

Алгебра высказываний

Решение логических задач

Автор:

Сергеев

Евгений Викторович

МОУ СОШ №4 г. Миньяра

Челябинской области

sergeev73@mail.ru

<http://shk4-minyara.ucoz.ru>

Задача 1: Составьте сложное высказывание в словесной форме из простых, заданных математическим формулировкам:

■ **Высказывание А:**

«Учащийся Иванов хорошо успевает по английскому языку»

■ **Высказывание В:**

«Учащийся Иванов любит работать на компьютере».

$$\neg(A \wedge B)$$

«не (учащийся Иванов хорошо успевает по английскому языку и любит работать на компьютере)» =
«Учащийся Иванов не успевает по английскому языку и не любит работать на компьютере»

Задача 2:

Пусть p и q обозначают высказывания:

$p =$ «Я учусь в школе»

$q =$ «Я люблю информатику»

составьте и запишите следующие высказывания:

~~$\neg p \wedge q$~~

~~$p \wedge \neg q$~~

«Я не учусь в школе»

«не(Я не учусь в школе)» \equiv «Я учусь в школе»

«Я учусь в школе и люблю информатику»

«Я учусь в школе и не люблю информатику»

«Я учусь в школе или люблю информатику»

«Я не учусь в школе или люблю информатику»

«Я не учусь в школе или я не люблю информатику»

«Я люблю информатику, потому, что учусь в

Задача 3:

Обозначьте элементарные высказывания буквами и запишите высказывания на формальном языке алгебры высказываний

1. 45 кратно 3 и 42 кратно 3
 2. 45 кратно 3 и 12 не кратно 3
 3. $2 \leq 5$
 4. если 212 делится на 3 и на 4, то 212 делится на 12
 5. 212 – трехзначное число, которое делится на 3 и на 4
-
1. $A \wedge B$, где $A = \langle\langle 45 \text{ кратно } 3 \rangle\rangle$, $B = \langle\langle 42 \text{ кратно } 3 \rangle\rangle$
 2. $A \wedge \neg B$, где $A = \langle\langle 45 \text{ кратно } 3 \rangle\rangle$, $B = \langle\langle 12 \text{ кратно } 3 \rangle\rangle$
 3. $A \vee B$, где $A = \langle\langle 2 < 5 \rangle\rangle$, $B = \langle\langle 2 = 5 \rangle\rangle$
 4. $(A \wedge B) \rightarrow C$, где $A = \langle\langle 212 \text{ делится на } 3 \rangle\rangle$,
 $B = \langle\langle 212 \text{ делится на } 4 \rangle\rangle$ и $C = \langle\langle 212 \text{ делится на } 12 \rangle\rangle$
 5. $A \wedge B \wedge C$, где $A = \langle\langle 212 \text{ – трехзначное число} \rangle\rangle$, $B = \langle\langle 212 \text{ делится на } 3 \rangle\rangle$ и $C = \langle\langle 212 \text{ делится на } 4 \rangle\rangle$

Задача 4:

Составьте таблицу истинности для функции $A \vee \neg B$

A	B	$\neg B$	$A \vee \neg B$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1

Задача 5:

Какие из следующих импликаций истинны

- | | | |
|-----------|---|---------------|
| 1. | если $2 \times 2 = 4$, то $2 < 3$ | истина |
| 2. | если $2 \times 2 = 4$, то $2 > 3$ | ложь |
| 3. | если $2 \times 2 = 5$, то $2 < 3$ | истина |
| 4. | если $2 \times 2 = 5$, то $2 > 3$ | истина |

Задача 6:

Какие из следующих высказываний
противоречивы

- | | | |
|-----------|---|---------------|
| 1. | $a = 1, a \wedge b = 0$ | истина |
| 2. | $a = 1, a \vee b = 0$ | ложь |
| 3. | $a = 1, a \wedge b = 1$ | истина |
| 4. | $a = 1, a \vee b = 1$ | истина |
| 5. | $a = 0, a \wedge b = 1$ | ложь |
| 6. | $a = 0, a \vee b = 1$ | истина |
| 7. | $a = 0, a \wedge b = 0$ | истина |
| 8. | $a = 0, a \vee b = 0$ | истина |

Задача 7:

Пусть:

$a = \langle\langle 7 - \text{простое} \rangle\rangle$, $b = \langle\langle 7 - \text{составное} \rangle\rangle$,

$c = \langle\langle 8 - \text{простое} \rangle\rangle$ и $d = \langle\langle 8 - \text{составное} \rangle\rangle$

Определите истинность высказываний

9. $a \wedge c$ ложь

10. $a \vee b \wedge d$ истина

13. $b \vee c \wedge c$ ложь

18. $c \vee d \wedge d$ ложь

Задача 8:

Какие из следующих высказываний истинны

- | | | |
|-----|---|--------|
| 8. | $p \rightarrow \neg p \wedge (p \Leftrightarrow \neg p)$ | ИСТИНА |
| 9. | $(p \vee \neg p) \vee \neg p$ | ИСТИНА |
| 10. | $p \rightarrow \neg p \wedge \neg p (\neg p \rightarrow p \wedge$ | ИСТИНА |
| 4. | $p) \Leftrightarrow \neg p$ | ЛОЖЬ |
| 15. | $p \wedge \neg (p \Leftrightarrow \neg p)$ | ЛОЖЬ |
| 16. | $p \Leftrightarrow p \rightarrow p$ | ИСТИНА |
| 13. | $(\neg(p \vee \neg p) \rightarrow p)$ | ИСТИНА |
| 14. | $(p \vee p) \rightarrow (p \wedge p)$ | |

Задача 9:

Даны значения: $x = 0$, $y = 1$, $z = 1$.

Определите логические значения высказываний

1. $x \wedge (y \wedge z)$

2. $(x \wedge y) \wedge z$

3. $x \rightarrow (y \rightarrow z)$

4. $x \wedge y \rightarrow z$

5. $(x \wedge y) \Leftrightarrow (z \vee \neg y)$

6. $((x \vee y) \wedge z) \Leftrightarrow ((x \wedge z) \vee (y \wedge z))$

Задача 9.1:

Даны значения: $x = 0, y = 1, z = 1$.

Определите логические значения высказываний

$$x \wedge (y \wedge z)$$

$$x \wedge (1 \wedge 1)$$

$$x \wedge 1$$

$$0 \wedge 1$$

$$0 \text{ (ложь)}$$

Задача 9.2:

Даны значения: $x = 0$, $y = 1$, $z = 1$.

Определите логические значения высказываний

$$(x \wedge y) \wedge z$$

$$(0 \wedge 1) \wedge z$$

$$0 \wedge z$$

$$0 \wedge 1$$

$$0 \text{ (ЛОЖЬ)}$$

Задача 9.3:

Даны значения: $x = 0$, $y = 1$, $z = 1$.

Определите логические значения высказываний

$$x \rightarrow (y \rightarrow z)$$

$$x \rightarrow (1 \rightarrow 1)$$

$$x \rightarrow 1$$

$$0 \rightarrow 1$$

1 (истина)

Задача 9.4:

Даны значения: $x = 0, y = 1, z = 1$.

Определите логические значения высказываний

$$x \wedge y \rightarrow z$$

$$0 \wedge 1 \rightarrow z$$

$$0 \rightarrow z$$

$$0 \rightarrow 1$$

1 (истина)

Задача 9.5:

Даны значения: $x = 0, y = 1, z = 1$.

Определите логические значения высказываний

$$(x \wedge y) \Leftrightarrow (z \vee \neg y)$$

$$(x \wedge y) \Leftrightarrow (z \vee \neg 1)$$

$$(x \wedge y) \Leftrightarrow (z \vee 0)$$

$$(x \wedge y) \Leftrightarrow (z \vee 0)$$

$$(0 \wedge 1) \Leftrightarrow (1 \vee 0)$$

$$0 \Leftrightarrow 1$$

0 (ЛОЖЬ)

Задача 9.6:

Даны значения: $x = 0, y = 1, z = 1$.

Определите логические значения высказываний

$$((x \vee y) \wedge z) \Leftrightarrow ((x \wedge z) \vee (y \wedge z))$$

$$((0 \vee 1) \wedge z) \Leftrightarrow ((0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1))$$

$$((1) \wedge z) \Leftrightarrow ((0) \vee (1))$$

$$(1 \wedge 1) \Leftrightarrow (0 \vee 1)$$

$$1 \Leftrightarrow 1$$

Задача 10:

Упростите выражение:

$$(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$$

$$(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$$

$$A \wedge (B \vee \neg B)$$

$$A \wedge (B \vee \neg B)$$

$$A \wedge (1)$$

$$A$$

Задача 11:

Упростите выражение:

$$(A \vee \neg A) \wedge B$$

$$(A \vee \neg A) \wedge B$$

$$(1) \wedge B$$

$$B$$

Задача 12:

Упростите выражение:

$$A \wedge (A \vee B) \wedge (B \vee \neg B)$$

$$A \wedge (A \vee B) \wedge (B \vee \neg B)$$

$$A \wedge (A \vee B) \wedge (1)$$

$$A \wedge (A \vee B) \wedge 1 \text{ \{з-н поглощения\}}$$

$$A \wedge 1$$

$$A$$

Задача 13:

Доказать справедливость

закона поглощения для дизъюнкции:

$A \vee (A \wedge B) \equiv A$ по таблицам истинности

A	B	A ∧ B	A ∨ (A ∧ B)
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

Задача 14:

Доказать справедливость

закона поглощения для конъюнкции:

$A \wedge (A \vee B) \equiv A$ по таблицам истинности

A	B	$A \vee B$	$A \wedge (A \vee B)$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

Задача 15:

Доказать справедливость

первого закона де Моргана: $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$

по таблицам истинности

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A \wedge \neg B$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0

Задача 16:

Доказать справедливость

второго закона де Моргана: $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$

по таблицам истинности

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A \vee \neg B$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0

Задача 17:

Составить расписание занятий так, чтобы **математика** была **первым** или **вторым** уроком, **информатика** **первым** или **третьим** уроком, а **физика** – **вторым** или **третьим**.

В расписании всего три урока. Сколько вариантов расписания с такими условиями можно составить?

Задача 17. Решение

Пусть:

- $M1 = \text{«Математика первым уроком»}$
- $M2 = \text{«Математика вторым уроком»}$
- $I1 = \text{«Информатика первым уроком»}$
- $I3 = \text{«Информатика третьим уроком»}$
- $F2 = \text{«Физика вторым уроком»}$
- $F3 = \text{«Физика третьим уроком»}$

Тогда расписание можно свести к выражению:

$$(M1 \vee M2) \wedge (I1 \vee I3) \wedge (F2 \vee F3)$$

Задача 17. Решение. Раскрытие скобок

$$(M1 \vee M2) \wedge (И1 \vee И3) \wedge (\Phi2 \vee \Phi3)$$

$$(M1 \wedge И1 \vee M1 \wedge И3 \vee M2 \wedge И1 \vee M2 \wedge И3) \wedge (\Phi2 \vee \Phi3)$$

$$\begin{aligned} & M1 \cdot И1 \cdot \Phi2 \vee \mathbf{M1 \cdot И3 \cdot \Phi2} \vee M2 \cdot И1 \cdot \Phi2 \vee M2 \cdot И3 \cdot \Phi2 \vee \\ & M1 \cdot И1 \cdot \Phi3 \vee M1 \cdot И3 \cdot \Phi3 \vee M2 \cdot И1 \cdot \Phi3 \vee M2 \cdot И3 \cdot \Phi3 \vee \\ & \mathbf{M1 \cdot И1 \cdot \Phi2} \vee \mathbf{M1 \cdot И3 \cdot \Phi3} \vee \mathbf{M2 \cdot И1 \cdot \Phi2} \vee \mathbf{M2 \cdot И3 \cdot \Phi3} \vee \\ & \mathbf{M1 \cdot И1 \cdot \Phi3} \vee \mathbf{M1 \cdot И3 \cdot \Phi2} \vee \mathbf{M2 \cdot И1 \cdot \Phi3} \vee \mathbf{M2 \cdot И3 \cdot \Phi2} \end{aligned}$$

Выбираем только непротиворечивые комбинации:

Ответ:

1 вариант – Математика, Физика, Информатика

2 вариант – Информатика, Математика, Физика

Задача 18:

В одной из смежных аудиторий может быть либо кабинет информатики, либо кабинет физики.

На одной двери написано: **«В одном из этих двух кабинетов точно есть кабинет информатики»**, а на двери другого: **«Кабинет информатики не здесь»**.

Известно также, что высказывания на табличках тождественны.

Определить, где какой кабинет

Задача 18. Решение

Пусть:

$A =$ «Информатика в кабинете 1»,

$B =$ «Информатика в кабинете 2»

Тогда:

$\neg A =$ «Физика в кабинете 1»,

$\neg B =$ «Физика в кабинете 2»

Высказывание *«В одном из этих двух кабинетов точно есть кабинет информатики»*: $X = A \vee B$,

Высказывание *«Кабинет информатики не здесь»*: $Y = \neg A$

Исходя из условия: $X \Leftrightarrow Y$, т.е.

$$Y = (\neg X \vee Y) \wedge (\neg Y \vee X) \Rightarrow (\neg X \vee Y) \wedge (\neg Y \vee X) \vee \neg Y$$

Заменяем X и Y их выражениями:

$$(\neg(A \vee B) \vee \neg A) \wedge (\neg(\neg A) \vee (A \vee B)) \vee \neg(\neg A)$$

Задача 18. Решение (продолжение)

$$((\neg(A \vee B)) \vee \neg A) \wedge ((\neg(\neg A)) \vee (A \vee B)) \vee \neg(\neg A)$$

Упрощаем выражение:

$$((\neg A \wedge \neg B) \vee \neg A) \wedge (A \vee (A \vee B)) \vee A \Rightarrow$$

$$((\neg A \wedge \neg B) \vee \neg A) \wedge (A \vee (A \vee B)) \vee A \Rightarrow$$

$$((\neg A \vee \neg A) \wedge (\neg B \vee \neg A)) \wedge (A \vee A \vee B \vee A) \Rightarrow$$

$$(\neg A \wedge (\neg B \vee \neg A)) \wedge (A \vee B) \Rightarrow$$

$$\neg A \wedge (A \vee B) \Rightarrow$$

$$(\neg A \wedge A) \vee (\neg A \wedge B) \Rightarrow$$

$$\neg A \wedge B$$

Т.о. выражение $\neg A \wedge B$ соответствует высказыванию:

«Физика в кабинете 1 и информатика в кабинете 2»

Задача 19.

Следователь допрашивает Клода, Жака и Дика.

Клод утверждает, что Жак лжет, Жак обвинял во лжи Дика, а Дик призывает не слушать ни того, ни другого.

Кто из допрашиваемых говорил правду?

Решение:

Пусть показания свидетелей будут называться буквами ***К***, ***Ж*** и ***Д***. Тогда известно, что:

1. Если Клод сказал правду (***К***), то Жак лжет (**\neg *Ж***), иначе (если Клод солгал, **\neg *К***), то Жак сказал правду (***Ж***)
2. Если Жак сказал правду (***Ж***), тогда Дик не прав, (**\neg *Д***), иначе лжет Жак (**\neg *Ж***), а Дик – прав (***Д***)
3. Если лжет Дик (***Д***), то Клод и Жак правы (***Ж и К***), иначе последние лгут (**\neg (*Ж и К*)**), а Дик – прав (***Д***)

Задача 19. Решение

Выразим эти высказывания на формальном языке логики:

1. $K \wedge \neg J \vee \neg K \wedge J$
2. $J \wedge \neg D \vee \neg J \wedge D$
3. $D \wedge \neg K \wedge \neg J \vee \neg D \wedge (K \vee J)$

Задача будет решена, если все три высказывания будут истинны, т.е. истинна их конъюнкция:

$$(K \cdot (\neg J \vee J) \vee (\neg K \cdot J) \cdot J) \cdot (J \cdot (\neg D \vee \neg J \cdot D)) \cdot (D \cdot (\neg K \cdot \neg J \vee \neg D \cdot (K \vee J))) \\ ((K \vee \neg K) \cdot J \cdot \neg D \vee K \cdot \neg J \cdot \neg J \cdot D \vee \neg K \cdot J \cdot J \cdot \neg D \vee \neg K \cdot J \cdot \neg J \cdot D) \wedge \\ \wedge (D \cdot \neg K \cdot \neg J \vee \neg D \cdot K \vee \neg D \cdot J)$$

$$(K \cdot \neg J \cdot \neg J \cdot D \vee \neg K \cdot J \cdot J \cdot \neg D) \wedge (D \cdot \neg K \cdot \neg J \vee \neg D \cdot K \vee \neg D \cdot J)$$

$$(K \cdot \neg J \cdot \neg J \cdot D \cdot D \cdot \neg K \cdot \neg J \vee K \cdot \neg J \cdot \neg J \cdot D \cdot \neg D \cdot J \vee K \cdot \neg J \cdot \neg J \cdot D \cdot \neg D \cdot J \vee \vee \\ \neg K \cdot J \cdot J \cdot \neg D \cdot D \cdot \neg K \cdot \neg J \vee \neg K \cdot J \cdot J \cdot \neg D \cdot \neg D \cdot J \vee \\ \vee \neg K \cdot J \cdot J \cdot \neg D \cdot \neg D \cdot J$$

$$\neg K \cdot J \cdot J \cdot \neg D \cdot \neg D \cdot J \vee \neg K \cdot J \cdot J \cdot \neg D \cdot \neg D \cdot J \equiv \neg K \wedge \neg D \wedge J$$

Итак, только Жак говорил правду

Задача 20.

Нерадивый студент сдает компьютерный тест. Все ответы сводятся к ответам типа «Да» или «Нет». Один правильный ответ – один балл. Студенту известно, что:

- Первый и последний ответы противоположны
- Второй и четвертый ответы одинаковы
- Хотя бы один из первых двух ответов – «Да»
- Если четвертый ответ «Да», то пятый – «Нет»
- Ответов «Да» больше, чем ответов «Нет»

Требуется получить 4 или более баллов

Задача 20. Решение

Пусть:

- А. Первый ответ «Да»
- В. Вторым ответ «Да»
- С. Третий ответ «Да»
- Д. Четвертый ответ «Да»
- Е. Пятый ответ «Да»

Тогда:

1. $A \wedge \neg E$
2. $B \wedge D$
3. $A \vee B$
4. $D \rightarrow \neg E \equiv \neg D \vee \neg E$

Отсюда:

$$\begin{aligned} & (A \wedge \neg E) \wedge (B \wedge D) \wedge (A \vee B) \wedge (\neg D \vee \neg E) \Rightarrow \\ & \Rightarrow A \neg E B D \wedge (A \vee B) \wedge (\neg D \vee \neg E) \Rightarrow \\ & \Rightarrow A \neg E B D \wedge (A \neg D \vee A \neg E \vee B \neg D \vee B \neg E) \Rightarrow \\ & \Rightarrow A \neg E B D \vee A \neg E B D \Rightarrow \mathbf{A \neg E B D} \end{aligned}$$

Таблицы истинности

1

2

3

4

5

6

7

8

9

9.1

9.2

9.3

9.4

9.5

9.6

Конъюнкция

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	0

1

Дизъюнкция

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

1

Импликация

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

1

Эквиваленция

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

1

10

11

12

13

14

15

16

17

18

19

20

21

22

23

24