

Алгебра высказываний

Лекция 4

Многочлены Жегалкина

Сложение по модулю 2

Сложение по модулю 2 задается таблицей истинности

A	B	$A+B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Утверждение 1

$$x + y = y + x;$$

$$x + (y + z) = (x + y) + z;$$

$$x(y + z) = xy + xz;$$

$$x + x = 0;$$

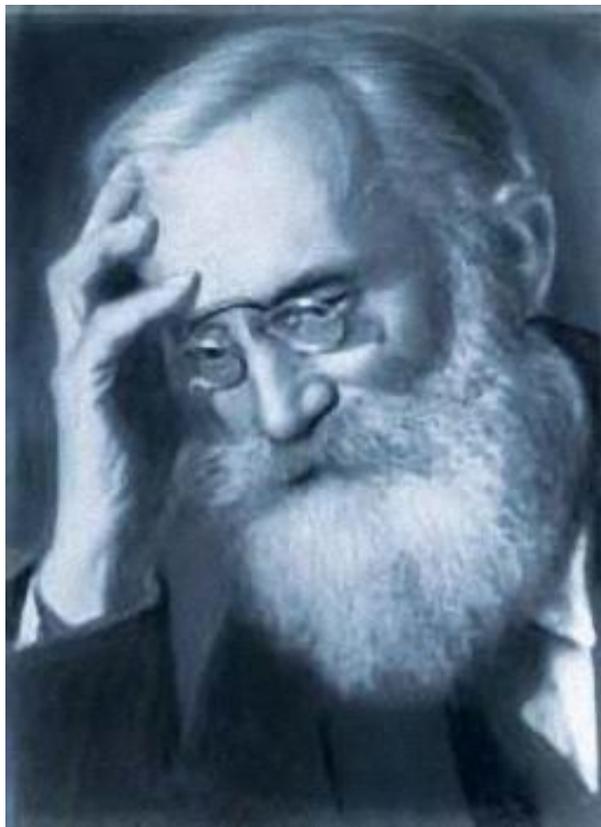
$$\bar{x} = x + 1.$$

Определение 1

Булева функция, записанная с помощью операций конъюнкция, сложение по модулю два и единицы, называется многочленом (полиномом) Жегалкина.

Приведения булевой функции к многочлену Жегалкина (способ 1)

- 1) Приводим функцию к ДНФ.
- 2) Избавляемся от всех дизъюнкций с помощью законов Моргана.
- 3) Избавляемся от всех отрицаний.
- 4) Раскрываем все скобки.
- 5) Упрощаем полученное выражение.



Жегалкин И.И. (22.07. 1869-28.03.1947)-
российский математик и логик

Пример

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \overline{x} \overline{y} z \vee \overline{x} y \overline{z} = \overline{\overline{\overline{x} \overline{y} z} \cdot \overline{\overline{\overline{x} y \overline{z}}}} = \\ &= (x(y+1)z+1)((x+1)y(z+1)+1)+1 = \\ &= (xyz+xz+1)((xz+x+z+1)y+1)+1 = \\ &= (xyz+xz+1)(xyz+xy+yz+y+1)+1 = \\ &= xyz+xyz+xyz+xyz+xyz+ \\ &+ xyz+xyz+xyz+xyz+xz+xyz+xy+yz+y+1+1 = \\ &= xz+xy+yz+y \end{aligned}$$

Приведения булевой функции к многочлену Жегалкина (способ 2)

- 1) Приводим функцию к СДНФ.
- 2) Заменяем дизъюнкцию на сложение по модулю 2
- 3) Избавляемся от всех отрицаний.
- 4) Раскрываем все скобки.
- 5) Упрощаем полученное выражение.

Пример

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= x\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} = x\bar{y}z + \bar{x}y\bar{z} = \\ &= x(y+1)z + (x+1)y(z+1) = \\ &= xyz + xz + xyz + yz + xy + y = \\ &= xz + xy + yz + y \end{aligned}$$

Приведения булевой функции к многочлену Жегалкина (способ 3)

Столбец значений булевой функции выписывается в строку.

Под ней формируется строка, значения которой являются суммой по модулю 2 двух ближайших значений предыдущей строки.

Остальные строки формируются по тому же принципу.

Последняя строка будет состоять из единственного значения, а вся таблица будет иметь вид равнобедренного треугольника.

Многочлен Жегалкина составляется из тех слагаемых, в чьих строках имеется единица на левом боковом ребре треугольника, а каждое слагаемое является произведением тех переменных, в чьих позициях в данной строке таблицы истинности стоят единицы.

Пример

x	y	z	$x\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z}$	
0	0	0	0	00100100
0	0	1	0	0110110
0	1	0	1	101101
0	1	1	0	11011
1	0	0	0	0110
1	0	1	1	101
1	1	0	0	11
1	1	1	0	0

$$f(x, y, z) = xz + xy + yz + y$$

Приведите к многочлену
Жегалкина функцию

$$f(x, y, z) = (x \rightarrow yz)(\bar{y} \leftrightarrow x\bar{z})$$

$$f(x, y, z) = xyz + xy + y$$