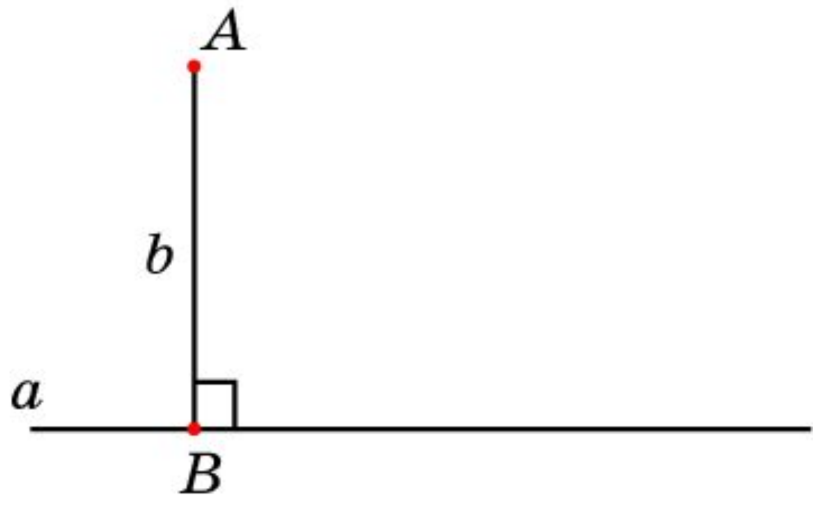
Перпендикуляр

Перпендикуляром, опущенным из точки A на прямую a, называется отрезок AB, соединяющий точку A с точкой B прямой a, перпендикулярный прямой a.

Точка B называется основанием перпендикуляра.

Длина перпендикуляра AB называется расстоянием от точки A до прямой a.

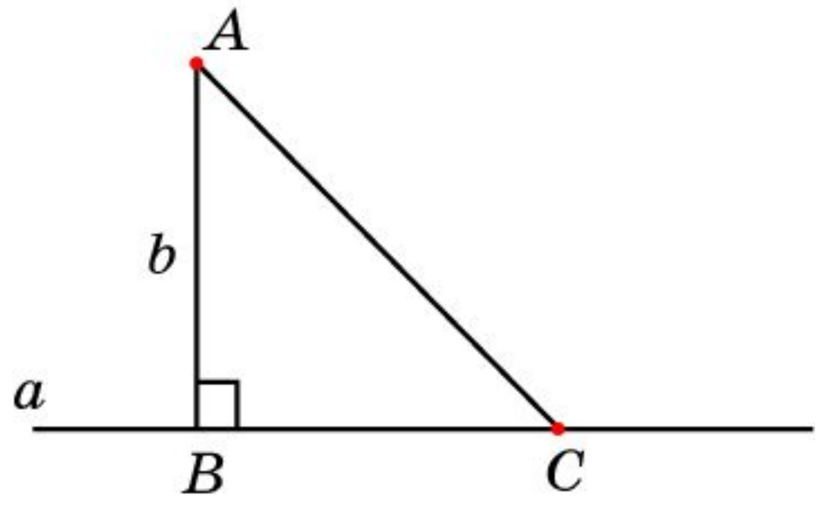


Наклонные

Для произвольной точки C прямой a, отличной от основания перпендикуляра B, отрезок AC называется наклонной, проведенной из точки A к прямой a.

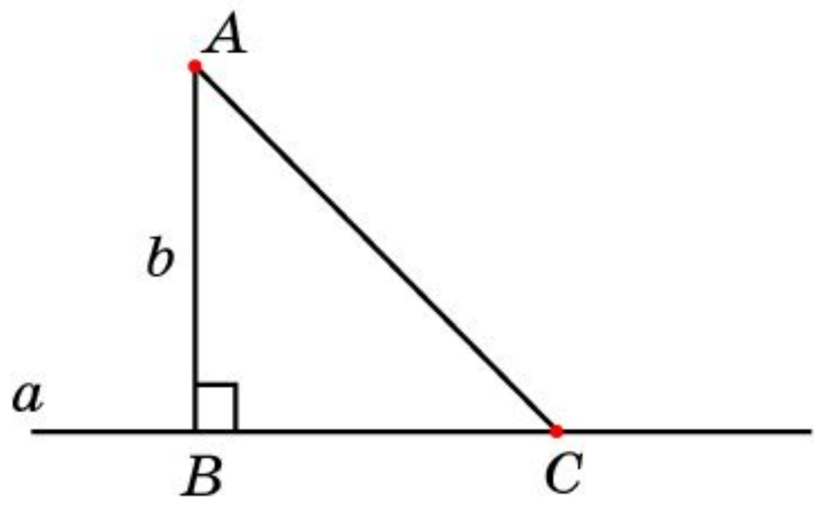
Точка C называется основанием наклонной.

Отрезок BC называется проекцией наклонной.



Теорема

Перпендикуляр, опущенный из данной точки на данную прямую, короче всякой наклонной, проведенной из этой точки к этой прямой.



Доказательство. Пусть точка A не принадлежит прямой a, AB – перпендикуляр, AC – наклонная. В прямоугольном треугольнике ABC сторона AB – катет, а AC – гипотенуза. Следовательно, $AB < AC$.

Вопрос 1

Что называется перпендикуляром, опущенным из данной точки на данную прямую?

Ответ: Перпендикуляром, опущенным из данной точки A на данную прямую a, называется отрезок AB, соединяющий точку A с точкой B прямой a, перпендикулярный прямой a.

Вопрос 2

Что называется наклонной, проведенной из данной точки к данной прямой?

Ответ: Наклонной, проведенной из точки A к прямой a, называется отрезок AC, соединяющей точку A с произвольной точкой C прямой a, отличной от основания перпендикуляра B.

Вопрос 3

Что называется расстоянием от точки до прямой?

Ответ: Длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную прямую.

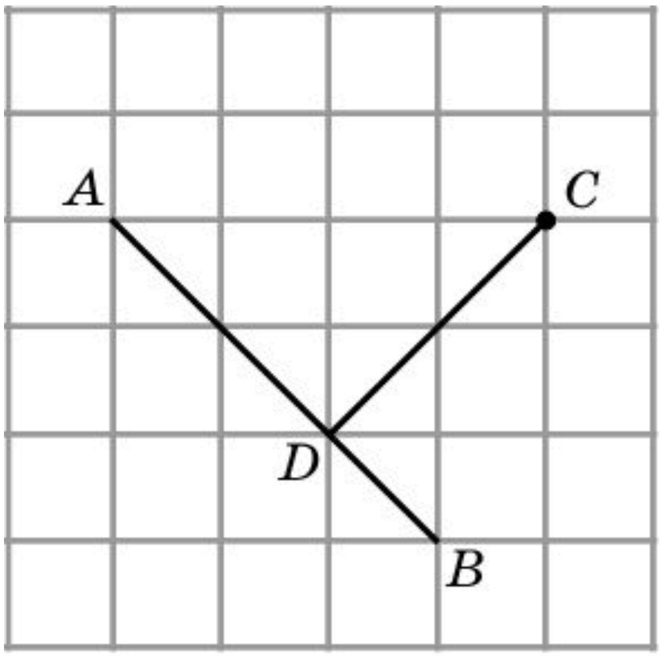
Вопрос 4

Что больше, перпендикуляр или наклонная, проведенные из одной точки к данной прямой?

Ответ: Наклонная.

Упражнение 1

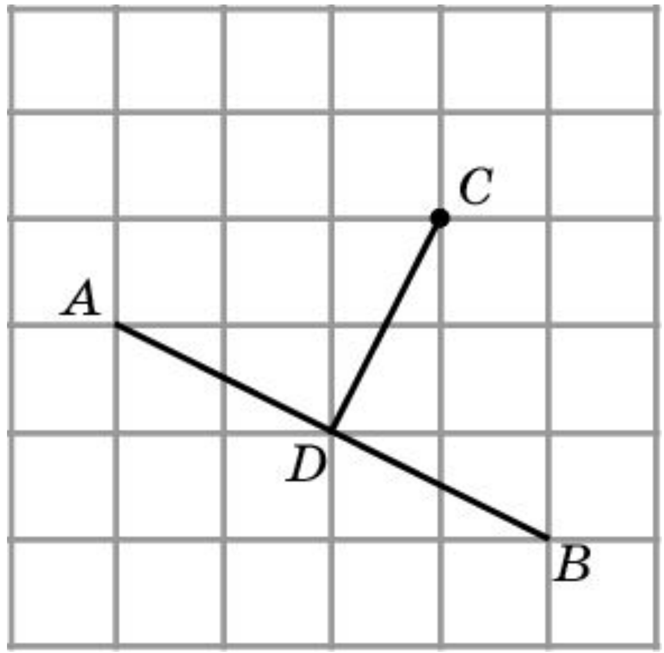
Из точки C опустите перпендикуляр CD на прямую AB.



Ответ.

Упражнение 2

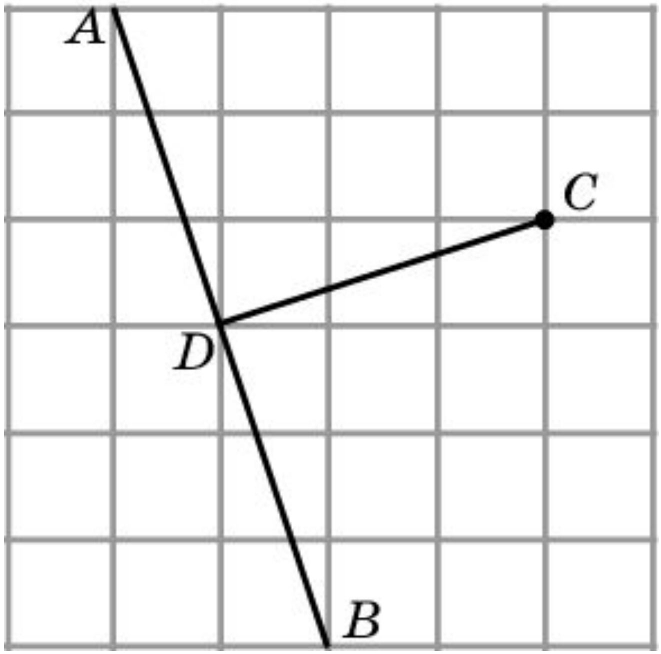
Из точки C опустите перпендикуляр CD на прямую AB.



Ответ.

Упражнение 3

Из точки C опустите перпендикуляр CD на прямую AB.



Ответ.

Упражнение 4

Сколько перпендикуляров можно опустить из данной точки на данную прямую?

Ответ: Один.

Упражнение 5

Сколько наклонных можно провести из данной точки к данной прямой?

Ответ: Бесконечно много.

Упражнение 6

Длина какого отрезка является расстоянием от вершины треугольника до его противоположной стороны?

Ответ: Высоты.

Упражнение 7

Могут ли неравные наклонные, проведенные из одной точки к одной прямой, иметь равные проекции?

Ответ: Нет.

Упражнение 8

Могут ли равные наклонные, проведенные из одной точки к одной прямой, иметь неравные проекции?

Ответ: Нет.

Упражнение 9

Чему равна проекция одной стороны равностороннего треугольника на прямую, содержащую другую его сторону?

Ответ: Половине стороны треугольника.

Упражнение 10

Чему равна проекция гипотенузы прямоугольного треугольника на прямую, содержащую его катет?

Ответ: Этому катету.

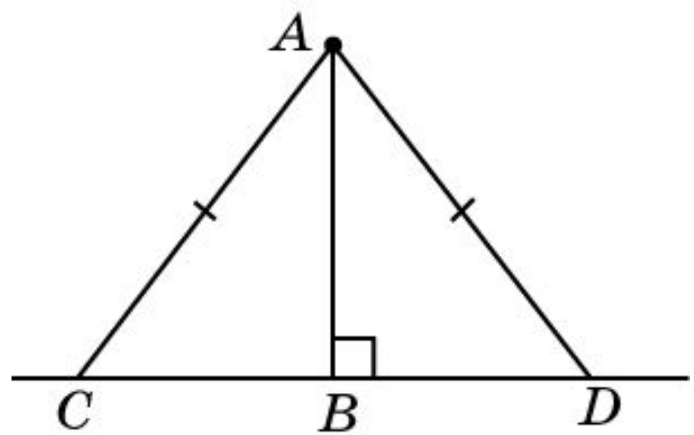
Упражнение 11

Чему равна проекция боковой стороны равнобедренного треугольника на прямую, содержащую его основание?

Ответ: Половине основания.

Упражнение 12

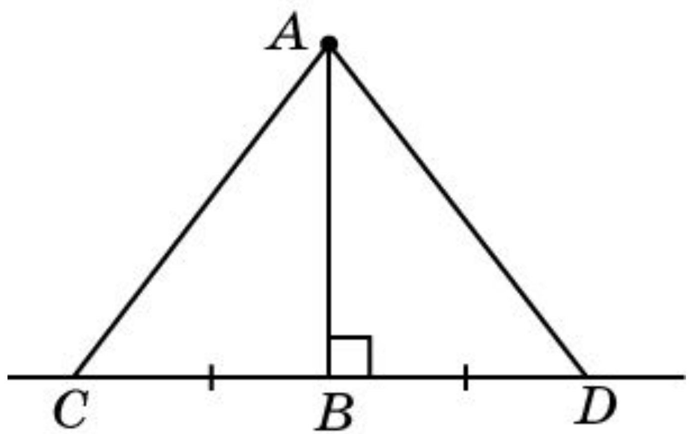
Докажите, что две равные наклонные, проведенные из данной точки к данной прямой, имеют равные проекции.



Доказательство. Пусть AC и AD – равные наклонные, проведенные к данной прямой, AB - перпендикуляр. Прямоугольные треугольники ABC и ABD равны по катету и гипотенузе. Следовательно, $BC = BD$, т.е. равны проекции наклонных.

Упражнение 13

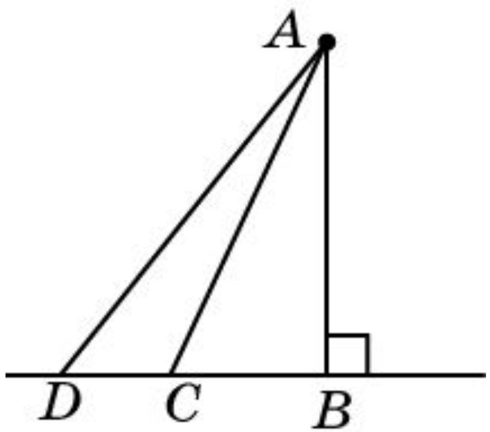
Докажите, что если две наклонные, проведенные из данной точки к данной прямой, имеют равные проекции, то они равны.



Доказательство. Пусть AC и AD –наклонные, проведенные к данной прямой, AB - перпендикуляр. Прямоугольные треугольники ABC и ABD равны по двум катетам. Следовательно, $AC = AD$, т.е. равны наклонные.

Упражнение 14

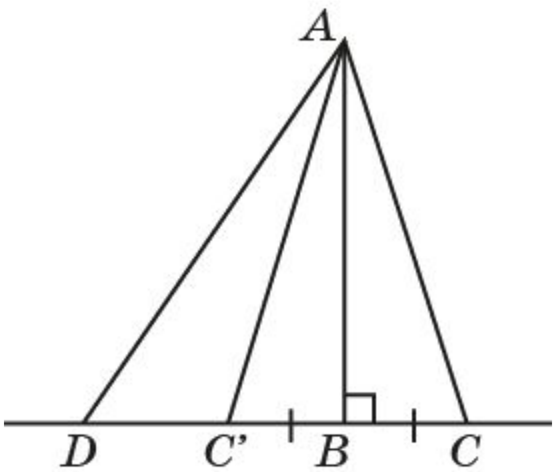
Докажите, что из двух наклонных, проведенных из данной точки к данной прямой, больше та, проекция которой больше.



Доказательство. Пусть AC и AD –наклонные, проведенные к данной прямой, AB – перпендикуляр, $BD > BC$ (точки C и D лежат по разные стороны от точки B). Тогда угол ACD – тупой, угол ADC – острый. Так как против большего угла треугольника лежит большая сторона, то $AD > AC$.

Упражнение 14 (продолжение)

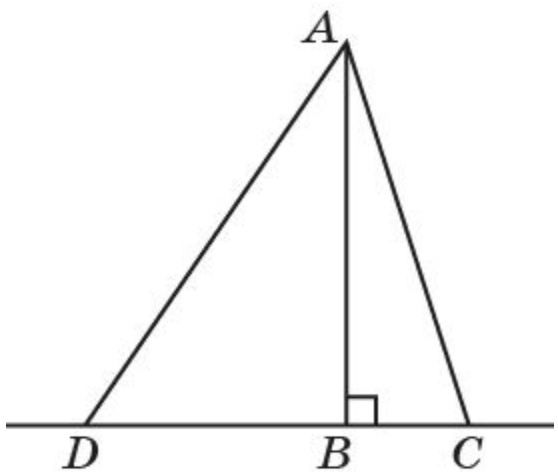
Рассмотрим случай, когда точки C и D лежат по разные стороны от точки B.)



Доказательство. Отложим $BC' = BC$ так, чтобы D и C' лежали по одну сторону от точки B. Треугольники ABC и ABC' равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $AC = AC'$. По доказанному, $AC' < AD$. Значит, $AC < AD$.

Упражнение 15

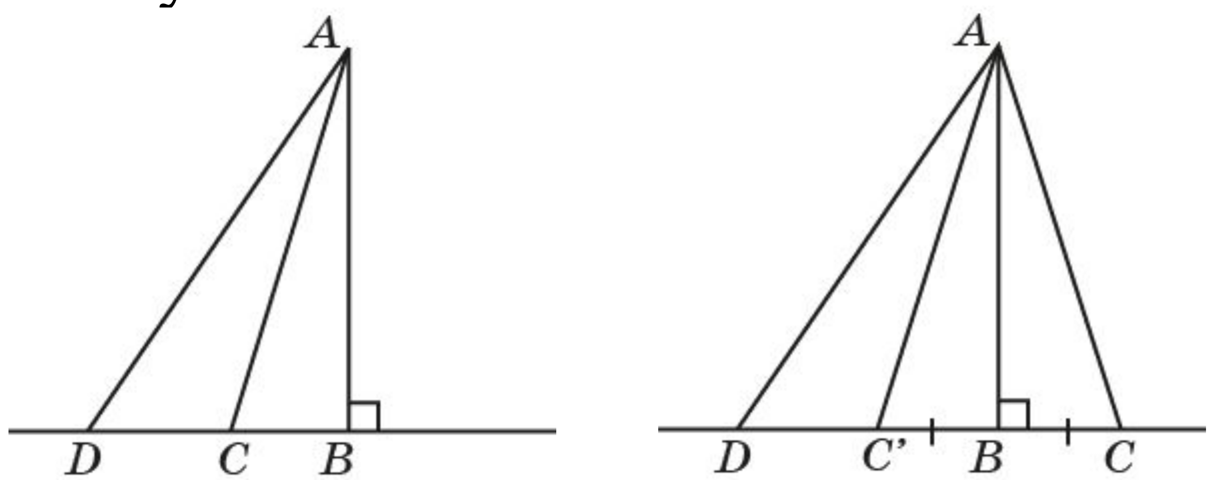
Докажите, что из двух наклонных, проведенных из данной точки к данной прямой, проекция большей наклонной больше проекции меньшей наклонной.



Доказательство. Пусть AC и AD – наклонные, $AD > AC$, BC, BD – их проекции. Если бы BC было больше BD, то AC было бы больше AD. Если бы BC равнялось AD, то и AC равнялось бы AD. Следовательно, остается единственная возможность $AD > AC$.

Упражнение 16

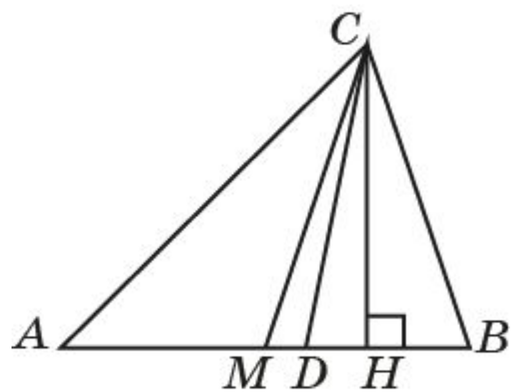
Докажите, что если наклонная AD больше наклонной BC, проведенной к той же прямой, AB – перпендикуляр, то угол DAB больше угла CAB.



Доказательство. По доказанному ранее $BD > BC$. Если точки C и D лежат по одну сторону от точки B, то луч AC лежит внутри угла DAB. Следовательно, $\angle DAB > \angle CAB$. Если точки C и D лежат по разные стороны от точки B, то отложим отрезок $BC' = BC$ так, чтобы точка C' лежала между точками B и D. Тогда $\angle DAB > \angle C'AB = \angle CAB$.

Упражнение 17

Докажите, что биссектриса треугольника лежит между его медианой и высотой, проведенных из той же вершины.



Доказательство. Если треугольник ABC равнобедренный ($AC = BC$), то биссектриса, медиана и высота, проведенные из вершины C, совпадают. Если $AC > BC$, то, по доказанному ранее, $AD > DB$ и $\angle ACH > \angle BCH$. Следовательно, биссектриса CD лежит между медианой CM и высотой CH.

Упражнение 18

1. Может ли биссектриса треугольника быть больше медианы, проведенной из той же вершины?

2. Может ли медиана треугольника быть в 10 раз больше биссектрисы, проведенной из той же вершины?

Ответ. 1. Нет.

2. Да.