=2, \end{cases} \\ \begin{cases} x\in[4;+\infty), \\ ax=4x-14, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\in(-\infty;-3], \\ a=-4-\dfrac{10}{x}, \end{cases} \\ \begin{cases} x\in(-3;4), \\ a=\dfrac{2}{x}, \end{cases} \\ \begin{cases} x\in[4;+\infty), \\ a=4-\dfrac{14}{x}. \end{cases} \end{array}\right.$$



Проводя прямые параллельные оси x, находим точки, где эти прямые пересекают график единственный раз.

- Эти значения a, при которых данные прямые пересекают график один раз, будут удовлетворять условию задания.

Ответ: $a \in (-\infty; -4] \cup \left\{-\frac{2}{3}; 0{,}5\right\} \cup [4; +\infty).$

C5

- Найдите максимальное число целых чисел, являющихся решением неравенства

$$\log_{(a+x)}(ax - x^2) < \log_{(a+x)} x$$

при фиксированном значении параметра a. Указать хотя бы одно такое значение параметра.

- Найдем сначала ОДЗ:

$$\begin{cases} a+x>0, \\ x>0, \\ x(a-x)>0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-a, \\ x>0, \\ a-x>0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-a, \\ 0<x<a, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0, \\ x\in(0;a). \end{cases}$$

- Мы не включили в ОДЗ условие $a+x\neq 1,$ т.к. оно войдет в основное неравенство условия равносильности, которым мы воспользуемся.

$$\log_{(a+x)}(ax - x^2) < \log_{(a+x)} x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a + x - 1)(ax - x^2 - x) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x + a - 1)(x - a + 1) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - (a-1)^2 > 0 \Leftrightarrow |x| > |a - 1|.$$

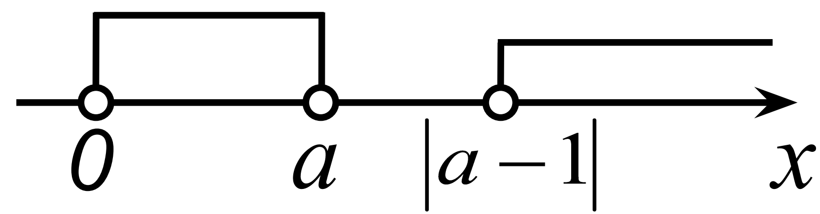
- Теперь учтем ОДЗ и получим:

$$\begin{cases} a > 0, \\ x > |a - 1|, \\ 0 < x < a. \end{cases}$$

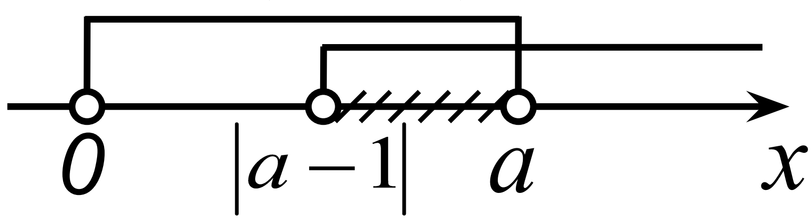
- Решить данную систему можно двумя способами.

Первый способ. Ответ зависит от взаимного расположения точек х = *a* и х = |*a*-1| на числовой оси. Рассмотрим различные случаи.

1. $a \le |a-1|$ – пересечение пусто.



2. $a > |a-1|$



- Из рисунков видно, что возможна только вторая ситуация:

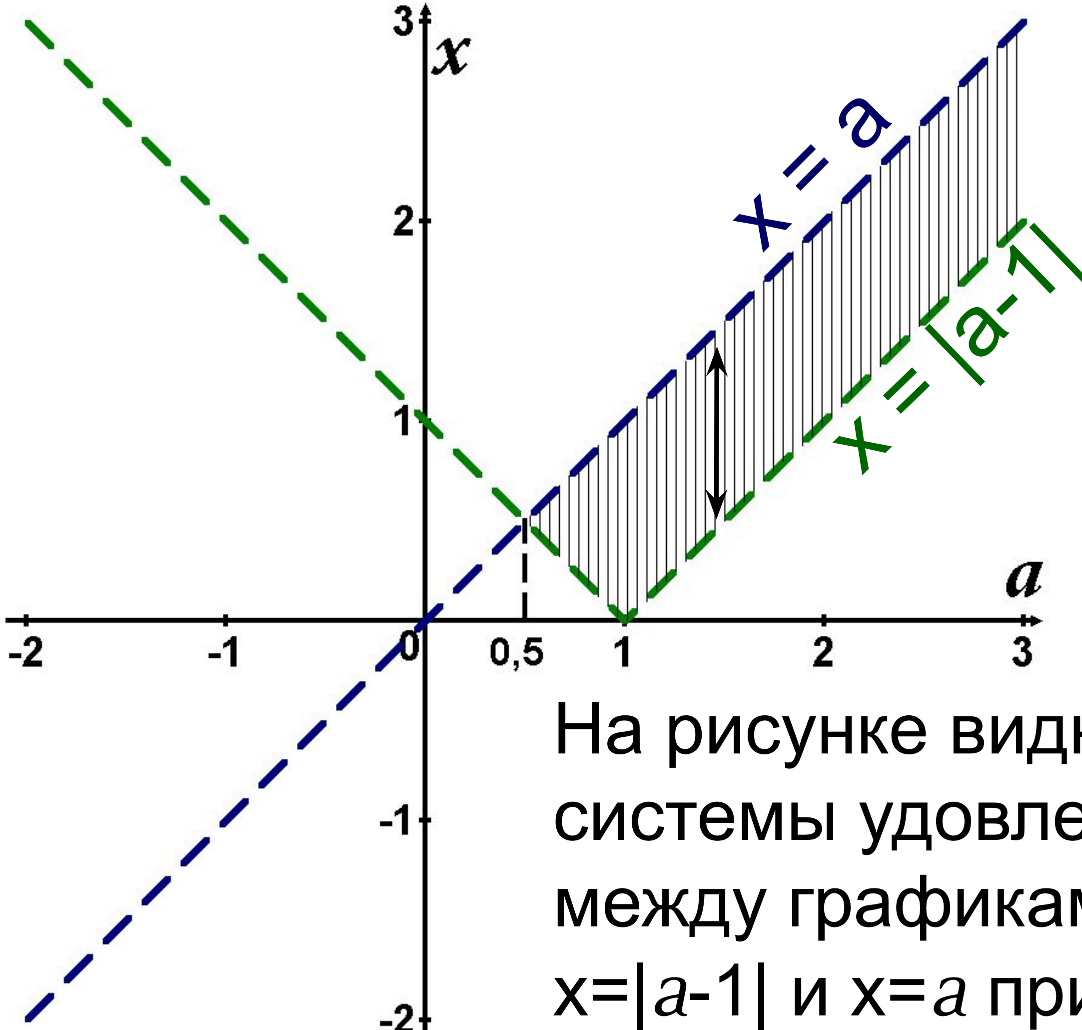
$$\begin{cases} x \in (|a-1|; a), \\ |a-1| < a, \end{cases}$$

т.е. $x \in (|a-1|; a)$ при $a > 0{,}5.$

- **Второй способ.** Можно решить систему

$$\begin{cases} a > 0, \\ x > |a-1|, \\ 0 < x < a. \end{cases}$$

графически в плоскости (a;x).



На рисунке видно, что условиям системы удовлетворяют точки между графиками функций x=|*a*-1| и x=*a* при *a*>0,5 – тот же результат.

- Теперь заметим, что

$$a-|a-1|=\left[\begin{array}{l} a-a+1\equiv 1,\ \text{если}\ a\geq 1, \\ a+a-1\equiv 2a-1,\ \text{если}\ 0{,}5<a<1. \end{array}\right.$$

Видно, что 0 <2a-1< 1, поэтому при каждом a может быть не более одного целого решения. Пусть, например, a=2,5, тогда $x\in(1{,}5;2{,}5)$ и среди решений есть x=2.

Ответ: 1; a=2,5.

C3

- Найдите сумму целых значений параметра a, при которых множество решений неравенства

$$x(x-6) \geq (a+3)(|x-3|-3)$$

содержит все члены некоторой геометрической прогрессии с первым членом, равным 4, и знаменателем

$-3 < q < -1.$

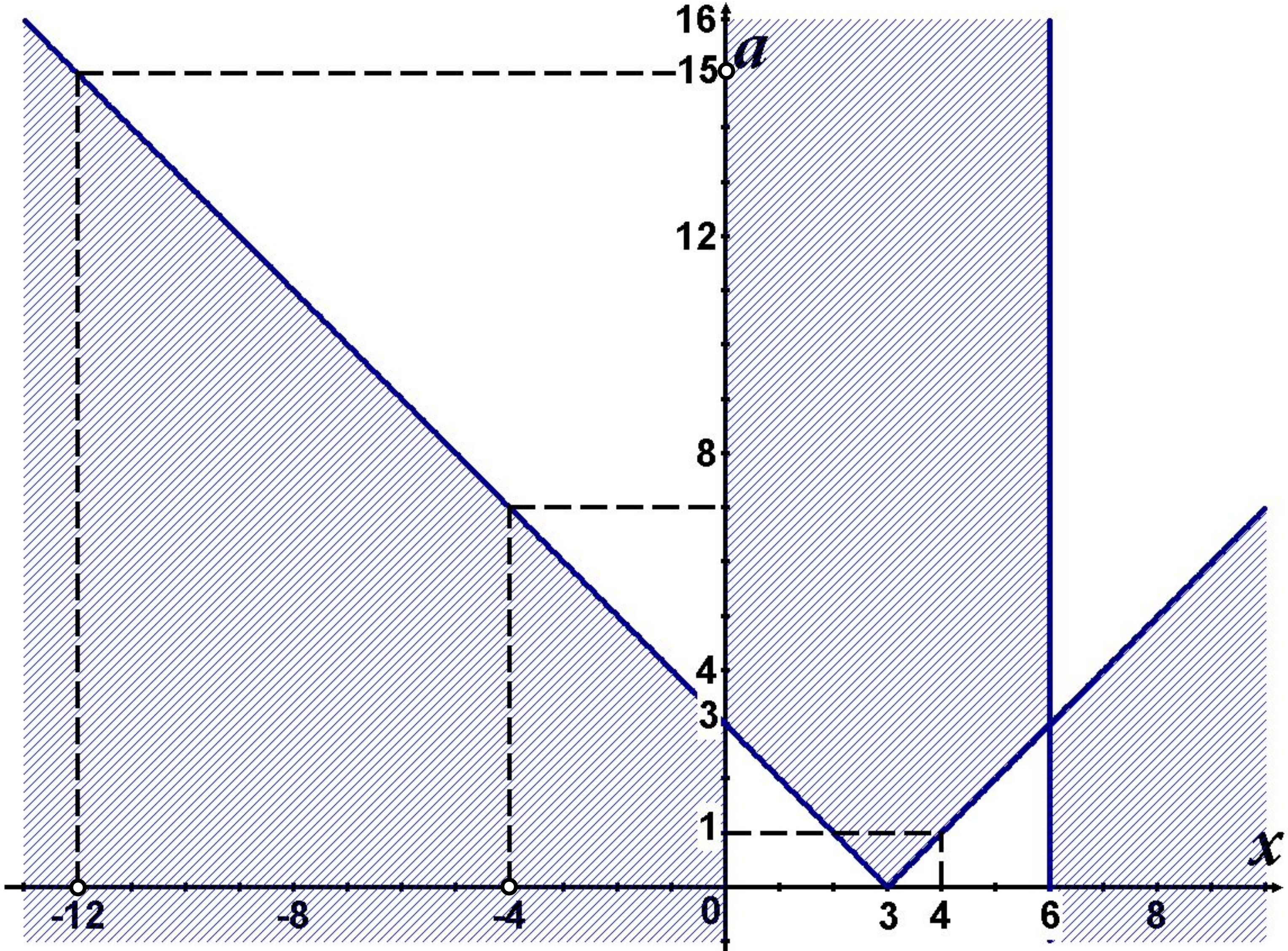
$$x(x-6) \geq (a+3)(|x-3|-3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2 - 9 \geq (a+3)(|x-3|-3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (|x-3|-3)(|x-3|-a) \geq 0.$$

- Построим в КП-плоскости графики функций:

$$|x-3| = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 6, \end{array}\right.$$ и $a = |x-3|$.



16
a
15
12
8
4
3
1
x
-12
-8
-4
0
3
4
6
8

- Как видно на графике, точка x=4 входит в множество решений неравенства при $a \geq 1.$

- Второй член прогрессии находится на промежутке (-12;-4). Для того чтобы хотя бы одно из чисел этого промежутка входило в множество решений, необходимо и достаточно выполнение условия a<15 (при a=15 ни одно из чисел не входит), т.е. $a \in (-\infty;15).$

- Для всех остальных чисел это условие будет записано как $a \in (-\infty; p),$ где p>15, т.к. -3<q<-1. А это значит, что промежуток $(-\infty;15) \in (-\infty; p).$

То есть конечным множеством значений a является промежуток [1;15). Сумма целых значений равна 105.

Ответ: 105.

Надеемся, КП-метод поможет вам успешно справиться с экзаменами!

Спасибо за внимание!