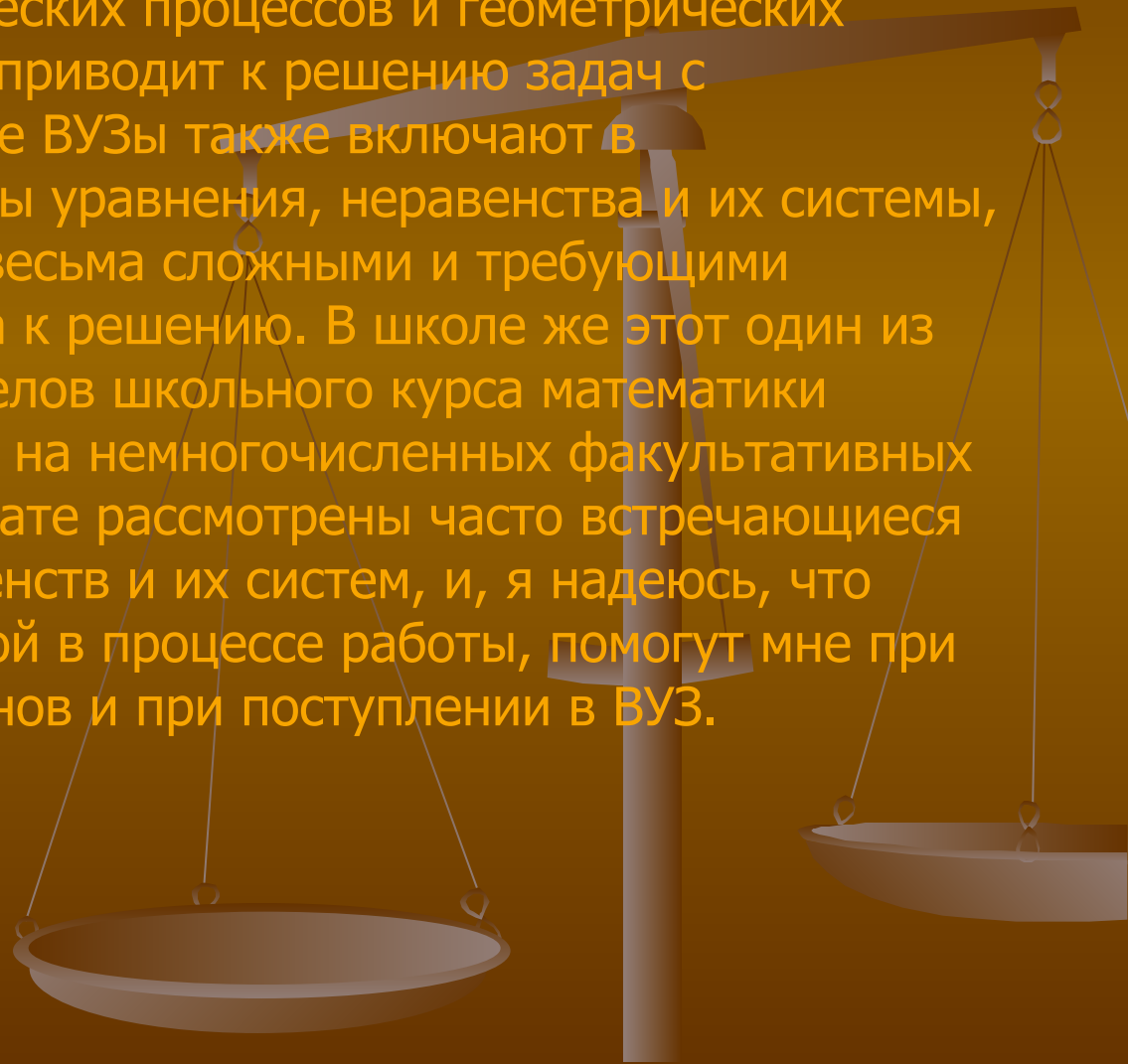


Алгебраические преобразования с параметрами

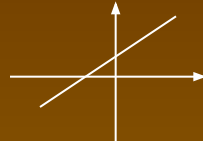
- Изучение многих физических процессов и геометрических закономерностей часто приводит к решению задач с параметрами. Некоторые ВУЗы также включают в экзаменационные билеты уравнения, неравенства и их системы, которые часто бывают весьма сложными и требующими нестандартного подхода к решению. В школе же этот один из наиболее трудных разделов школьного курса математики рассматривается только на немногочисленных факультативных занятиях. В моем реферате рассмотрены часто встречающиеся типы уравнений, неравенств и их систем, и, я надеюсь, что знания, полученные мной в процессе работы, помогут мне при сдаче школьных экзаменов и при поступлении в ВУЗ.



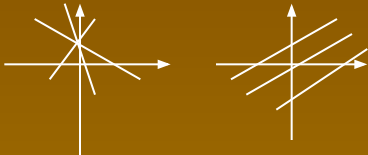
Введение

- Первой, и, пожалуй самой просто функцией является линейная функция $y=kx+m$.

Вы знаете что при конкретных k и m графиком функции $y=kx+m$ является прямая линия.



Так же из курса школьной программы мы уже знаем, что $k=tga$, где a -угол наклона прямой к оси Ox , а m -ордината точки, в которой прямая пересекается с осью Oy . И если мы будем изменять значение k , то через одну точку пересечения m с осью Oy проходит несколько различных прямых. Если же k зафиксировать, а m менять, то получим семейство параллельных прямых.



Теперь поближе познакомимся с линейными уравнениями. Линейные уравнения с двумя переменными называется уравнение вида $ax+by+c=0$. Если $b \neq 0$, то его можно привести к виду $y = -a/b \cdot x - c/b$, и, положив $k = -a/b$ и $m = -c/b$, получить стандартный вид $y=kx+m$. Если же $b=0$, то уравнение приводится к виду $x = -c/b$ и мы получаем прямую, параллельную оси Oy .

Рассмотри подробнее случай $b \neq 0$. Тогда, как было указано, мы можем привести уравнение к виду $y=kx+m$. Посмотрим, как меняется график функции $y(x)$ при изменении коэффициентов k и m , то есть как функция $y(x)$ зависит от параметров k и m .

Если $k < 0$, то функция убывает, если $k = 0$, то функция постоянна, и если $k > 0$, то функция возрастает (рис. 1).

Если $m < 0$, то точка пересечения с осью Oy будет в нижней полуплоскости, если $m = 0$, то прямая пройдет через начало координат, и если $m > 0$, то график будет пересекаться с осью Oy в верхней полуплоскости (рис. 2).

$k < 0$ $k = 0$ $k > 0$ $m < 0$ $m = 0$ $m > 0$

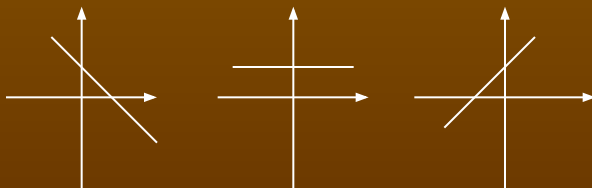


рис. 1

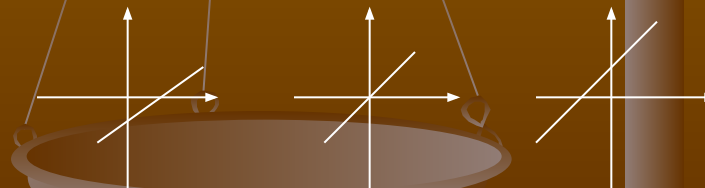
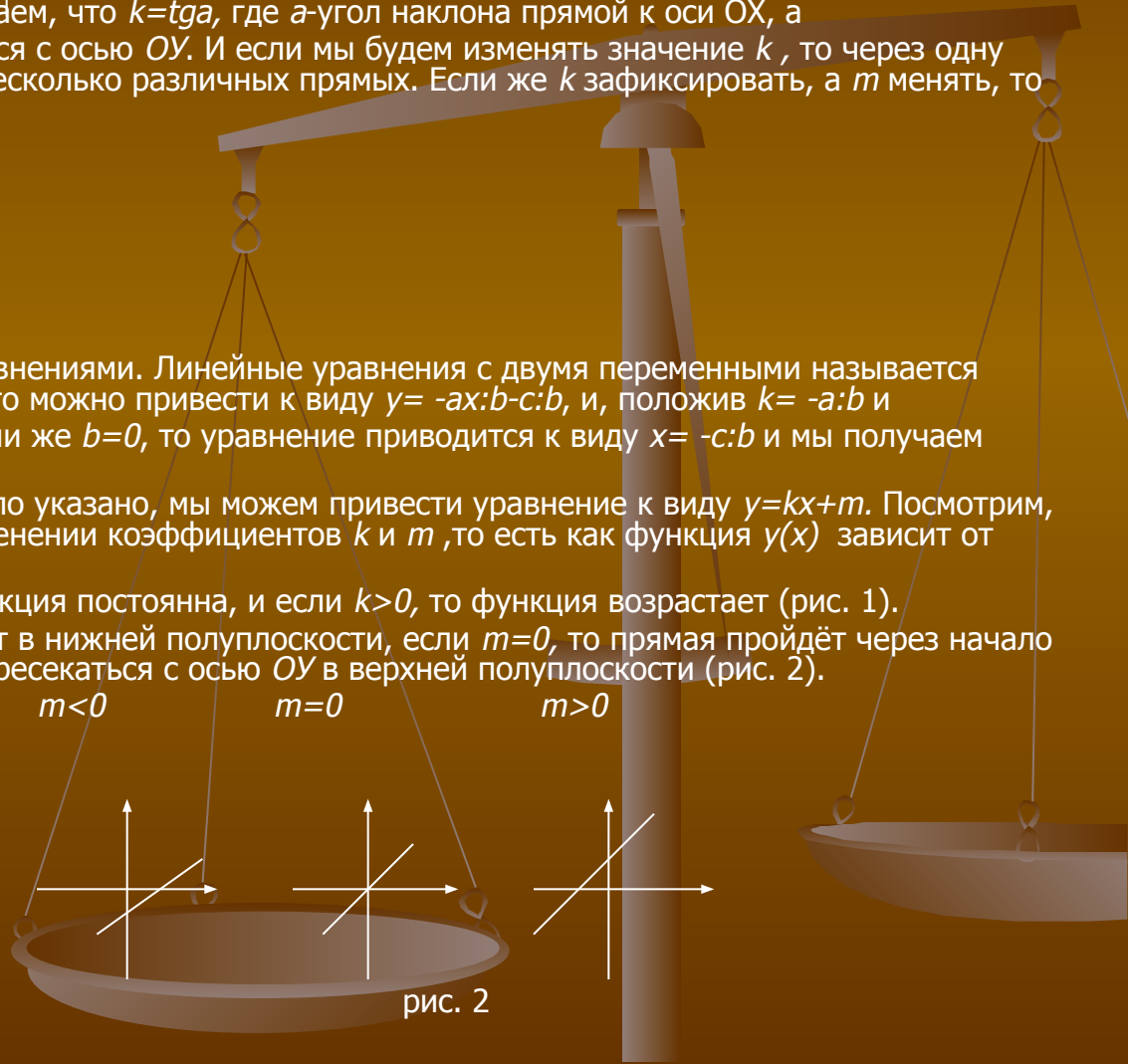


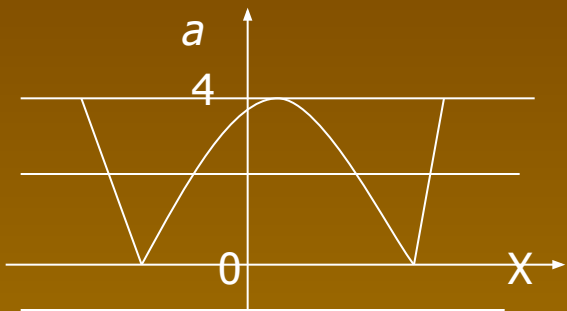
рис. 2



ПРИМЕР №1

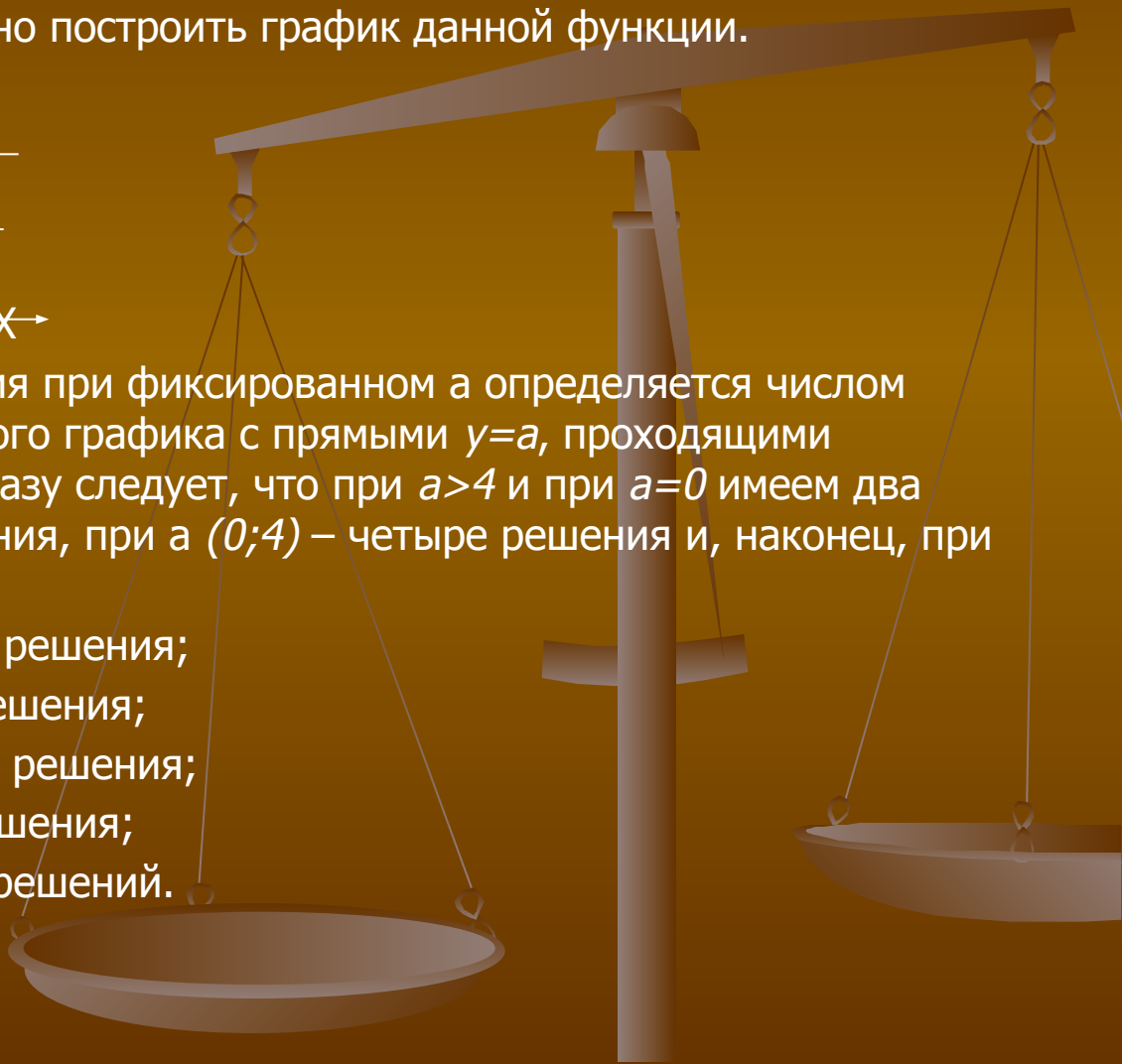
- Для каждого значения a определите число решений уравнения $|x^2 - 2x - 3| = a$

- **Решение.** В этой задаче параметр уже выражен через переменную. Таким образом, надо просто аккуратно построить график данной функции.



- Количество решений уравнения при фиксированном a определяется числом точек пересечения построенного графика с прямыми $y = a$, проходящими параллельно оси X . Отсюда сразу следует, что при $a > 4$ и при $a = 0$ имеем два решения, при $a = 4$ – три решения, при $a \in (0; 4)$ – четыре решения и, наконец, при $a < 0$ решений не существует.

- **Ответ.** Если $a \in (4; +\infty)$, то два решения;
- если $a = 4$, то три решения;
- если $a \in (0; 4)$, то четыре решения;
- если $a = 0$, то два решения;
- если $a \in (-\infty; 0)$, то нет решений.



ПРИМЕР №2

Найдите все значения параметра p , при каждом из которых уравнение $(x-p)(p(x-p)^2-p-1)=-1$ имеет больше положительных корней, чем отрицательных.

Решение. Если $p=0$, то данное уравнение принимает вид $x^3=1$. Это уравнение имеет корни $x=1$ и $x=-1$. Следовательно, в этом случае число положительных и число отрицательных¹ корней² одинаково, и такое p условию задачи не удовлетворяет₁.

Пусть $p \neq 0$. Обозначим $z=(x-p)^2 \geq 0$, тогда исходное уравнение принимает вид $pz^2-(p+z)z+1=0$ (*).

Корнями уравнения (*) являются $z_1=1$ $z_2=\frac{1}{p}$.

1) Если $p < 0$, то $z < 0$, что противоречит определению z , поэтому остается только $z=1$ и исходное уравнение имеет два корня: $x_1=p+1$ и $x_2=p-1$. Легко видеть, что при $-1 < p < 0$ имеем $x_1 > 0$ и $x_2 < 0$,

при $p < -1$ имеем $x_1 < 0$ и $x_2 < 0$,

а при $p = -1$ получаем $x_1 = 0$ и $x_2 = -2$.

Следовательно, ни при каком $p < 0$ исходное уравнение не имеет положительных корней больше, чем отрицательных, то есть никакие значения $p < 0$ условию не удовлетворяют.



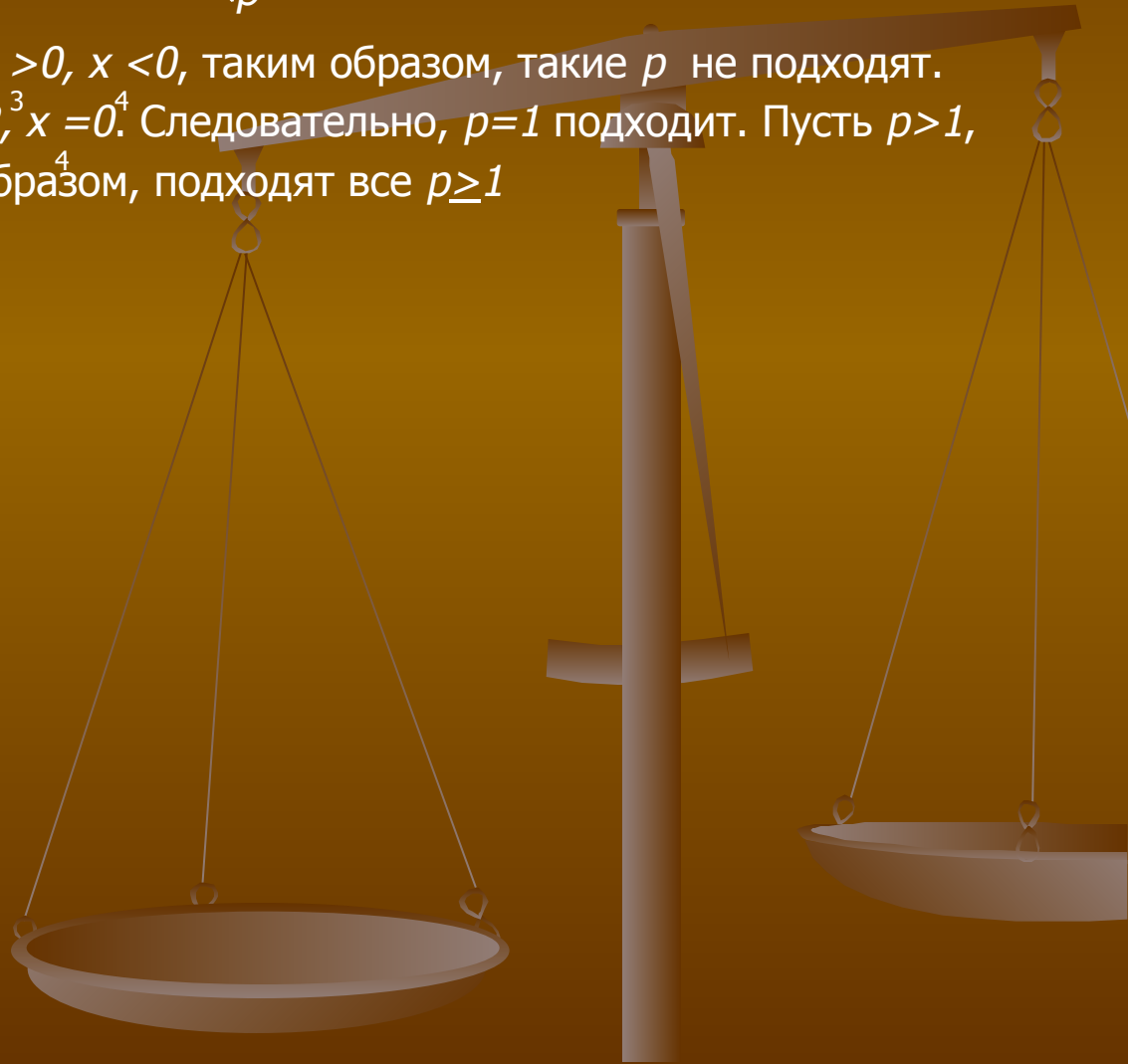
ПРИМЕР №2

- 2) Если $p > 0$, то и $z > 0$ исходное уравнение имеет четыре корня:

$$x_1 = p+1, \quad x_2 = p-1, \quad x_3 = p + \frac{1}{\sqrt{p}}, \quad x_4 = p - \frac{1}{\sqrt{p}}$$

Пусть $0 < p < 1$, тогда $x > 0$, $x < 0$, $x > 0$, $x < 0$, таким образом, такие p не подходят.
Пусть $p = 1$. Тогда $x = 2^1$, $x = 0^2$, $x = 2^3$, $x = 0^4$. Следовательно, $p = 1$ подходит. Пусть $p > 1$, тогда $x > 0$ при $i = 1, 2, 3, 4$.¹ Таким образом, подходят все $p \geq 1$ ²

Ответ. p принадлежит $[1; +\infty)$.



ПРИМЕР №3

Решите уравнение $\log_a a^2 + \log_a (x^2 - 1) = \log_a (\sqrt{x-1})^3 + \log_a \sqrt{x+1}$.

Решение ОДЗ: $x > 1$, $a > 0$, $a \neq 1$.

$$\log_a a^2 + \log_a (x^2 - 1) = \log_a (\sqrt{x-1})^3 + \log_a \sqrt{x+1}$$

$$\log_a (a^2(x^2 - 1)) = \log_a ((\sqrt{x-1})^3 \sqrt{x+1}),$$

$$a^2(x^2 - 1) = (x-1) \sqrt{(x-1)(x+1)},$$

$$a^2(x-1)(x+1) = (x-1) \sqrt{(x-1)(x+1)}$$

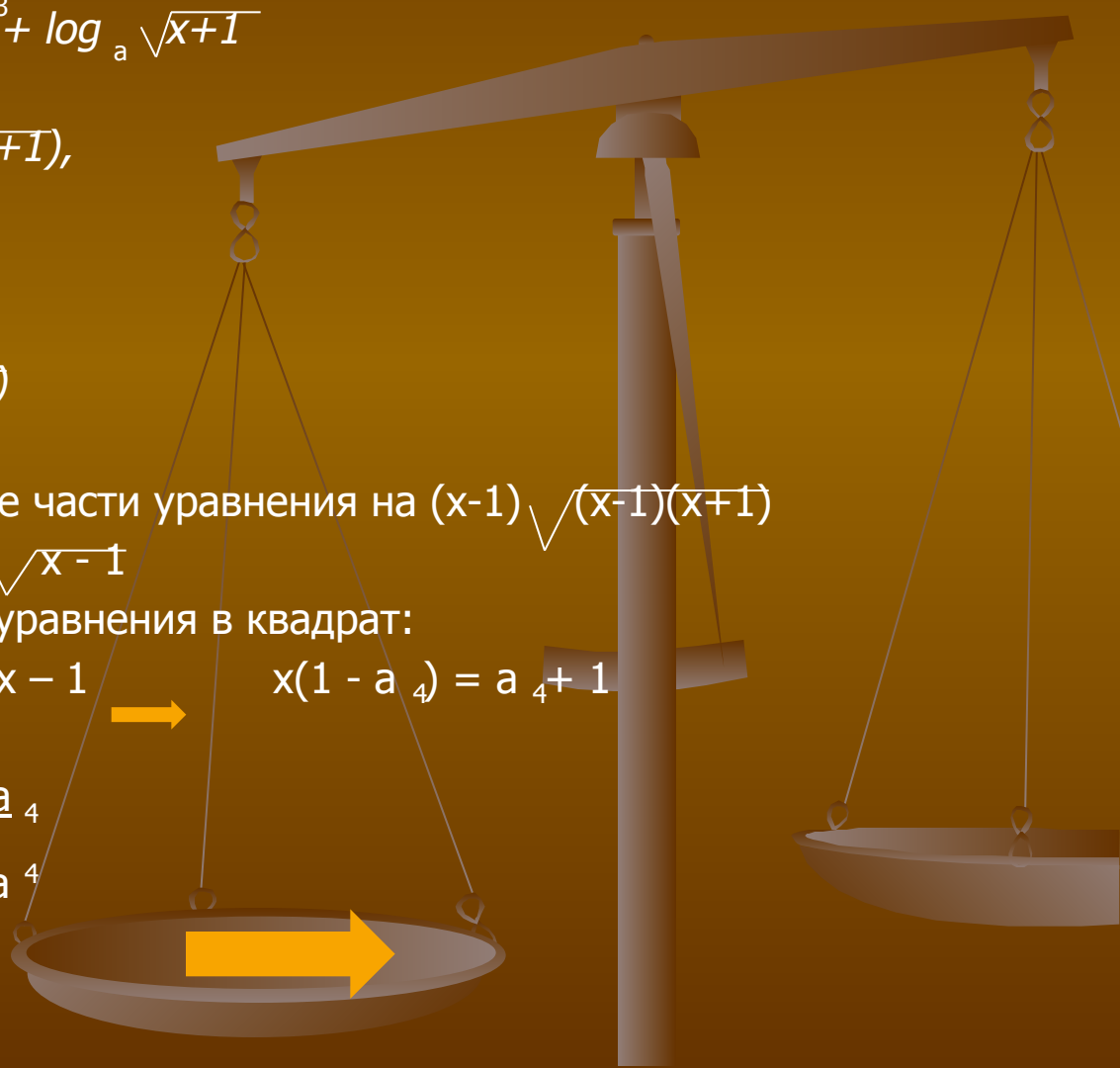
Так как $x \neq -1$ и $x \neq 1$, сократим обе части уравнения на $(x-1) \sqrt{(x-1)(x+1)}$

$$a^2 \sqrt{x+1} = \sqrt{x-1}$$

Возведём обе части полученного уравнения в квадрат:

$$a^4(x+1) = x-1 \quad \longrightarrow \quad a^4 x + a^4 = x-1 \quad \longrightarrow \quad x(1-a^4) = a^4 + 1$$

Так как $a \neq -1$ и $a \neq 1$. то $x = \frac{1+a^4}{1-a^4}$



ПРИМЕР №3

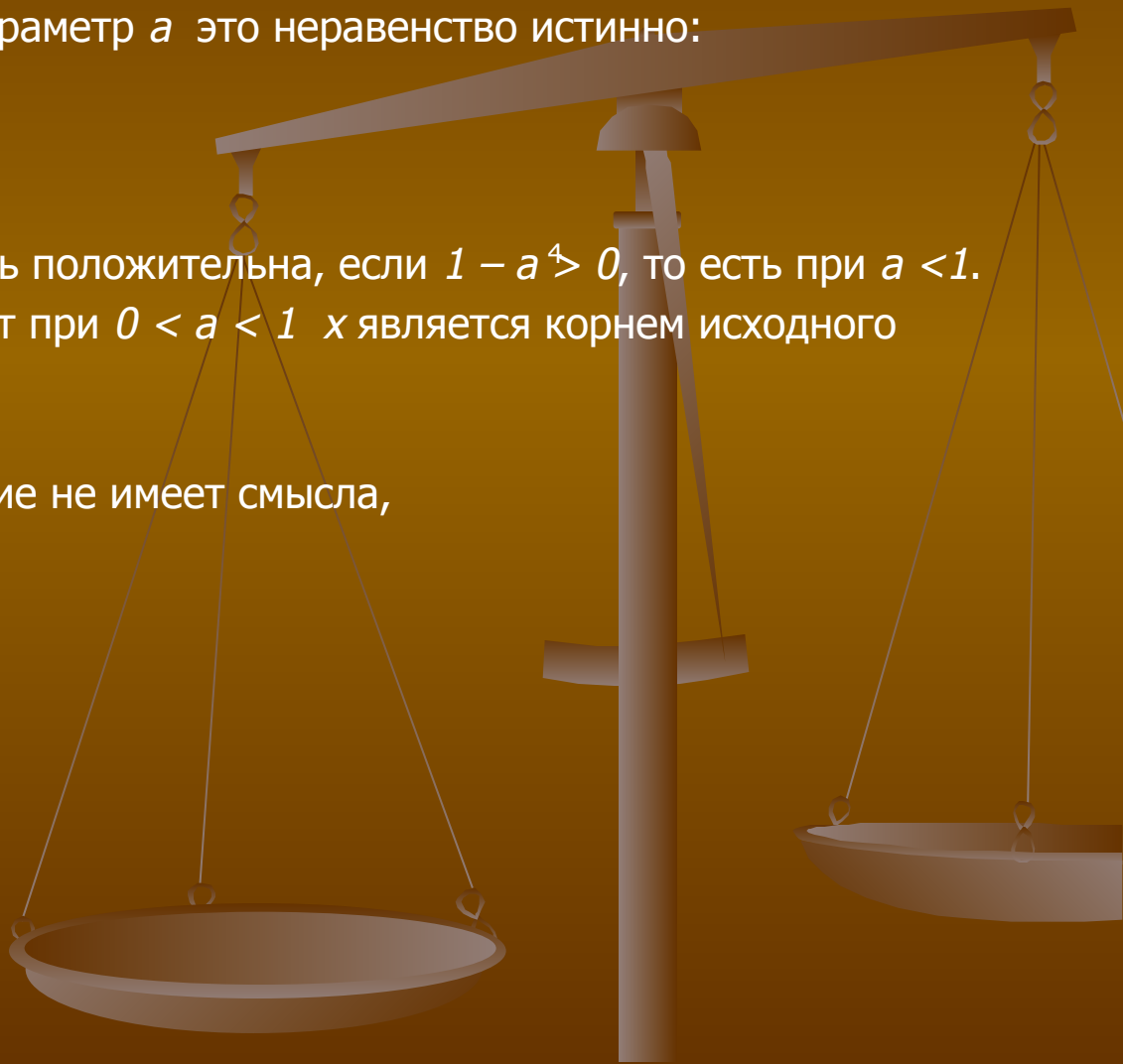
Для того чтобы значения x являлось решением уравнения, должно выполняться условие $x > 1$, то есть $\frac{1+a^4}{1-a^4} > 0$

Выясним, при каких значениях параметр a это неравенство истинно:

$$\frac{1+a^4}{1-a^4} - 1 > 0, \quad \frac{2a^4}{1-a^4} > 0$$

Так как $a > 0$, то полученная дробь положительна, если $1 - a^4 > 0$, то есть при $a < 1$.
Итак, при $0 < a < 1$, $x > 1$, значит при $0 < a < 1$ x является корнем исходного уравнения.

Ответ. При $a < 0$, $a = 1$ уравнение не имеет смысла,
при $a > 1$ решений нет,
при $0 < a < 1$ $x = \frac{1+a^4}{1-a^4}$



ПРИМЕР №4

Найдите все значения параметра b , при которых система уравнений имеет два действительных решения.

$$\begin{cases} 4y = 4b + 3 - x + 2x \\ x^2 + y^2 = 2x \end{cases}$$

Решение. Преобразуем исходную систему следующим образом:

$$\begin{cases} 4y = 4b + 3 - x + 2x \\ x^2 + y^2 = 2x \end{cases} \iff \begin{cases} 4y = 4b + 4 - (x-1) \\ (x-1)^2 = 1 - y^2 \end{cases} \iff \begin{cases} y^2 + 4y + 4b + 3 = 0 \\ (x-1) = \pm 1 - y^2 \end{cases}$$

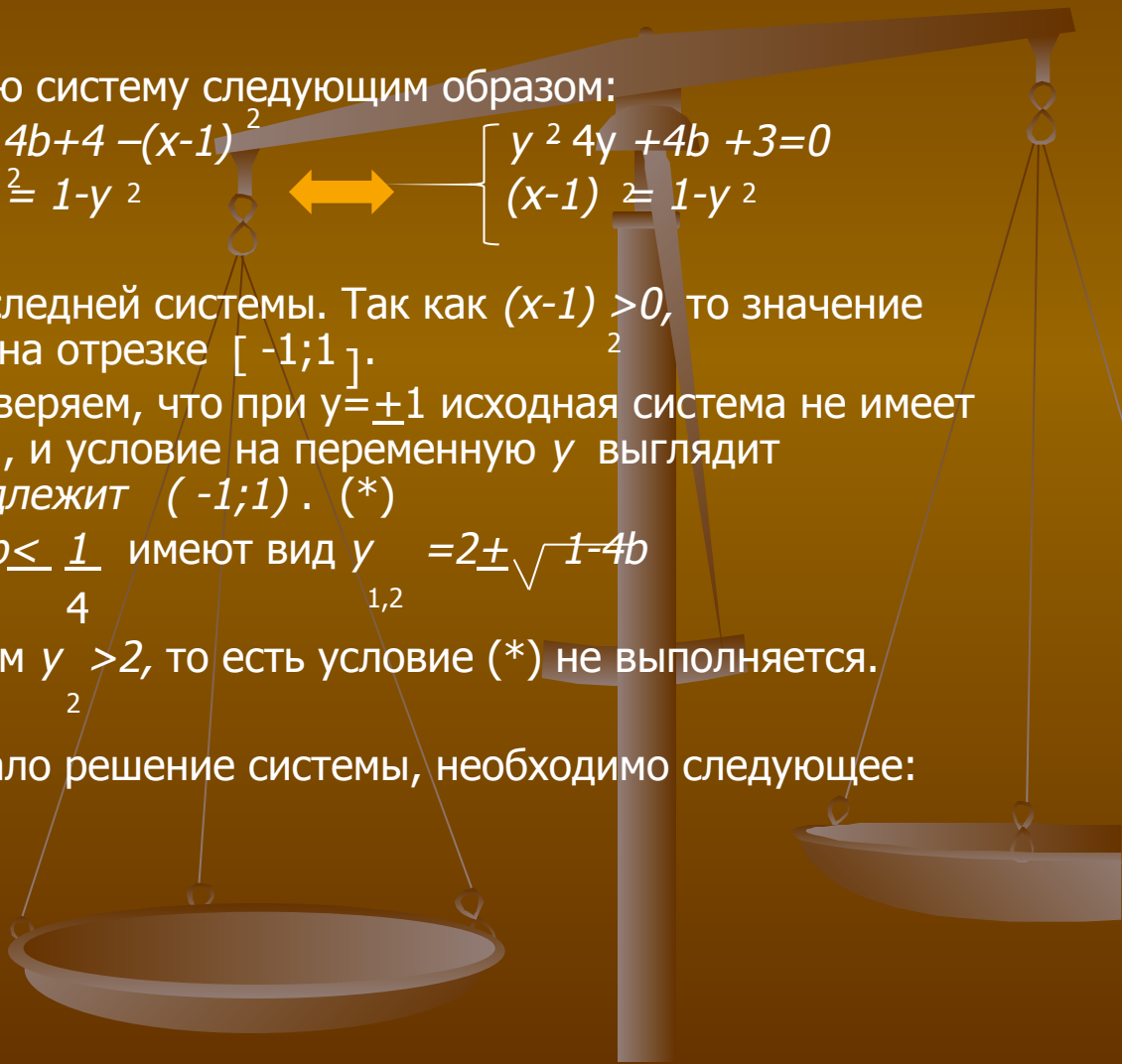
Рассмотрим второе уравнение последней системы. Так как $(x-1) \geq 0$, то значение переменной y должно лежать на отрезке $[-1; 1]$.

Путём подстановки в систему проверяем, что при $y = \pm 1$ исходная система не имеет двух действительных решений, и условие на переменную y выглядит следующим образом: y принадлежит $(-1; 1)$. (*)

Решения первого уравнения при $b \leq \frac{1}{4}$ имеют вид $y_{1,2} = 2 \pm \sqrt{1 - 4b}$

А при $b > \frac{1}{4}$ не существуют. Имеем $y > 2$, то есть условие (*) не выполняется.

Таким образом, чтобы существовало решение системы, необходимо следующее:



ПРИМЕР №4

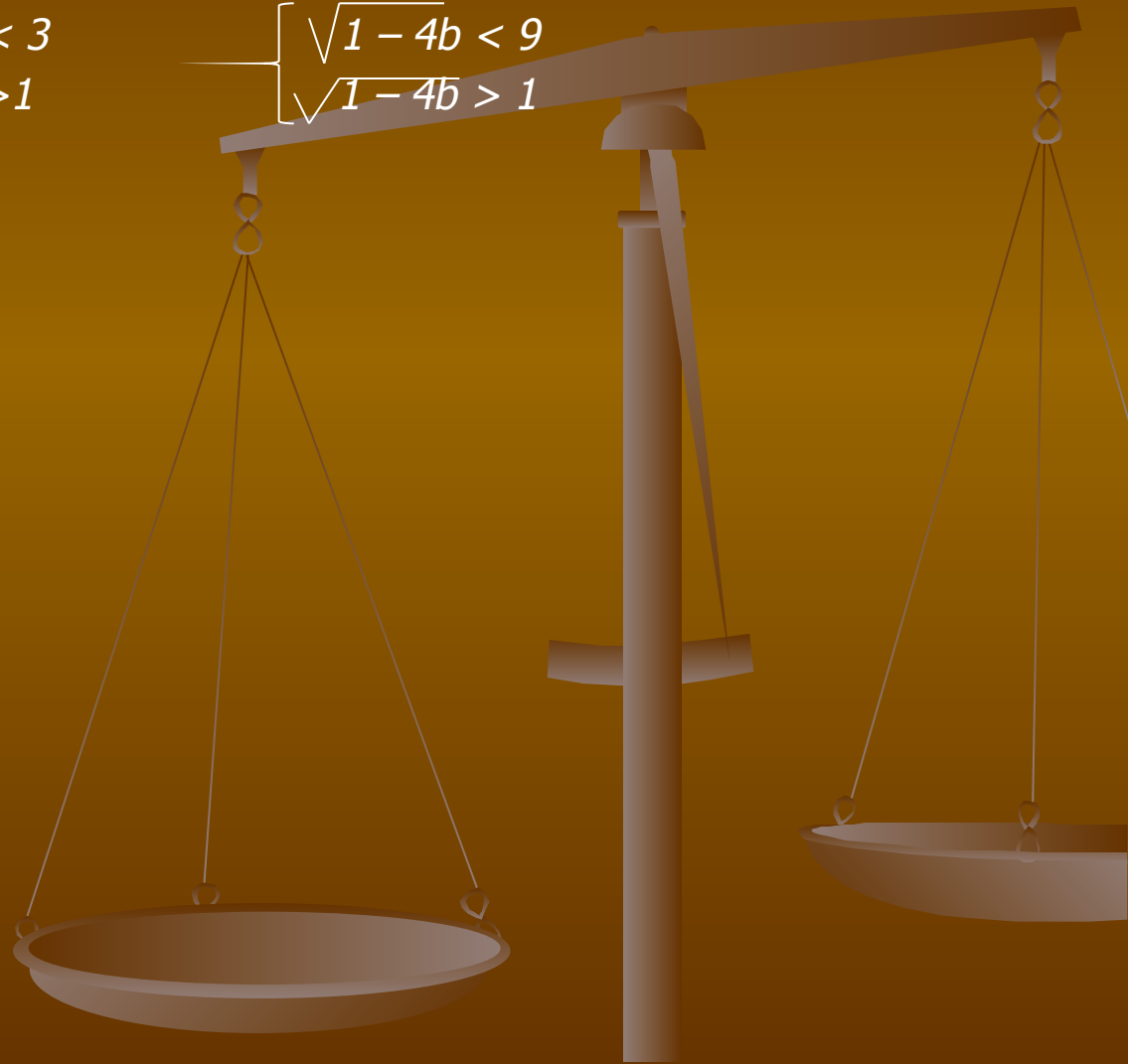
$$-1 < 2 - \sqrt{1-4b} < 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 - \sqrt{1-4b} < -1 \\ 2 - \sqrt{1-4b} < 1 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{1-4b} < 3 \\ \sqrt{1-4b} > 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{1-4b} < 9 \\ \sqrt{1-4b} > 1 \end{array} \right.$$

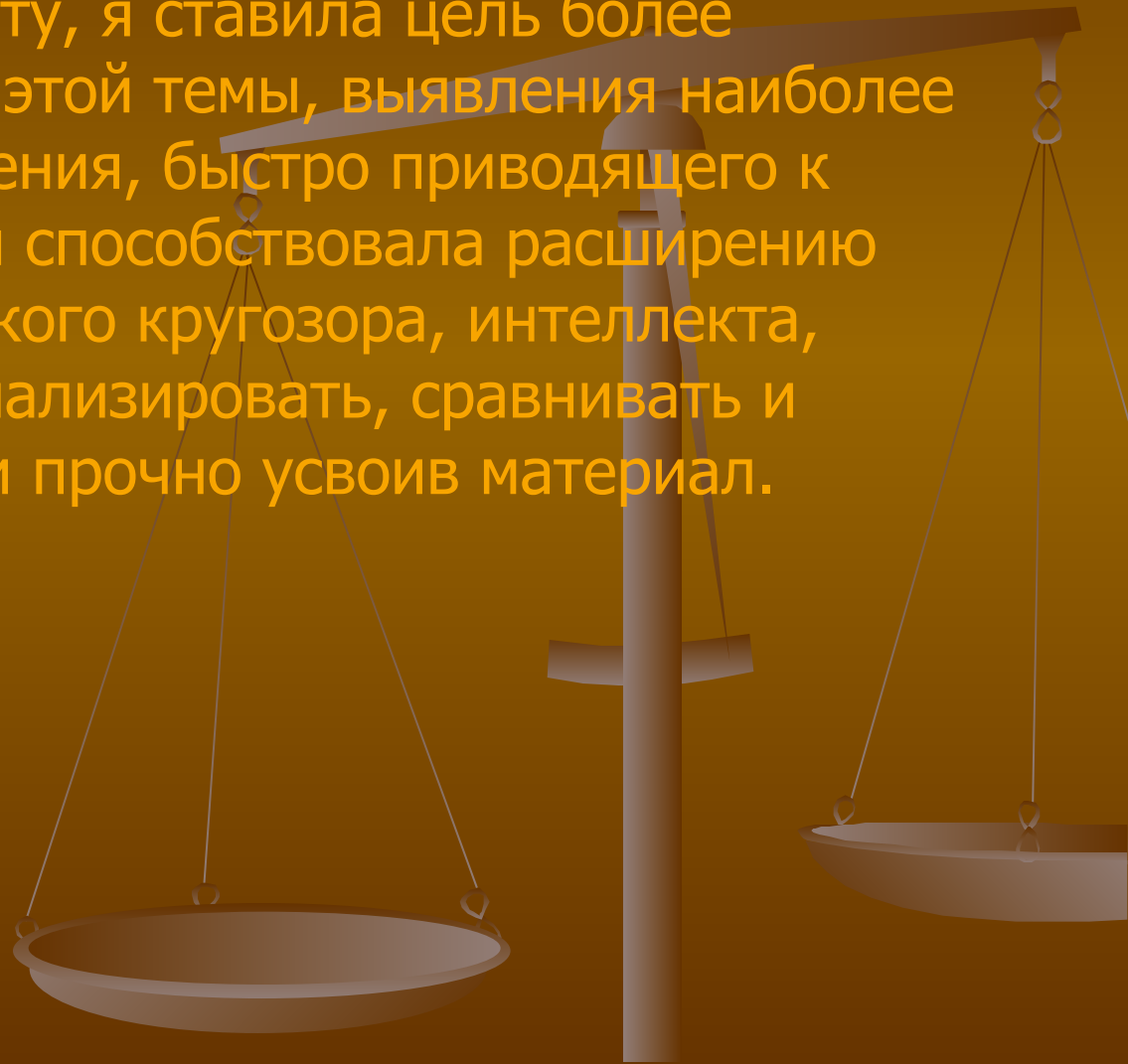
b принадлежит $(-2;0)$

Ответ. *b* принадлежит $(-2;0)$.



Заключение

- Готовя данную работу, я ставила цель более глубокого изучения этой темы, выявления наиболее рационального решения, быстро приводящего к ответу. И работая, я способствовала расширению своего математического кругозора, интеллекта, развитию умения анализировать, сравнивать и обобщать, глубоко и прочно усвоив материал.



ЛИТЕРАТУРА

1. Еженедельная учебно-методическая газета «Математика» №36/2001; №4/2002; №22/2002; №23/2002; №33/2002.
2. ОЛВЗМШ МГУ «Задачи с параметрами»
3. «Система дополнительных занятий по математике 11 класс» С.А. Агалоков

