

# ***Алгебра высказываний***

## ***Решение логических задач***

**Автор:**

Сергеев  
Евгений Викторович  
МОУ СОШ №4 г. Миньяра  
Челябинской области  
sergeev73@mail.ru  
<http://shk4-minyara.ucoz.ru>

**Задача 1:** Составьте сложное высказывание в словесной форме из простых, заданных математическим формулировкам:

■ **Высказывание А:**

«Учащийся Иванов хорошо успевает по английскому языку»

■ **Высказывание В:**

«Учащийся Иванов любит работать на компьютере».

$$\neg(A \wedge B)$$

«не (учащийся Иванов хорошо успевает по английскому языку и любит работать на компьютере)» =  
«Учащийся Иванов не успевает по английскому языку и не любит работать на компьютере»

## Задача 2:

Пусть  $p$  и  $q$  обозначают высказывания:

$p =$  «Я учусь в школе»

$q =$  «Я люблю информатику»

составьте и запишите следующие высказывания:

~~$\neg p \wedge q$~~

~~$p \wedge \neg q$~~

*«Я не учусь в школе»*

*«не(Я не учусь в школе)»  $\equiv$  «Я учусь в школе»*

*«Я учусь в школе и люблю информатику»*

*«Я учусь в школе и не люблю информатику»*

*«Я учусь в школе или люблю информатику»*

*«Я не учусь в школе или люблю информатику»*

*«Я не учусь в школе или я не люблю информатику»*

*«Я люблю информатику, потому, что учусь в*

### Задача 3:

Обозначьте элементарные высказывания буквами и запишите высказывания на формальном языке алгебры высказываний

1. 45 кратно 3 и 42 кратно 3
  2. 45 кратно 3 и 12 не кратно 3
  3.  $2 \leq 5$
  4. если 212 делится на 3 и на 4, то 212 делится на 12
  5. 212 – трехзначное число, которое делится на 3 и на 4
- 
1.  $A \wedge B$ , где  $A = \langle\langle 45 \text{ кратно } 3 \rangle\rangle$ ,  $B = \langle\langle 42 \text{ кратно } 3 \rangle\rangle$
  2.  $A \wedge \neg B$ , где  $A = \langle\langle 45 \text{ кратно } 3 \rangle\rangle$ ,  $B = \langle\langle 12 \text{ кратно } 3 \rangle\rangle$
  3.  $A \vee B$ , где  $A = \langle\langle 2 < 5 \rangle\rangle$ ,  $B = \langle\langle 2 = 5 \rangle\rangle$
  4.  $(A \wedge B) \rightarrow C$ , где  $A = \langle\langle 212 \text{ делится на } 3 \rangle\rangle$ ,  
 $B = \langle\langle 212 \text{ делится на } 4 \rangle\rangle$  и  $C = \langle\langle 212 \text{ делится на } 12 \rangle\rangle$
  5.  $A \wedge B \wedge C$ , где  $A = \langle\langle 212 \text{ – трехзначное число} \rangle\rangle$ ,  $B = \langle\langle 212 \text{ делится на } 3 \rangle\rangle$  и  $C = \langle\langle 212 \text{ делится на } 4 \rangle\rangle$

## Задача 4:

Составьте таблицу истинности для функции  $A \vee \neg B$

A	B	$\neg B$	$A \vee \neg B$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1

Задача 5:

Какие из следующих импликаций истинны

- |           |   |               |
|-----------|---|---------------|
| <b>1.</b> | <b>если <math>2 \times 2 = 4</math>, то <math>2 &lt; 3</math></b> | <b>истина</b> |
| <b>2.</b> | <b>если <math>2 \times 2 = 4</math>, то <math>2 &gt; 3</math></b> | <b>ложь</b>   |
| <b>3.</b> | <b>если <math>2 \times 2 = 5</math>, то <math>2 &lt; 3</math></b> | <b>истина</b> |
| <b>4.</b> | <b>если <math>2 \times 2 = 5</math>, то <math>2 &gt; 3</math></b> | <b>истина</b> |

Задача 6:

Какие из следующих высказываний  
противоречивы

- |           |   |               |
|-----------|---|---------------|
| <b>1.</b> | <b><math>a = 1, a \wedge b = 0</math></b> | <b>истина</b> |
| <b>2.</b> | <b><math>a = 1, a \vee b = 0</math></b>   | <b>ложь</b>   |
| <b>3.</b> | <b><math>a = 1, a \wedge b = 1</math></b> | <b>истина</b> |
| <b>4.</b> | <b><math>a = 1, a \vee b = 1</math></b>   | <b>истина</b> |
| <b>5.</b> | <b><math>a = 0, a \wedge b = 1</math></b> | <b>ложь</b>   |
| <b>6.</b> | <b><math>a = 0, a \vee b = 1</math></b>   | <b>истина</b> |
| <b>7.</b> | <b><math>a = 0, a \wedge b = 0</math></b> | <b>истина</b> |
| <b>8.</b> | <b><math>a = 0, a \vee b = 0</math></b>   | <b>истина</b> |

## Задача 7:

Пусть:

$a = \langle\langle 7 - \text{простое} \rangle\rangle$ ,  $b = \langle\langle 7 - \text{составное} \rangle\rangle$ ,

$c = \langle\langle 8 - \text{простое} \rangle\rangle$  и  $d = \langle\langle 8 - \text{составное} \rangle\rangle$

Определите истинность высказываний

9.  $a \wedge c$  ложь

10.  $a \vee b \wedge d$  истина

13.  $b \vee c \wedge c$  ложь

18.  $c \vee d \wedge d$  ложь

## Задача 8:

Какие из следующих высказываний истинны

- |     |   |        |
|-----|---|--------|
| 8.  | $p \rightarrow \neg p \wedge (p \Leftrightarrow \neg p)$          | ИСТИНА |
| 9.  | $(p \vee \neg p) \vee \neg p$                                     | ИСТИНА |
| 10. | $p \rightarrow \neg p \wedge \neg p (\neg p \rightarrow p \wedge$ | ИСТИНА |
| 4.  | $p) \Leftrightarrow \neg p$                                       | ЛОЖЬ   |
| 15. | $p \wedge \neg (p \Leftrightarrow \neg p)$                        | ИСТИНА |
| 16. | $p \rightarrow p \rightarrow p$                                   | ИСТИНА |
| 13. | $(p \vee \neg p) \rightarrow p$                                   | ИСТИНА |
| 14. | $(p \vee p) \rightarrow (p \wedge p)$                             |        |

## Задача 9:

Даны значения:  $x = 0$ ,  $y = 1$ ,  $z = 1$ .

Определите логические значения высказываний

1.  $x \wedge (y \wedge z)$

2.  $(x \wedge y) \wedge z$

3.  $x \rightarrow (y \rightarrow z)$

4.  $x \wedge y \rightarrow z$

5.  $(x \wedge y) \Leftrightarrow (z \vee \neg y)$

6.  $((x \vee y) \wedge z) \Leftrightarrow ((x \wedge z) \vee (y \wedge z))$

Задача 9.1:

Даны значения:  $x = 0, y = 1, z = 1$ .

Определите логические значения высказываний

$$x \wedge (y \wedge z)$$

$$x \wedge (1 \wedge 1)$$

$$x \wedge 1$$

$$0 \wedge 1$$

$$0 \text{ (ЛОЖЬ)}$$

Задача 9.2:

Даны значения:  $x = 0$ ,  $y = 1$ ,  $z = 1$ .

Определите логические значения высказываний

$$(x \wedge y) \wedge z$$

$$(0 \wedge 1) \wedge z$$

$$0 \wedge z$$

$$0 \wedge 1$$

$$0 \text{ (ЛОЖЬ)}$$

Задача 9.3:

Даны значения:  $x = 0$ ,  $y = 1$ ,  $z = 1$ .

Определите логические значения высказываний

$$x \rightarrow (y \rightarrow z)$$

$$x \rightarrow (1 \rightarrow 1)$$

$$x \rightarrow 1$$

$$0 \rightarrow 1$$

**1 (истина)**

Задача 9.4:

Даны значения:  $x = 0, y = 1, z = 1$ .

Определите логические значения высказываний

$$x \wedge y \rightarrow z$$

$$0 \wedge 1 \rightarrow z$$

$$0 \rightarrow z$$

$$0 \rightarrow 1$$

**1 (истина)**

Задача 9.5:

Даны значения:  $x = 0, y = 1, z = 1$ .

Определите логические значения высказываний

$$(x \wedge y) \Leftrightarrow (z \vee \neg y)$$

$$(x \wedge y) \Leftrightarrow (z \vee \neg 1)$$

$$(x \wedge y) \Leftrightarrow (z \vee 0)$$

$$(x \wedge y) \Leftrightarrow (z \vee 0)$$

$$(0 \wedge 1) \Leftrightarrow (1 \vee 0)$$

$$0 \Leftrightarrow 1$$

**0** (ЛОЖЬ)

Задача 9.6:

Даны значения:  $x = 0, y = 1, z = 1$ .

Определите логические значения высказываний

$$((x \vee y) \wedge z) \Leftrightarrow ((x \wedge z) \vee (y \wedge z))$$

$$((0 \vee 1) \wedge z) \Leftrightarrow ((0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1))$$

$$((1) \wedge z) \Leftrightarrow ((0) \vee (1))$$

$$(1 \wedge 1) \Leftrightarrow (0 \vee 1)$$

$$1 \Leftrightarrow 1$$

Задача 10:

Упростите выражение:

$$(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$$

$$(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$$

$$A \wedge (B \vee \neg B)$$

$$A \wedge (B \vee \neg B)$$

$$A \wedge (1)$$

$$A$$

Задача 11:

Упростите выражение:

$$(A \vee \neg A) \wedge B$$

$$(A \vee \neg A) \wedge B$$

$$(1) \wedge B$$

$$B$$

Задача 12:

Упростите выражение:

$$A \wedge (A \vee B) \wedge (B \vee \neg B)$$

$$A \wedge (A \vee B) \wedge (B \vee \neg B)$$

$$A \wedge (A \vee B) \wedge (1)$$

$$A \wedge (A \vee B) \wedge 1 \text{ \{з-н поглощения\}}$$

$$A \wedge 1$$

$$A$$

## Задача 13:

Доказать справедливость

закона поглощения для дизъюнкции:

$A \vee (A \wedge B) \equiv A$  по таблицам истинности

<b>A</b>	<b>B</b>	<b>A ∧ B</b>	<b>A ∨ (A ∧ B)</b>
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

## Задача 14:

Доказать справедливость

закона поглощения для конъюнкции:

$A \wedge (A \vee B) \equiv A$  по таблицам истинности

<b>A</b>	<b>B</b>	<b>A <math>\vee</math> B</b>	<b>A <math>\wedge</math> (A <math>\vee</math> B)</b>
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	1
1	1	1	1

## Задача 15:

Доказать справедливость

первого закона де Моргана:  $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$

по таблицам истинности

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A \wedge \neg B$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0

## Задача 16:

Доказать справедливость

второго закона де Моргана:  $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$

по таблицам истинности

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A \vee \neg B$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0

## Задача 17:

Составить расписание занятий так, чтобы **математика** была **первым** или **вторым** уроком, **информатика** **первым** или **третьим** уроком, а **физика** – **вторым** или **третьим**.

В расписании всего три урока. Сколько вариантов расписания с такими условиями можно составить?

## Задача 17. Решение

Пусть:

- $M1 = \text{«Математика первым уроком»}$
- $M2 = \text{«Математика вторым уроком»}$
- $I1 = \text{«Информатика первым уроком»}$
- $I3 = \text{«Информатика третьим уроком»}$
- $F2 = \text{«Физика вторым уроком»}$
- $F3 = \text{«Физика третьим уроком»}$

Тогда расписание можно свести к выражению:

$$(M1 \vee M2) \wedge (I1 \vee I3) \wedge (F2 \vee F3)$$

## Задача 17. Решение. Раскрытие скобок

$$(M1 \vee M2) \wedge (И1 \vee И3) \wedge (\Phi2 \vee \Phi3)$$

$$(M1 \wedge И1 \vee M1 \wedge И3 \vee M2 \wedge И1 \vee M2 \wedge И3) \wedge (\Phi2 \vee \Phi3)$$

$$M1 \cdot И1 \cdot \Phi2 \vee M1 \cdot И3 \cdot \Phi2 \vee M2 \cdot И1 \cdot \Phi2 \vee M2 \cdot И3 \cdot \Phi2 \vee$$
$$M1 \cdot И1 \cdot \Phi3 \vee M1 \cdot И3 \cdot \Phi3 \vee M2 \cdot И1 \cdot \Phi3 \vee M2 \cdot И3 \cdot \Phi3$$

Выбираем только непротиворечивые комбинации:

Ответ:

1 вариант – Математика, Физика, Информатика

2 вариант – Информатика, Математика, Физика

## Задача 18:

В одной из смежных аудиторий может быть либо кабинет информатики, либо кабинет физики.

На одной двери написано: **«В одном из этих двух кабинетов точно есть кабинет информатики»**, а на двери другого: **«Кабинет информатики не здесь»**.

Известно также, что высказывания на табличках тождественны.

Определить, где какой кабинет

## Задача 18. Решение

Пусть:

$A =$  «Информатика в кабинете 1»,

$B =$  «Информатика в кабинете 2»

Тогда:

$\neg A =$  «Физика в кабинете 1»,

$\neg B =$  «Физика в кабинете 2»

Высказывание *«В одном из этих двух кабинетов точно есть кабинет информатики»*:  $X = A \vee B$ ,

Высказывание *«Кабинет информатики не здесь»*:  $Y = \neg A$

Исходя из условия:  $X \Leftrightarrow Y$ , т.е.

$$Y = (\neg X \vee Y) \wedge (\neg Y \vee X) \Rightarrow (\neg X \vee Y) \wedge (\neg Y \vee X) \vee \neg Y$$

Заменяем  $X$  и  $Y$  их выражениями:

$$(\neg(A \vee B) \vee \neg A) \wedge (\neg(\neg A) \vee (A \vee B)) \vee \neg(\neg A)$$

## Задача 18. Решение (продолжение)

$$((\neg(A \vee B)) \vee \neg A) \wedge ((\neg(\neg A)) \vee (A \vee B)) \vee \neg(\neg A)$$

Упрощаем выражение:

$$((\neg A \wedge \neg B) \vee \neg A) \wedge (A \vee (A \vee B)) \vee A \Rightarrow$$

$$((\neg A \wedge \neg B) \vee \neg A) \wedge (A \vee (A \vee B)) \vee A \Rightarrow$$

$$((\neg A \vee \neg A) \wedge (\neg B \vee \neg A)) \wedge (A \vee A \vee B \vee A) \Rightarrow$$

$$(\neg A \wedge (\neg B \vee \neg A)) \wedge (A \vee B) \Rightarrow$$

$$\neg A \wedge (A \vee B) \Rightarrow$$

$$(\neg A \wedge A) \vee (\neg A \wedge B) \Rightarrow$$

$$\neg A \wedge B$$

Т.о. выражение  $\neg A \wedge B$  соответствует высказыванию:

**«Физика в кабинете 1 и информатика в кабинете 2»**

## Задача 19.

Следователь допрашивает Клода, Жака и Дика.

Клод утверждает, что Жак лжет, Жак обвинял во лжи Дика, а Дик призывает не слушать ни того, ни другого.

Кто из допрашиваемых говорил правду?

Решение:

Пусть показания свидетелей будут называться буквами ***К***, ***Ж*** и ***Д***. Тогда известно, что:

1. Если Клод сказал правду (***К***), то Жак лжет ( **$\neg$ *Ж***), иначе (если Клод солгал,  **$\neg$ *К***), то Жак сказал правду (***Ж***)
2. Если Жак сказал правду (***Ж***), тогда Дик не прав, ( **$\neg$ *Д***), иначе лжет Жак ( **$\neg$ *Ж***), а Дик – прав (***Д***)
3. Если лжет Дик (***Д***), то Клод и Жак правы (***Ж и К***), иначе последние лгут ( **$\neg$ (*Ж и К*)**), а Дик – прав (***Д***)

## Задача 19. Решение

Выразим эти высказывания на формальном языке логики:

1.  $K \wedge \neg J \vee \neg K \wedge J$
2.  $J \wedge \neg D \vee \neg J \wedge D$
3.  $D \wedge \neg K \wedge \neg J \vee \neg D \wedge (K \vee J)$

Задача будет решена, если все три высказывания будут истинны, т.е. истинна их конъюнкция:

$$(K \cdot (\neg J \vee J) \vee (\neg K \cdot J) \cdot J) \cdot (J \cdot (\neg D \vee \neg J \cdot D)) \cdot (D \cdot (\neg K \cdot \neg J \vee \neg D \cdot (K \vee J))) \\ ((K \vee J) \cdot J \cdot \neg D \vee K \cdot \neg J \cdot \neg J \cdot D \vee \neg K \cdot J \cdot J \cdot \neg D \vee \neg K \cdot J \cdot \neg J \cdot D) \wedge \\ \wedge (D \cdot \neg K \cdot \neg J \vee \neg D \cdot K \vee \neg D \cdot J)$$

$$(K \cdot \neg J \cdot \neg J \cdot D \vee \neg K \cdot J \cdot J \cdot \neg D) \wedge (D \cdot \neg K \cdot \neg J \vee \neg D \cdot K \vee \neg D \cdot J)$$

$$(K \cdot \neg J \cdot \neg J \cdot D \cdot D \cdot \neg K \cdot \neg J \vee K \cdot \neg J \cdot \neg J \cdot D \cdot \neg D \cdot J \vee K \cdot \neg J \cdot \neg J \cdot D \cdot \neg D \cdot J \vee \vee \\ \neg K \cdot J \cdot J \cdot \neg D \cdot D \cdot \neg K \cdot \neg J \vee \neg K \cdot J \cdot J \cdot \neg D \cdot \neg D \cdot J \vee \\ \vee \neg K \cdot J \cdot J \cdot \neg D \cdot \neg D \cdot J$$

$$\neg K \cdot J \cdot J \cdot \neg D \cdot \neg D \cdot J \vee \neg K \cdot J \cdot J \cdot \neg D \cdot \neg D \cdot J \equiv \neg K \wedge \neg D \wedge J$$

Итак, только Жак говорил правду

## Задача 20.

Нерадивый студент сдает компьютерный тест. Все ответы сводятся к ответам типа «Да» или «Нет». Один правильный ответ – один балл. Студенту известно, что:

- Первый и последний ответы противоположны
- Второй и четвертый ответы одинаковы
- Хотя бы один из первых двух ответов – «Да»
- Если четвертый ответ «Да», то пятый – «Нет»
- Ответов «Да» больше, чем ответов «Нет»

Требуется получить 4 или более баллов

## Задача 20. Решение

Пусть:

- A. Первый ответ «Да»
- B. Вторым ответ «Да»
- C. Третий ответ «Да»
- D. Четвертый ответ «Да»
- E. Пятый ответ «Да»

Тогда:

1.  $A \wedge \neg E$
2.  $B \wedge D$
3.  $A \vee B$
4.  $D \rightarrow \neg E \equiv \neg D \vee \neg E$

**Отсюда:**

$$\begin{aligned} & (A \wedge \neg E) \wedge (B \wedge D) \wedge (A \vee B) \wedge (\neg D \vee \neg E) \Rightarrow \\ & \Rightarrow A \neg E B D \wedge (A \vee B) \wedge (\neg D \vee \neg E) \Rightarrow \\ & \Rightarrow A \neg E B D \wedge (A \neg D \vee A \neg E \vee B \neg D \vee B \neg E) \Rightarrow \\ & \Rightarrow A \neg E B D \vee A \neg E B D \Rightarrow \mathbf{A \neg E B D} \end{aligned}$$

# Таблицы истинности

1  
2  
3  
4  
5  
6  
7  
8  
9

## Конъюнкция

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	0

1

## Дизъюнкция

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

1

## Импликация

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

1

## Эквиваленция

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

1

10  
11  
12  
13  
14  
15  
16  
17  
18  
19  
20  
21  
22  
23  
24