

# АКСИОМЫ СТЕРЕОМЕТРИИ

# ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Расстояние, точка, прямая, **плоскость**,  
Множество.

$\alpha, \beta, \chi, \dots$  обозначения плоскостей.

$M$  – все точки пространства

# АКСИОМЫ

## Аксиома 1.

**В пространстве существуют плоскости.**

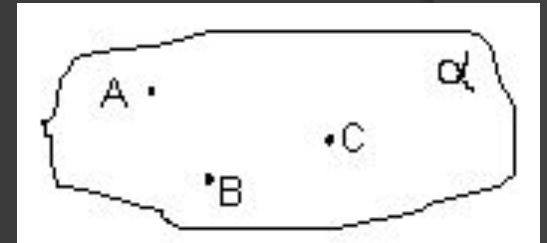
**Через каждые три точки пространства проходит плоскость.**

1)  $\exists \alpha \subset M$  и  $\exists \beta \subset M$ ;

2)  $\forall \{A, B, C\} \subset M \exists \alpha \mid \{A, B, C\}$

$\subset \alpha$

Вопросы



1) Зачем первая часть аксиомы при наличии второй?

Каким утверждением ее можно было заменить?

2) Является ли множество  $M$  конечным или бесконечным?

3) Верно ли, что через каждые одну или две точки пространства проходит плоскость?

4) Докажите, что в пространстве через каждые две точки проходит прямая.

Следует ли отсюда, что прямые в пространстве можно обозначать  $(AB)$ ,  $(CD)$ , ..., как в планиметрии?

## Аксиома 2.

Если две различные плоскости имеют общую точку, то их пересечением является прямая.

$$C \in \alpha, C \in \beta \Rightarrow \alpha \cap \beta =$$

$c$

Почему  $C \in c$ ?

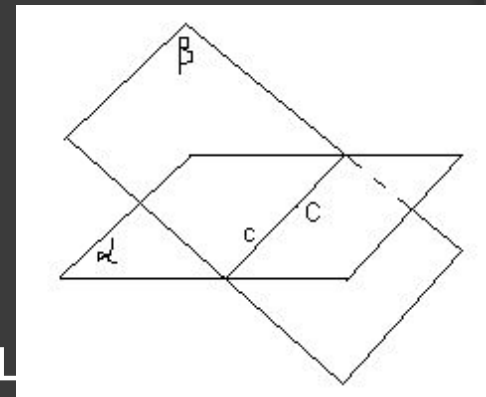
### Определение.

Две различные плоскости, имеющие общую точку, называются **пересекающимися**.

1) Докажите, что  $\forall \alpha$

$\exists X \notin \alpha$

2) Докажите существование пересекающихся плоскостей



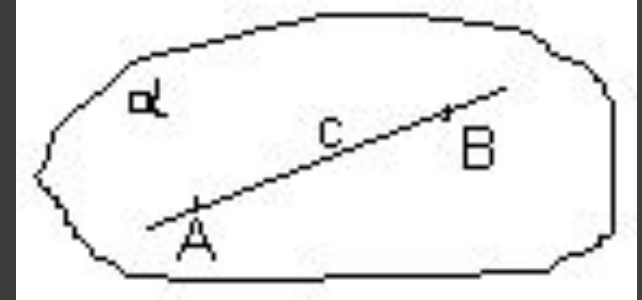
### Определение.

Сечением фигуры F плоскостью  $\alpha$  называется их пересечение.

### Аксиома 3.

**Если прямая проходит через две точки, лежащие в данной плоскости, то она лежит в этой плоскости.**

$$A \in \alpha, B \in \alpha \text{ и } A \in c, B \in c \Rightarrow c \subset \alpha$$



Сколько общих точек могут иметь плоскость и прямая, не лежащая в ней?

### Определение.

Прямая и плоскость, имеющие единственную общую точку, называются **пересекающимися**.

Докажите их существование

## Аксиома 4.

Расстояние между двумя точками пространства не зависит от того, на какой из плоскостей, содержащих эти точки оно измерено.

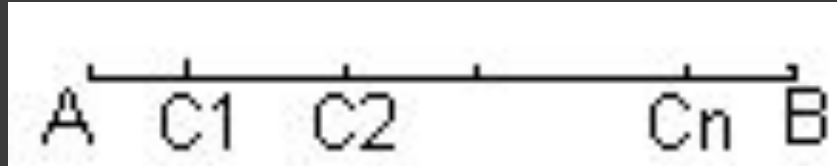
$$\forall A \in M, B \in M$$

$$\exists ! |AB|$$

Почему потребовалась такая аксиома?

## Расстояние

$F: \{\text{отрезков}\} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , удовлетворяющую следующим свойствам



1.  $\exists [AB] \mid F([AB]) = 1.$

2.  $[AB] = [CD] \Rightarrow F([AB]) = F([CD]).$

3. Если точки  $C_1, C_2, \dots, C_n$  таковы, что взятые в этом порядке, они разбивают  $[AB]$  на отрезки, не имеющие общих внутренних точек,  
то  $F([AB]) = F([AC_1]) + F([C_1C_2]) + \dots + F([C_nB]).$

Как называется такой вид определения?

1) Из одной точки одновременно разных направлениях вылетели три вороны со скоростями 1, 2 и 3 метра в секунду.

В какой момент после вылета они окажутся в одной плоскости?

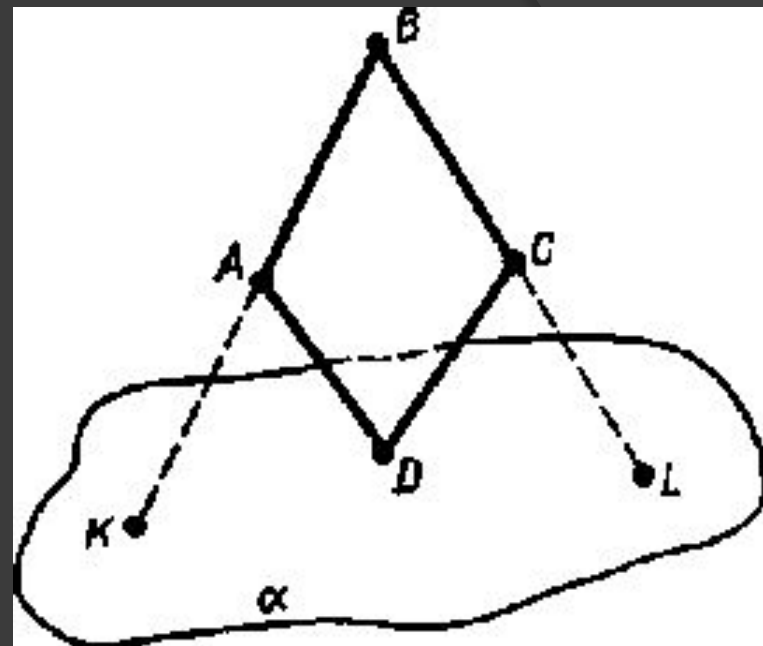
2) Как на гладком столе проверить качество изготовления линейки?

На чем основан ваш способ проверки?

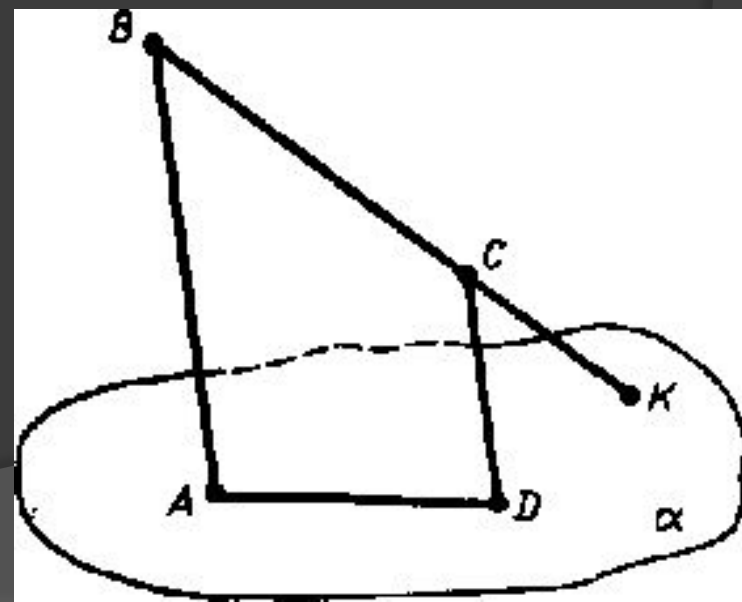
Как решить обратную задачу?



Ученик нарисовал четырехугольник  $ABCD$   
Точка  $D$  лежит в плоскости  $\alpha$   
Прямая  $AB$  пересекает плоскость  $\alpha$  в точке  $K$ ,  
прямая  $BC$  пересекает плоскость  $\alpha$  в точке  $L$ .  
Есть ли ошибка на рисунке?



Ученик нарисовал четырехугольник  $ABCD$   
Прямая  $AD$  лежит в плоскости  $\alpha$ ,  
прямая  $BC$  пересекает плоскость  $\alpha$   
в точке  $K$ .  
Есть ли ошибка на рисунке?



## Аксиома 5

**Каждая плоскость разбивает пространство на два полупространства.**

Концы ломаной, состоящей из двух отрезков, лежат по разные стороны от данной плоскости. Докажите, что она пересекает эту плоскость. Обобщите это утверждение

Имеется  $n$  плоскостей.

Имеют ли они все общую точку, если:

- а) каждые две из них имеют общую точку;
- б) каждые три из них имеют общую точку?

1) Дано:  $\alpha \cap \beta = c$ ;  $a \subset \alpha$ ;  $a \cap c = K$ .

Доказать:  $a \cap \beta = K$ .

2) Запишите и докажите обратное утверждение

3) Докажите, что три попарно пересекающиеся прямые лежат в одной плоскости.

Дано:  $a \cap b = C$ ;  $a \cap c = B$ ;  $b \cap c = A$ .

Доказать:  $\exists \alpha \mid \{a, b, c\} \subset \alpha$