ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ.

Урок-практикум

ЦЕЛИ УРОКА:

- Продолжить работу над основными понятиями теории матриц и определителей;
- Закрепить практически полученные знания в лекционном курсе;
- Научиться вычислять определители любых порядков различными методами.

Роль матриц и определителей:

Широко применяются в современных науках, таких как

1. Теоретическая физика;
2. Электродинамика;
3. Квантовая механика;
4. Техническая электроника;
5. Управление и планирование производства и многих других.

Зачем нужны определители?

Понятие определителя возникло в связи с проблемой решения системы n-линейных алгебраических уравнений. Например, если рассмотреть простейшие случаи, когда n=2,n=3, то получим

системы двух линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

или трех линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Из истории создания определителей.

Первые идеи, которые привели к созданию теории определителей и применению их к решению систем линейных алгебраических уравнений, восходят к знаменитому ученому Г. В. Лейбницу.

В 1693 году Лейбниц по существу ввел понятие определителя.

В XVIII столетии вопросами теории определителей и систем линейных алгебраических уравнений занимались: Г. Крамер, французские ученые Э. Безу, П. С. Лаплас,

А. Т. Вандермонд, Ж. Л. Лагранж,
О. Л. Коши, знаменитый ученый
К. Ф. Гаусс, английский математик
А. Келли, гениальный русский ученый

Н. И. Лобачевский.

П. С. Лаплас (1749-1827)

Доказал теорему о разложении определителя по строкам(столбцам), а также ряд важных свойств определителей.

Ж. Л. Лагранж (1736-1813)

Ввел обозначение Δ для определителя, рассмотрел алгебраические дополнения, доказал теоремы замещения и аннулирования.

К. Ф. Гаусс (1777-1855)

Рассмотрел произведение определителей второго порядка, ввел название «детерминант».

Н. И. Лобачевский (1792-1856)

Предложил свой собственный способ решения систем линейных уравнений. Впервые включил теорию определителей в учебное пособие по алгебре.

1. Вычислить определитель второго порядка:

$$\begin{vmatrix} \sqrt{7} & -7 \\ 1 & \sqrt{7} \end{vmatrix}$$

2. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 0 & 4 \\ 4 & -5 & 0 & 2 \\ 8 & -2 & 0 & -4 \\ 4 & 6 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

3. Сравнить определители:

$$\begin{vmatrix} 6 & 5 & 8 \\ -9 & 3 & -7 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} 6 & -9 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 8 & -7 & 4 \end{vmatrix}$$

4. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} \cos^2\alpha & \sin^2\alpha & 1 \\ \cos^2\beta & \sin^2\beta & 1 \\ \cos^2\gamma & \sin^2\gamma & 1 \end{vmatrix}$$

5. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Даны две матрицы:

$$A = \begin{vmatrix} -3 & 5 & 5 \\ 9 & -8 & -8 \\ 6 & 3 & 3 \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -9 & 8 & -4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

Найти $|A \cdot B|$

7. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

1. Вычислить определитель третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

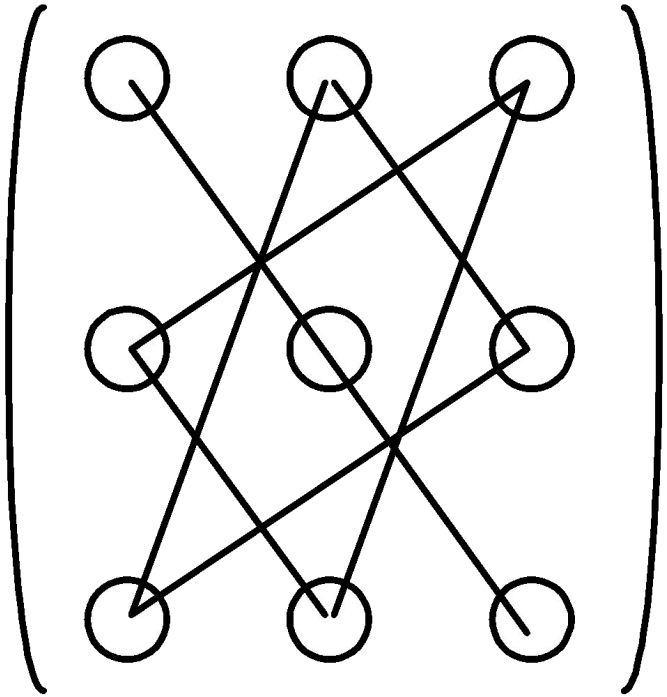
Первая группа – по правилу треугольников;

Вторая - по правилу 3 $\times$ 5;

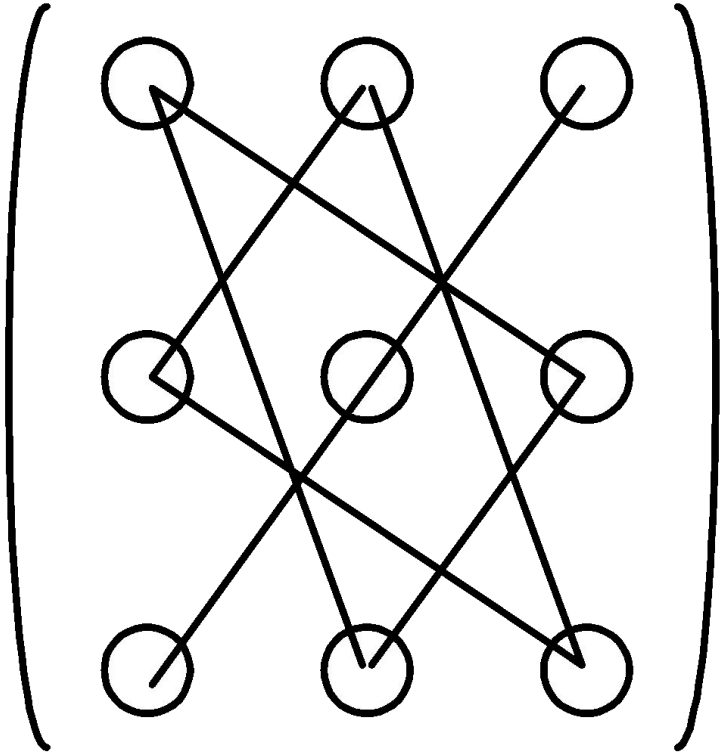
Третья - путем разложения по первой строке.

Правило треугольников:

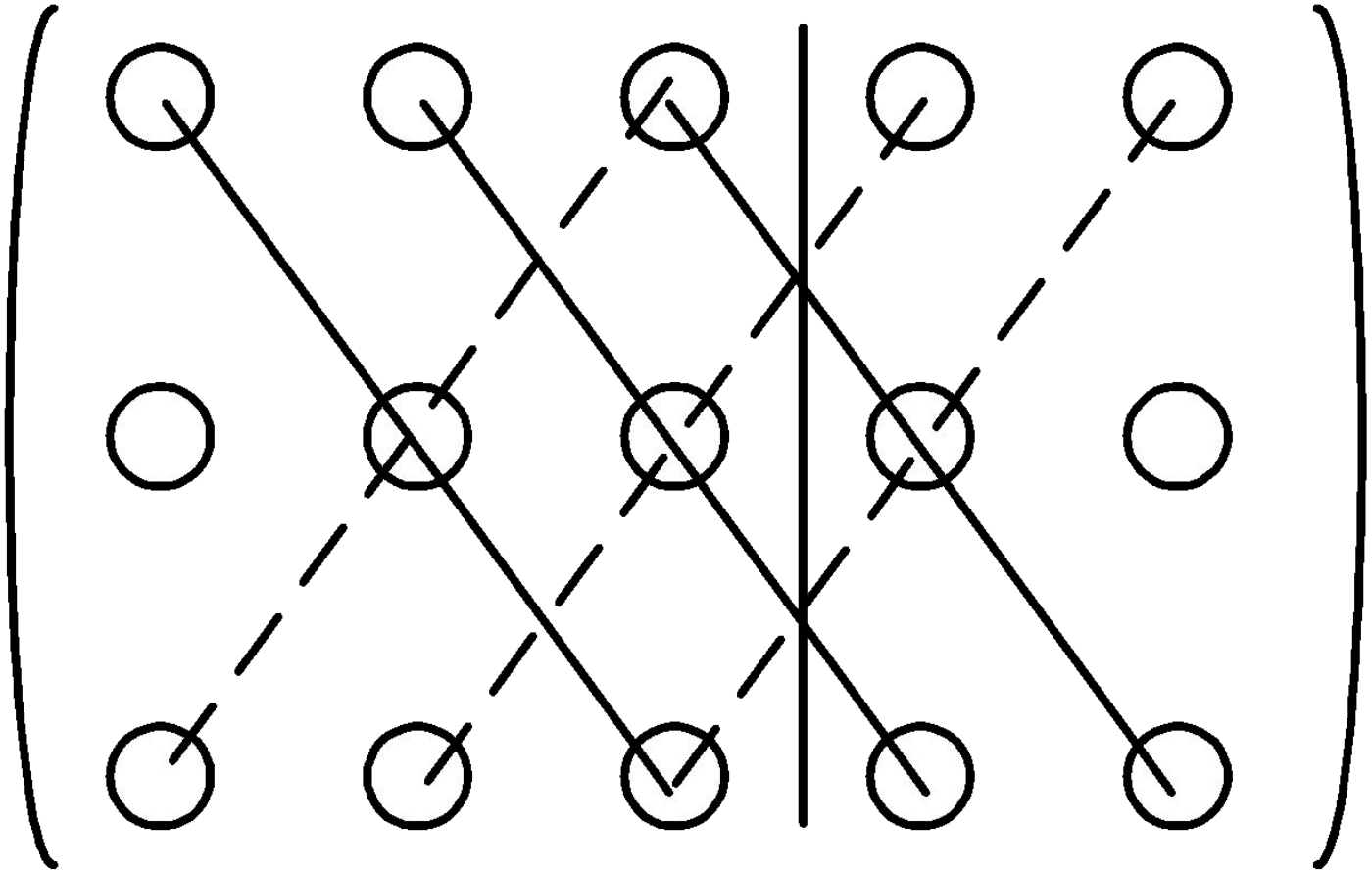
+



--



Правило «3 × 5»



Теорема Лапласа:

Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения:

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}A_{is}$$

(разложение по элементам i-й строки; i=1; 2;…;n);

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{s=1}^{n} a_{sj}A_{sj}$$

(разложение по элементам j-го столбца; j = 1; 2;..; n).

2. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах

$$\vec{a}\{1,2,3\}$$

$$\vec{b}\{2,3,1\}$$

$$\vec{c}\{3,2,1\}$$

3 * .Решить уравнение:

$$\begin{vmatrix} x & -2 & 1 \\ x & x & 1 \\ 9 & 9 & x \end{vmatrix} = 0$$

4. Вычислить определитель четвертого порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 8 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

5 *. Упростить и вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} ax & a^2+x^2 & 1 \\ ay & a^2+y^2 & 1 \\ az & a^2+z^2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

6 *

Как изменится определитель n-го порядка, если у каждого элемента изменить знак на противоположный?

Домашнее задание:

1. Повторить определение и свойства определителей.
2. Практическое задание.

Уровень сложности - ниже среднего.

Вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix} 6 & -5 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$

2) $\begin{vmatrix} 5 & 9 & -1 \\ 0 & 6 & 4 \\ 1 & -4 & 3 \end{vmatrix}$

Уровень сложности – средний.

1. Решить неравенство:

$$\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} \geq 0$$

2. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 5 & 1 & 1 & 2 \\ 7 & 5 & 9 & 8 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

Уровень сложности – выше среднего.

Упростить и вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} m+a & m-a & a \\ n+a & 2n-a & a \\ a & -a & a \end{vmatrix}$$

Вычислить определитель пятого порядка:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 8 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 9 \\ 2 & 1 & 7 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$