СПРАВОЧНИК
по алгебре и началам анализа
10-11 классы

2009 г

Содержание.

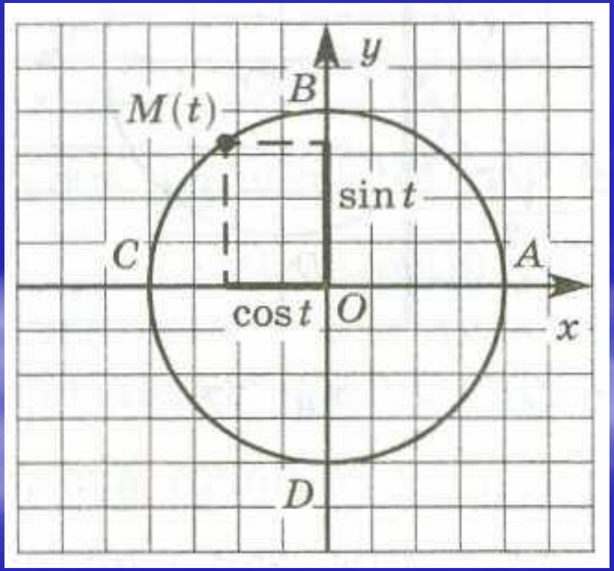
Содержание

Тригонометрия.
Числовая окружность

Дана единичная окружность, на ней отмечена начальная точка А — правый конец горизонтального диаметра. Поставим в соответствие каждому действительному числу t точку окружности по следующему правилу:
1) Если $t > 0$, то, двигаясь из точки A в направлении против часовой стрелки (положительное направление обхода окружности), опишем по окружности путь AM длиной t. Точка M и будет искомой точкой M(t).
2) Если $t < 0$, то, двигаясь из точки A в направлении по часовой стрелке (отрицательное направление обхода окружности), опишем по окружности путь AM длиной $|t|$. Точка M и будет искомой точкой M(t).
3) Числу $t = 0$ поставим в соответствие точку A; A = A(O).
Единичную окружность с установленным соответствием (между действительными числами и точками окружности) будем называть числовой окружностью.

Синус и косинус

Если точка M числовой окружности соответствует числу t, то абсциссу точки M называют косинусом числа t и обозначают cos t, а ординату точки M называют синусом числа t и обозначают sin t.



если M(t)=M(x; y), то

x = cos t

y = sin t

Тангенс и котангенс

Отношение синуса числа t к косинусу того же числа называют тангенсом числа t и обозначают tg t.

Отношение косинуса числа t косинусу того же числа называют котангенсом числа t и обозначают ctg t.

$$tg\, t = \frac{\sin t}{\cos t}, \quad t \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in Z;$$

$$ctg\, t = \frac{\cos t}{\sin t}, \quad t \neq \pi k, \quad k \in Z.$$

Тригонометрические функции числового аргумента.

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1;$$

$$\mathrm{tg}\, t = \frac{\sin t}{\cos t}, \quad t \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in Z;$$

$$\mathrm{ctg}\, t = \frac{\cos t}{\sin t}, \quad t \neq \pi k, \quad k \in Z;$$

$$\mathrm{tg}\, t \cdot \mathrm{ctg}\, t = 1, \quad t \neq \frac{\pi k}{2}, \quad k \in Z$$

$$1 + \mathrm{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}, \quad t \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in Z;$$

$$1 + \mathrm{ctg}^2 t = \frac{1}{\sin^2 t}, \quad t \neq \pi k, \quad k \in Z$$

Тригонометрические функции углового аргумента

$$1^o = \frac{\pi}{180}\ рад.$$

$$1\ рад = \frac{180^o}{\pi}.$$

Угол в один радиан - это угол, опирающийся на дугу длиной 1, т.е. на дугу, длина которой равна радиусу окружности.

$$1\ рад \approx 57{,}3^o$$

Формулы приведения.

Функция	Аргумент						
sin t	*cos α*	*cos α*	*sin α*	*-sin α*	*- cos α*	*- cos α*	*- cos α*
cos t	*sin α*	*-sin α*	*-cos α*	*ctg t*	*-sin α*	*sin α*	*cos α*
tg t	*ctg α*	*-ctg α*	*-tg α*	*tg α*	*ctg α*	*-ctg α*	*-tg α*
ctg t	*tg α*	*-tg α*	*-ctg α*	*ctg α*	*tg α*	*-tg α*	*-ctg α*

Таблица значений тригонометрических функций некоторых углов.

Функция	Аргумент						
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$tg\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-
$ctg\,\alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-	0

Формулы преобразования тригонометрических функций

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y;$$

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y;$$

$$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y;$$

$$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y;$$

$$tg(x+y)=\frac{tgx+tgy}{1-tgx\,tgy};$$

$$tg(x-y)=\frac{tgx-tgy}{1+tgx\,tgy}$$

Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму.

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$$

Формулы двойного угла

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\mathrm{tg}\,2x = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\,\alpha};\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z.$$

Формулы понижения степени

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x$$

Формулы половинного угла

$$\sin\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$

$$\cos\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

$$tg\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{1-\cos x}{\sin x}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}},\ x\neq\pi k,\ k\in Z.$$

Универсальная подстановка

$$\cos x = \frac{1 - tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\sin x = \frac{2tgx}{1 + tg^2\left(\frac{x}{2}\right)},\ x \neq \pi + 2\pi k, k \in Z$$

Преобразование сумм тригонометрических функций в произведения.

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$tg\,x + tg\,y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}$$

$$ctg\,x + ctg\,y = \frac{\sin(y+x)}{\sin x\sin y}$$

$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$tg\,x - tg\,y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y}$$

$$ctg\,x - ctg\,y = \frac{\sin(y-x)}{\sin x\sin y}$$

Преобразование выражения
A sin x + B cos x к виду C sin (x+t)
Формула дополнительного угла

$$A\sin x + B\cos x = C\sin(x+t),$$

$$\text{где} \begin{cases} \sin t = \dfrac{B}{C}, \\ \cos t = \dfrac{A}{C}, \end{cases} \quad C = \sqrt{A^2 + B^2};$$

Тригонометрические функции числового аргумента.

Арксинус.

Арккосинус. Арктангенс. Арккотангенс

Арксинусом числа а называется такое число из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$*, синус которого равен а.*

Арккосинусом числа а называется такое число из отрезка $[0;\pi]$*, косинус которого равен а.*

Арктангенсом числа а называется такое число из интервала $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$*, тангенс которого равен а.*

Арккотангенсом числа а называется такое число из интервала $(0;\pi)$*, котангенс которого равен а.*

Решение простейших тригонометрических уравнений.

Уравнение f (x) = a, где a данное число, а f(x) – одна из основных тригонометрических функций, называют простейшим тригонометрическим уравнением.

$$\sin x = a,\ |a| \le 1,\ x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in Z;$$

$$\cos x = a,\ |a| \le 1,\ x = \pm \arccos a + 2\pi n,\ n \in Z;$$

$$tg\, x = a,\ x = \mathrm{arc}\, tgx + \pi n,\ n \in Z;$$

$$ctg\, x = a,\ x = \mathrm{arc}\, ctgx + \pi n,\ n \in Z$$

Однородные тригонометрические уравнения

Уравнение вида $a \sin x + b \cos x = 0$ *называют однородным тригонометрическим уравнением первой степени;*

уравнение вида $a \sin^2 f(x) + b \sin f(x) \cos f(x) + c \cos^2 f(x) = 0$ *называют однородным тригонометрическим уравнением второй степени;*

1.*Уравнения вида* $a\,tg\,x + b\,ctg\,x + c = 0$ *приводится к квадратному уравнению одной тригонометрической функции путем замены*

$$ctg\,x = \frac{1}{tg\,x}.$$

Решение однородных тригонометрических уравнений.

2.*Уравнение вида* $a\sin x + b\cos x = 0 \quad (a \neq 0, b \neq 0)$

решается делением обеих его частей на $\cos x$, $\cos x \neq 0$.

В результате получается уравнение вида

$a\,\mathrm{tg}\,x + b = 0$.

3.*Уравнение вида* $a\sin^2 f(x) + b\sin f(x)\cos f(x) + c\cos^2 f(x) = 0$

$(a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0)$

решается делением обеих его частей на $\cos^2 f(x)$, $\cos^2 f(x) \neq 0$.

В результате получается уравнение вида $a\,\mathrm{tg}^2 f(x) + b\,\mathrm{tg}\, f(x) + c = 0$.

4.*Если* $a = 0$, *то уравнение принимает вид*

$b\sin f(x)\cos f(x) + c\cos^2 f(x) = 0$,

решается разложением левой части на множители :

$\cos f(x)(b\sin f(x) + c\cos f(x)) = 0$.

Решение тригонометрических уравнений.

Введение вспомогательного угла.

$A\sin x + B\cos x = C$, *где* A, B, C – *данные числа и* $AB \neq 0$.

Так как

$A^2 + B^2 > 0$, *то разделив обе части уравнения на число*

$\sqrt{A^2 + B^2} \neq 0$, *получим* $a\sin x + b\cos x = c$, *где*

$$a = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}},\ b = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}},\ c = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Так как $a^2 + b^2 = 1$, *то можно подобрать такой угол* α, *что*

$a = \sin\alpha$ *и* $b = \cos\alpha$;

$\cos x\cos\alpha + \sin x\sin\alpha = c$ *или* $\cos(x - \alpha) = c$.

Если подобрать такой угол β, *что* $a = \cos\beta$ *и* $b = \sin\beta$, *то уравнение можно записать в виде* $\sin(x + \beta) = c$.

Решение тригонометрических неравенств вида sin x > a, sin x < a.

1.Неравенства, содержащие переменную только под знаком тригонометрической функции, называют тригонометрическими.

2.При решении тригонометрических неравенств используют свойство монотонности тригонометрических функций, а также промежутки их знакопостоянства.

3.Для решения простейших тригонометрических неравенств вида sin x > a, (sin x < a.) используют единичную окружность или график функции y = sin x.

4. Важным моментом является знание ,что

$$\sin x = 0,\ если\ x = \pi n,\ n \in Z;$$

$$\sin x = -1,\ если\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z;$$

$$\sin x = 1,\ если\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z;$$

$$\sin x > 0,\ если\ 2\pi n < x < \pi + 2\pi n,\ n \in Z;$$

$$\sin x < 0,\ если\ -\pi + 2\pi n < x < 2\pi n,\ n \in Z;$$

Решение тригонометрических неравенств вида cos x > a, cos x < a.

1.Для решения простейших тригонометрических неравенств вида cos x > a, (cos x < a.) используют единичную окружность или график функции y = cos x.

2. Важным моментом является знание ,что

$$\cos x = 0,\ если\ \ x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z;$$

$$\cos x = -1,\ если\ \ x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z;$$

$$\cos x = 1,\ если\ \ x = 2\pi n,\ n \in Z;$$

$$\cos x > 0,\ если\ 2\pi n - \frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z;$$

$$\cos x < 0,\ если\ 2\pi n + \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z;$$

Решение тригонометрических неравенств вида tg x > a, tg x < a.

1.Для решения простейших тригонометрических неравенств вида tg x > a, (tg x < a.) используют единичную окружность или график функции y = tg x.

4. Важным моментом является знание ,что

$$tg\,x > 0,\ если\ \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z;$$

$$tg\,x < 0,\ если\ -\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \pi n,\ n \in Z;$$

$$Тангенс\ не\ существует,\ если\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$$

Решение уравнений и неравенств

1. *Для любого четного числа* $2m \quad (m \in N)$ *уравнение* $\sqrt[2m]{f(x)} = g(x)$

равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) = (g(x))^{2m} \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

2. *Для любого четного числа* $2m,\ m \in N$ *уравнение* $\sqrt[2m]{f(x)} = \sqrt[2m]{g(x)}$

равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$$

3. *Уравнение* $f(x)\cdot\varphi(x) = 0$ *равносильно системе*

$$\begin{cases} f(x) = 0 \\ x \in D(\varphi), \end{cases}$$

где $D(\varphi)$ – *область существования функции* $\varphi(x)$.

Решение уравнений и неравенств

4. Множество решений уравнения $f_1(x)\cdot f_2(x)=0$

есть объединение множеств решений двух систем

$$\begin{cases} f_1(x)=0 \\ x\in D(f_2) \end{cases} \quad и \quad \begin{cases} f_2(x)=0 \\ x\in D(f_1) \end{cases}$$

где $D(f_1)$ – область существования функции $f_1(x)$,

а $D(f_2)$ – область существования функции $f_2(x)$.

5. Уравнение $\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x)=0 \\ g(x)\neq 0. \end{cases}$$

Замечание: иногда при решении уравнения приходится применять несколько преобразованний, приводящих к системе, равносильной исходному уравнению.

Решение неравенств с помощью систем.

1. *Для любого четного числа* $2m$ $(m \in N)$ *неравенство* $\sqrt[2m]{f(x)} < g(x)$ *равносильно системе*

$$\begin{cases} f(x) < (g(x))^{2m} \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

2. *Для любого четного числа* $2m$, $m \in N$ *множество решений неравенства* $\sqrt[2m]{f(x)} > \sqrt[2m]{g(x)}$ *есть объединение множеств решений систем*

$$\begin{cases} f(x) > (g(x))^{2m} \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \quad и \quad \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0. \end{cases}$$

3. *Для любого четного числа* $2m (m \in N)$ *неравенство* $\sqrt[2m]{f(x)} < \sqrt[2m]{g(x)}$ *равносильно двойному неравенству*

$0 \leq f(x) < g(x)$

4. *Уравнение* $f(x) + \varphi(x) - \varphi(x) > 0$ *равносильно системе*

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ x \in D(\varphi), \end{cases}$$

где $D(\varphi)$ – *область существования функции* $\varphi(x)$.

Решение неравенств с помощью систем.

4. *Множество решений каждого из неравенств*

$$f_1(x)\cdot f_2(x)>0 \qquad \frac{f(x)}{g(x)}>0$$

есть объединение множеств решений двух систем

$$\begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \end{cases} \quad и \quad \begin{cases} f(x)<0 \\ g(x)<0. \end{cases}$$

5. *Множество решений каждого из неравенств*

$$f_1(x)\cdot f_2(x)<0 \qquad \frac{f(x)}{g(x)}<0$$

есть объединение множеств решений двух систем

$$\begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)<0 \end{cases} \quad и \quad \begin{cases} f(x)<0 \\ g(x)>0. \end{cases}$$