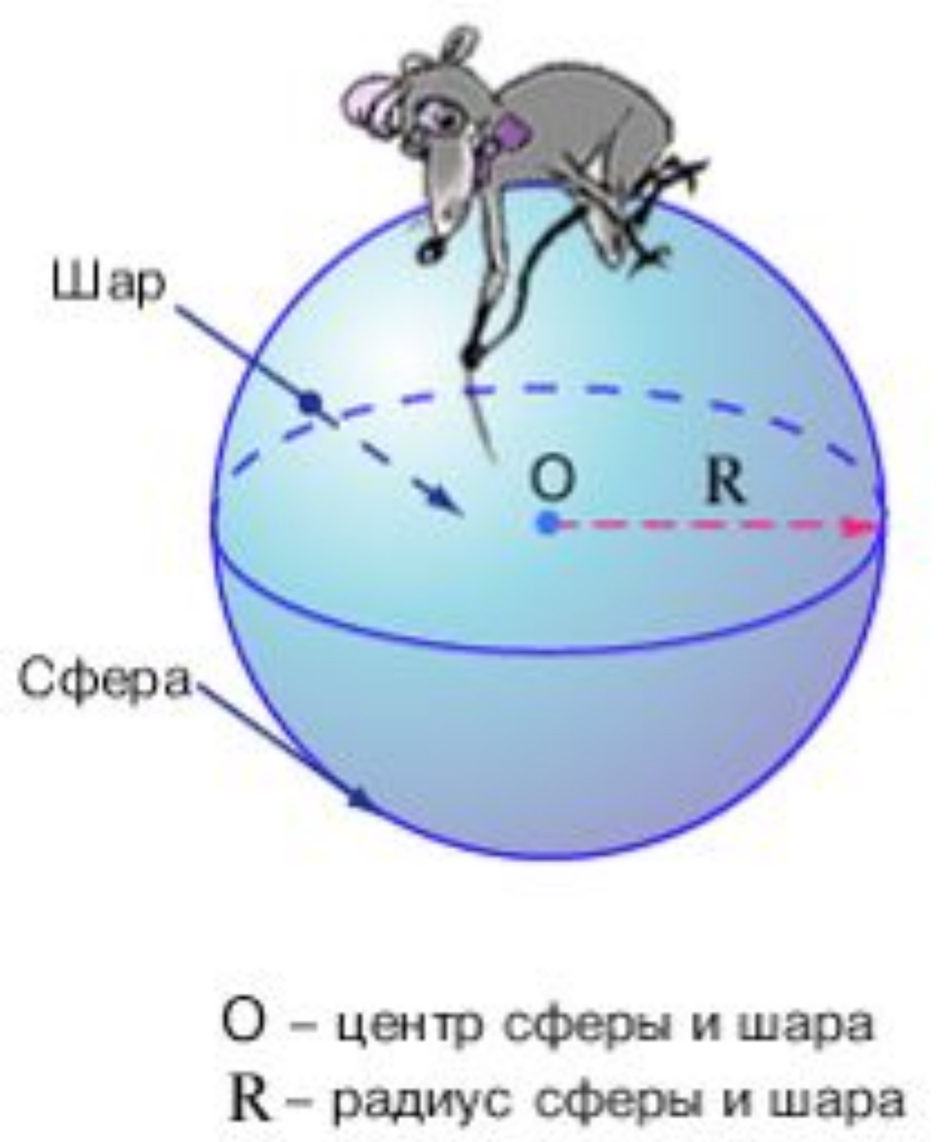
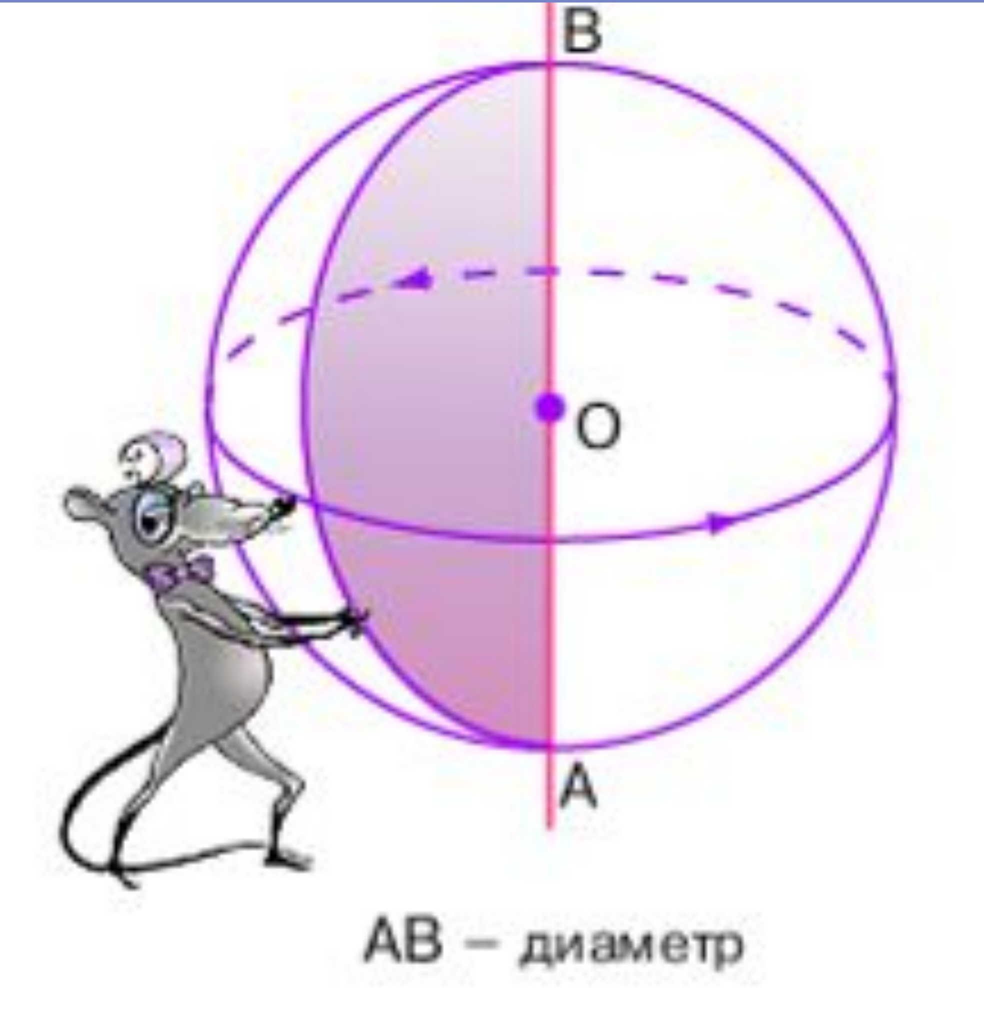
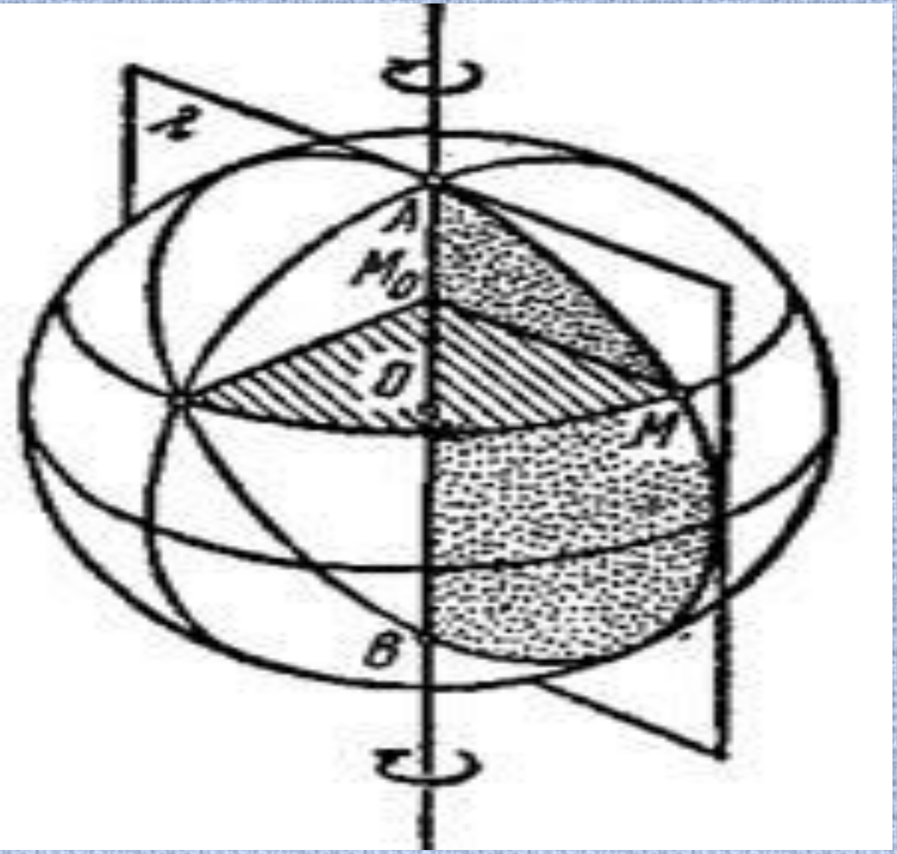
Геометрия на сфере.



Сферой называется поверхность, которая состоит из всех точек пространства, находящихся на заданном расстоянии от данной точки. Эта точка называется **центром**, а заданное расстояние – **радиусом** сферы, или шара – тела, ограниченного сферой. **Шар** состоит из всех точек пространства, находящихся на расстоянии не более заданного от данной точки.



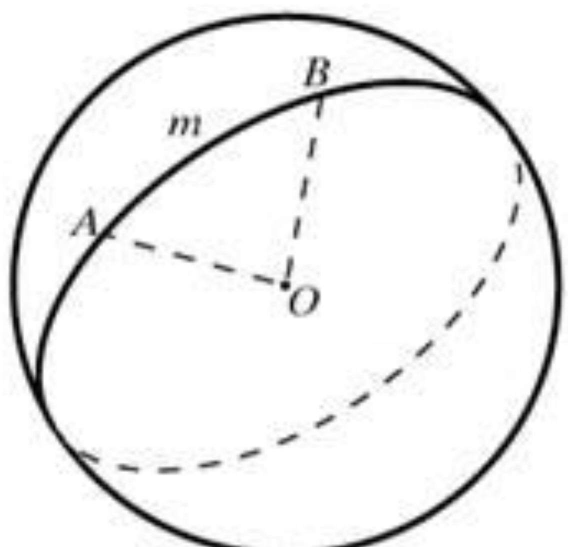
Шаровой или *сферической* поверхностью называется геометрическое место точек пространства, удаленных от данной точки *O* (центра) на заданное расстояние *R* (радиус).



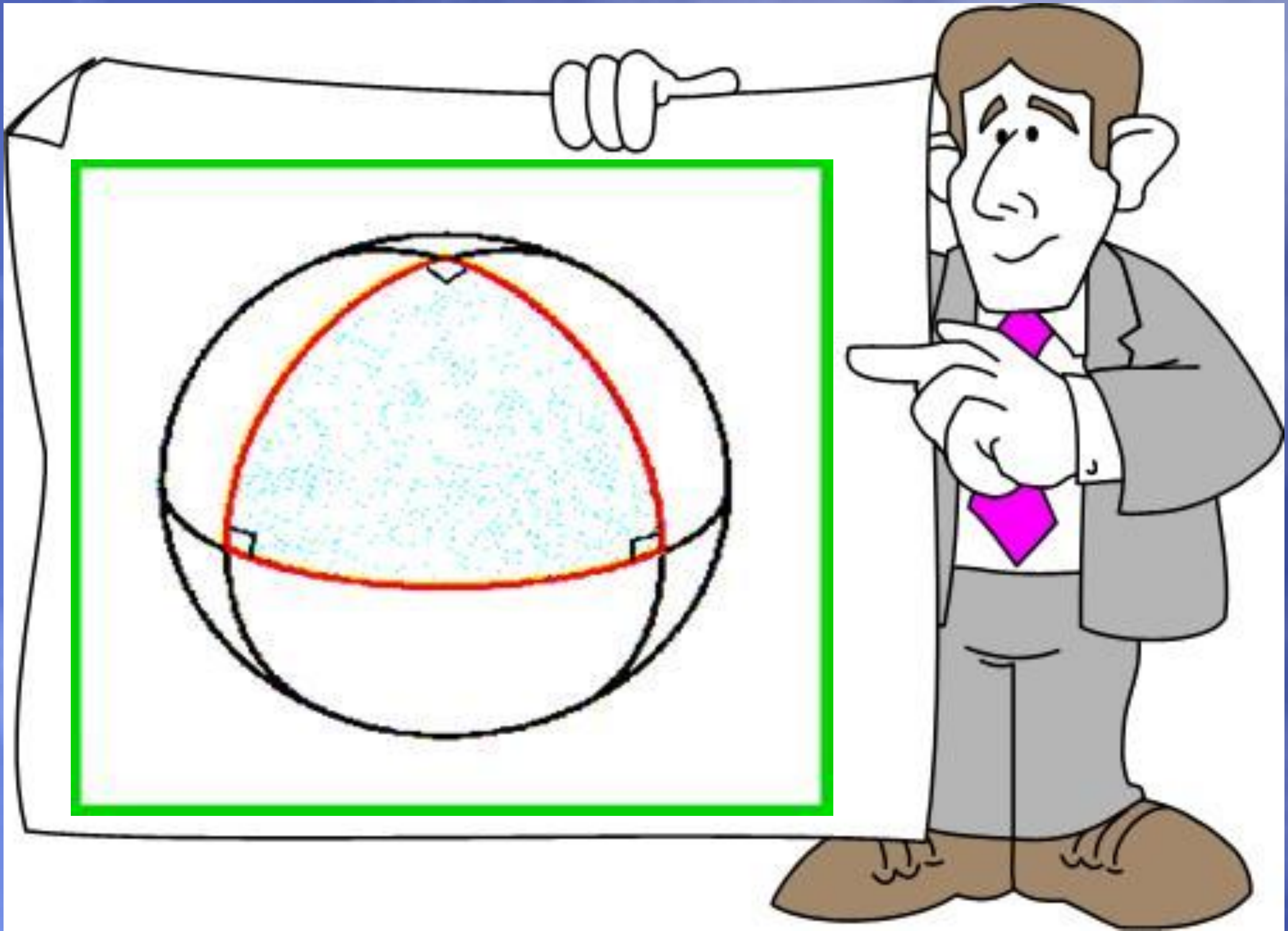
Рассмотрим окружность с центром *O* и радиусом *R* , лежащую в плоскости λ. Будем вращать ее вокруг диаметра *AB.* Тогда каждая из точек окружности,, в свою очередь опишет при вращении окружность, имеющую своим центром точку M_0—проекцию вращающейся точки *M* на ось вращения *AB.* Шаровая поверхность может быть получена вращением окружности вокруг любого из ее диаметров.

Через любые две точки на сфере, кроме диаметрально противоположных, можно провести единственный большой круг. Через диаметрально противоположные точки проходит бесконечное количество больших кругов.

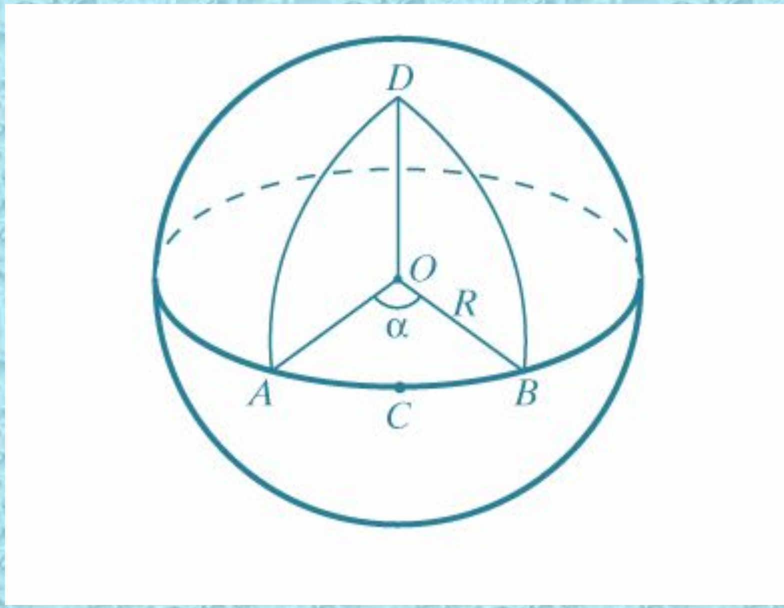
Меньшая дуга AmB большого круга является кратчайшей из всех линий на сфере, соединяющих заданные точки. Такая линия называется геодезической.



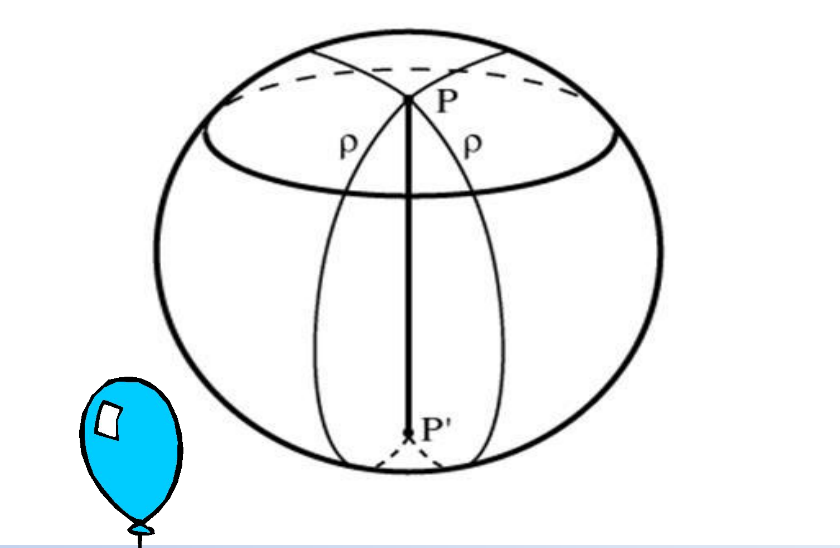
Треугольник на сфере может иметь сразу три прямых угла, если, например, он ограничен двумя перпендикулярными меридианами и экватором.



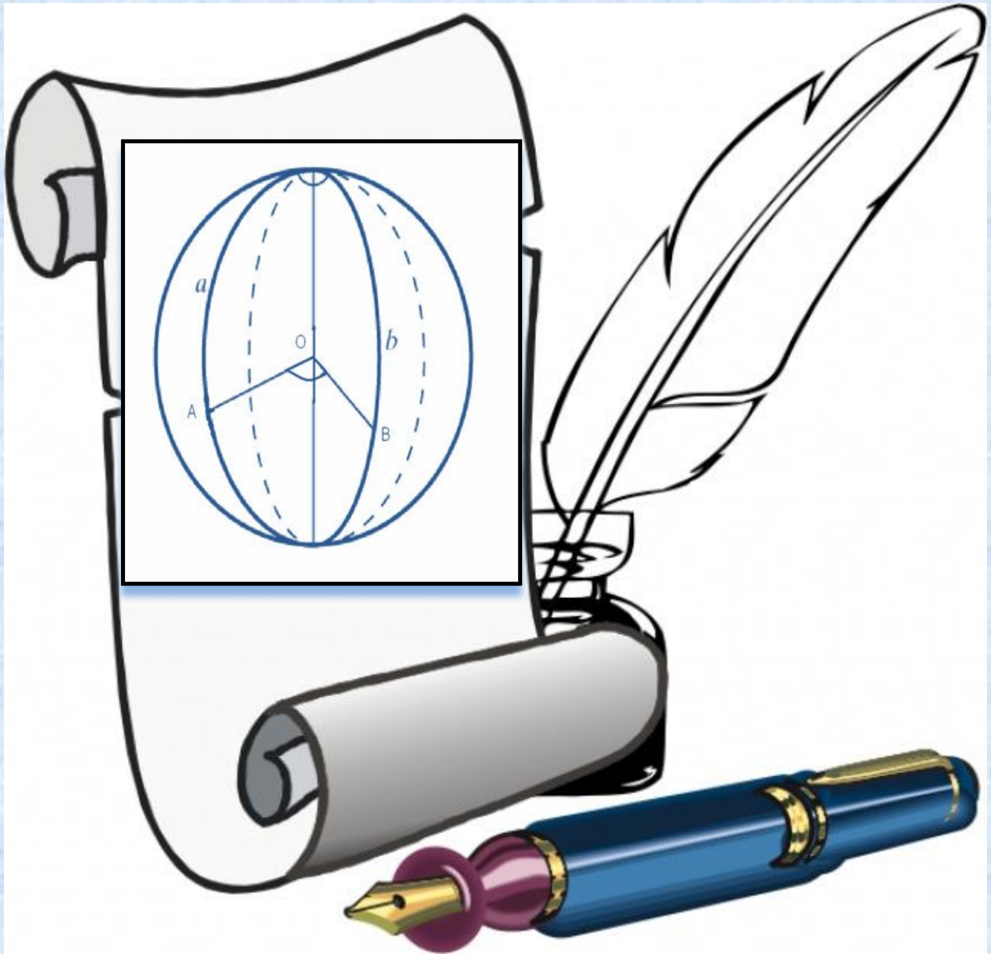
Длина сферического отрезка определяется через радианную меру центрального угла a и радиус сферы *R*, по формуле длины дуги она равна *R* a. Любая точка *C* сферического отрезка *AB* разбивает его на два, и сумма их сферических длин,равна длине всего отрезка, т.е. Ð*AOC* + Ð*COB* = Ð*AOB*. Для любой же точки *D* вне отрезка *AB* имеет место «сферическое неравенство треугольника»: сумма сферических расстояний от *D* до *A* и от *D* до *B* больше *AB*,т.е. Ð*AOD* + Ð*DOB* > Ð*AOB*, – полное соответствие между сферической и плоской геометриями.



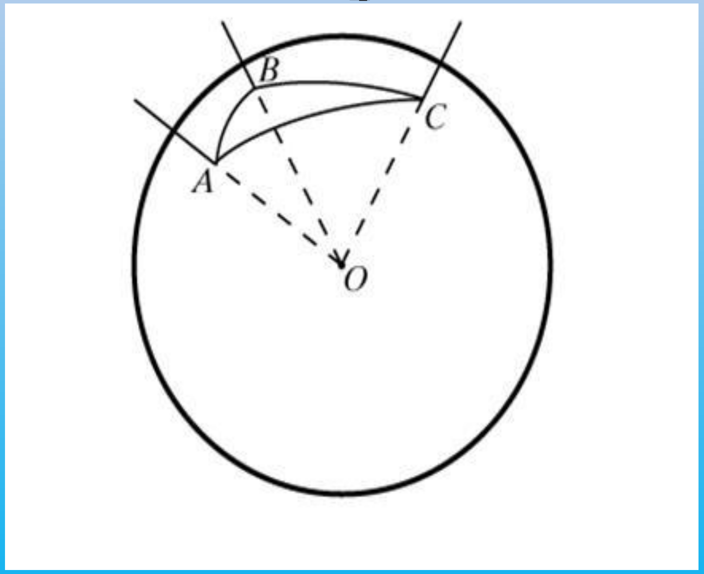
Сферическая окружность - множество точек сферы, равноудаленных от заданной точки *P*. Легко показать,что окружность лежит в плоскости, перпендикулярной диаметру сферы *PP*`,т.е. это обычная плоская окружность с центром на диаметре *PP*`. Но сферических центров у нее два: *P* и *P*`.Эти центры принято называть *полюсами*.Если диаметр r сферической окружности равен p/2, то сферическая окружность превращается в сферическую прямую. В этом случае такую окружность называют *полярой* каждой из точек *P* и *P*`.



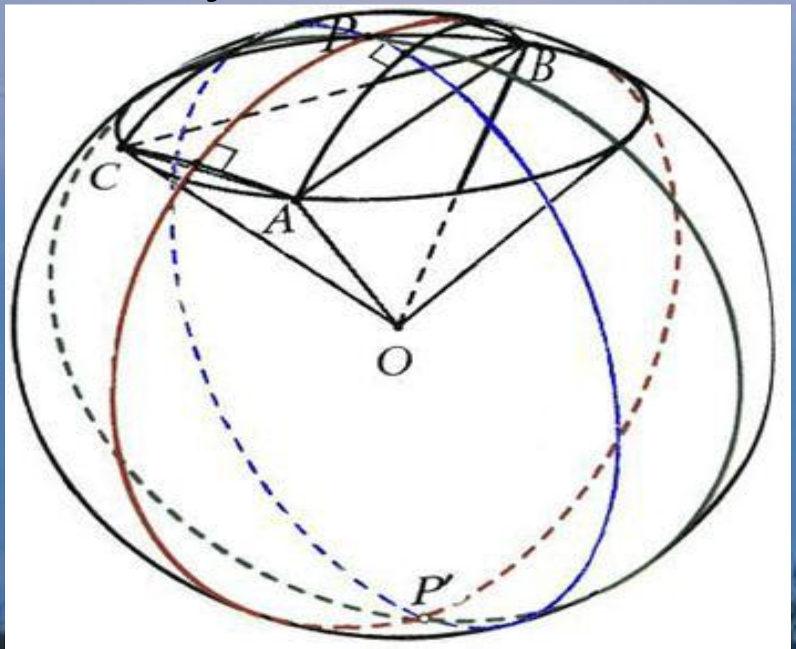
При пересечении двух сферических прямых *a* и *b* на сфере образуются четыре сферических двуугольника, подобно тому, как две пересекающиеся прямые на плоскости разбивают ее на четыре плоских угла



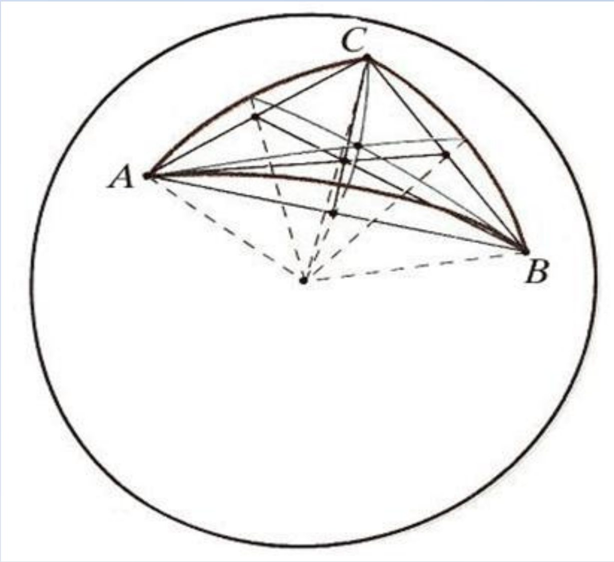
Три больших окружности, пересекаясь попарно в двух точках, образуют на сфере восемь сферических треугольников. Зная элементы (стороны и углы) одного из них, можно определить элементы всех остальных, поэтому рассматривают соотношения между элементами одного из них, того, у которого все стороны меньше половины большой окружности. Стороны треугольника измеряются плоскими углами трехгранного угла *OABC*, углы треугольника – двугранными углами того же трехгранного угла[1]



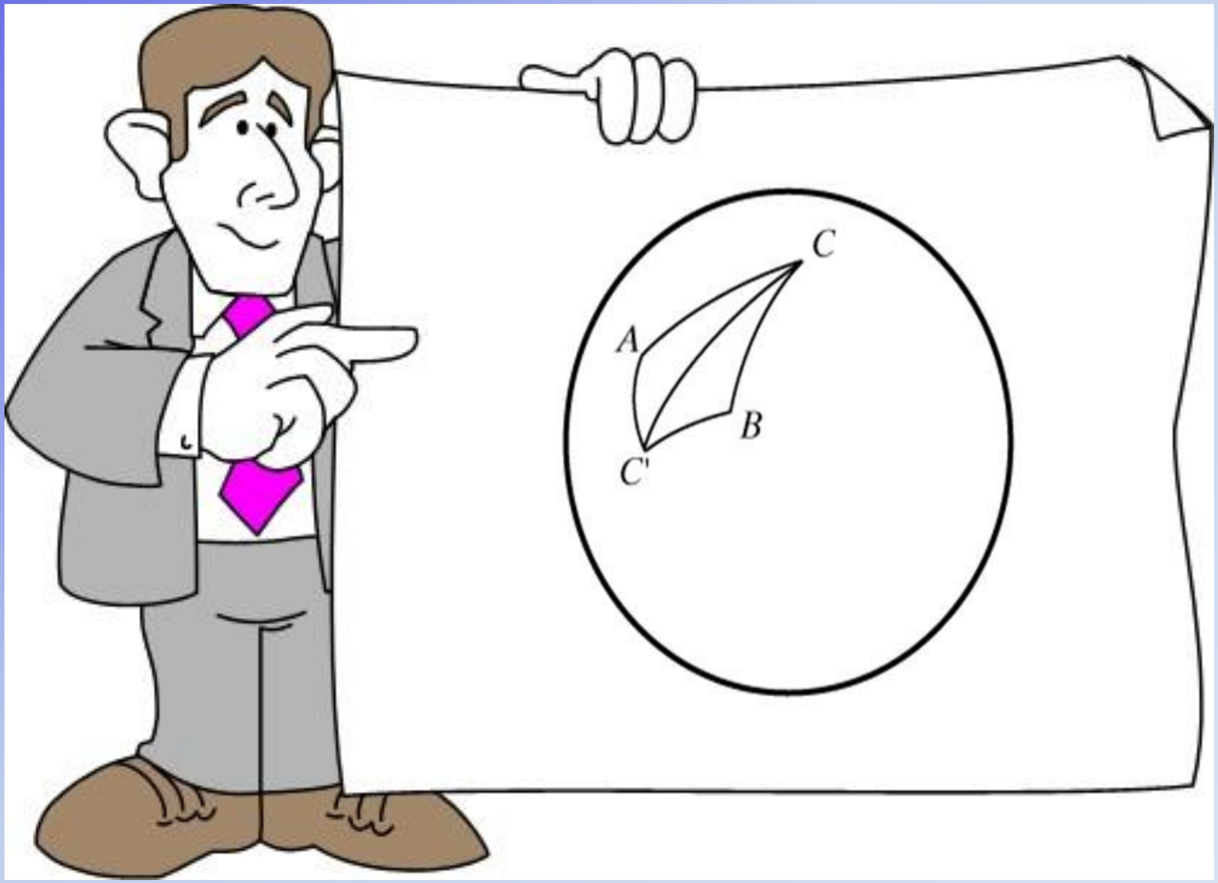
Множество точек, равноудаленных от концов отрезка будет перпендикулярной к нему прямой, проходящей через его середину, откуда следует, что серединные перпендикуляры к сторонам сферического треугольника *ABC* имеют общую точку, точнее, две диаметрально противоположные общие точки *P* и *P*`,являющиеся полюсами его единственной описанной окружности.В стереометрии это означает, что около любого трёхгранного угла можно описать конус.

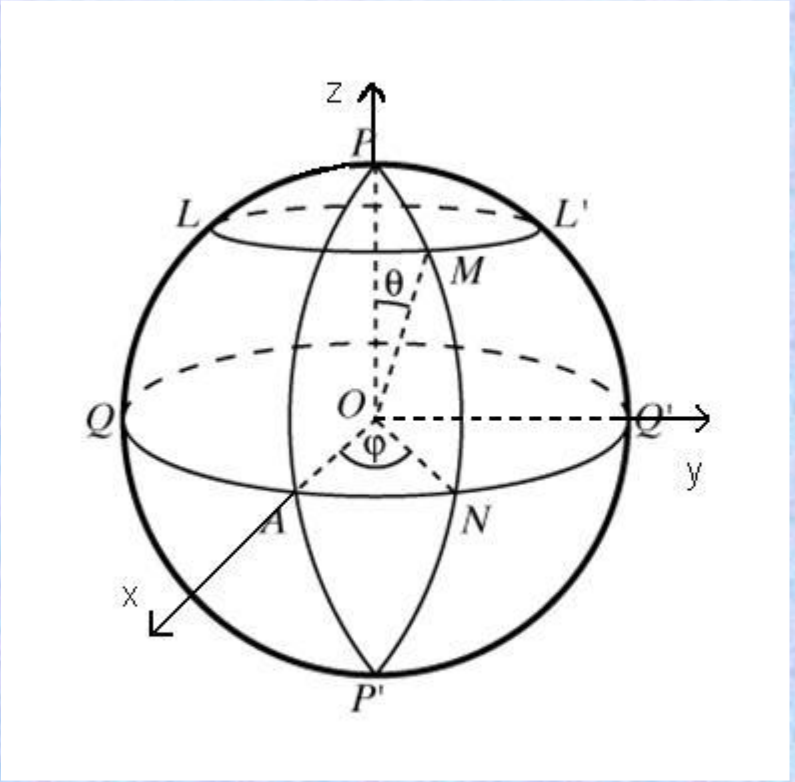


Доказательство сферической теоремы о медианах: Плоскости, содержащие медианы сферического треугольника *ABC*, пересекают плоский треугольник с теми же вершинами по его обычным медианам, следовательно, все они содержат радиус сферы, проходящий через точку пересечения плоских медиан. Конец радиуса и будет общей точкой трех «сферических» медиан.



Треугольники, имеющие равные элементы и различную ориентацию, называются симметричными, таковы, например, треугольники *AC`C* и *BCC`*





Каждая точка на сфере определяется заданием двух чисел; эти числа (*координаты*) определяются следующим образом.Фиксируется некоторый большой круг QQ`(*экватор*), одна из двух точек пересечения диаметра сферы *PP*`,перпендикулярного к плоскости QQ`,с поверхностью сферы, например *P*,и один из больших полукругов *PAP*`,выходящих из полюса (*первый меридиан*).Большие полукруги, выходящие из *P*,называются меридианами, малые круги, параллельные экватору, такие, как *LL*`,– параллелями.В качестве одной из координат точки *M* на сфере принимается угол q = *POM* (*высота точки*),в качестве второй – угол j = *AON* между первым меридианом и меридианом, проходящим через точку *M*

Пусть A, B, C -углы и a, b, c -противолежащие им стороны сферического треугольника ABC.Углы и стороны сферического треугольника связаны следующими основными формулами Сферическая тригонометрия :

cos a = cos b cos c + sin b sin c cos A,

cos A = -cos B cos C + sin B sin C cos a,

sin a cos B=cos b sinc -sinb cosc cosA,

sin Acosb=cosB sinC+sinB cosC cosa;