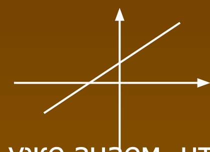
Алгебраические преобразования с параметрами

- Изучение многих физических процессов и геометрических закономерностей часто приводит к решению задач с параметрами. Некоторые ВУЗы также включают в экзаменационные билеты уравнения, неравенства и их системы, которые часто бывают весьма сложными и требующими нестандартного подхода к решению. В школе же этот один из наиболее трудных разделов школьного курса математики рассматривается только на немногочисленных факультативных занятиях. В моем реферате рассмотрены часто встречающиеся типы уравнений, неравенств и их систем, и, я надеюсь, что знания, полученные мной в процессе работы, помогут мне при сдаче школьных экзаменов и при поступлении в ВУЗ.

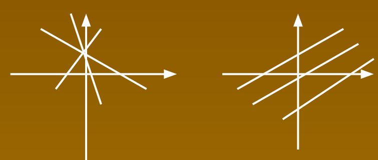
Введение

- Первой, и, пожалуй самой просто функцией является линейная функция *y=kx+m.*

Вы знаете что при конкретных *k* и *m*
графиком функции *y=kx+m*
является прямая линия.



Так же из курса школьной программы мы уже знаем, что *k=tga,* где *a*-угол наклона прямой к оси ОХ, а
m-ордината точки, в которой прямая пересекается с осью *ОУ*. И если мы будем изменять значение *k* , то через одну точку пересечения *m* с осью *ОУ* проходит несколько различных прямых. Если же *k* зафиксировать, а *m* менять, то получим семейство параллельных прямых.



Теперь поближе познакомимся с линейными уравнениями. Линейные уравнения с двумя переменными называется уравнение вида *ax+by+c=0.* Если *b=0*, то его можно привести к виду *y= -ax:b-c:b*, и, положив *k= -a:b* и
m= -c:b, получить стандартный вид *y=kx+m.* Если же *b=0*, то уравнение приводится к виду *x= -c:b* и мы получаем прямую, параллельную оси *OY*.

Рассмотри подробнее случай *b=0*. Тогда, как было указано, мы можем привести уравнение к виду *y=kx+m.* Посмотрим, как меняется график функции *y(x)* при изменении коэффициентов *k* и *m* ,то есть как функция *y(x)* зависит от параметров *k* и *m.*

Если *k<0,* то функция убывает, если *k=0,* то функция постоянна, и если *k>0,* то функция возрастает (рис. 1).

Если *m<0,* то точка пересечения с осью ОУ будет в нижней полуплоскости, если *m=0,* то прямая пройдёт через начало координат, и если *m>0,* то график будет пересекаться с осью *ОУ* в верхней полуплоскости (рис. 2).

k<0 *k=0* *k>0*

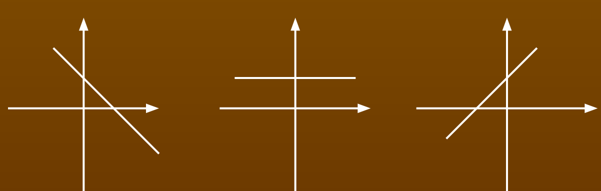


рис. 1

m<0 *m=0* *m>0*

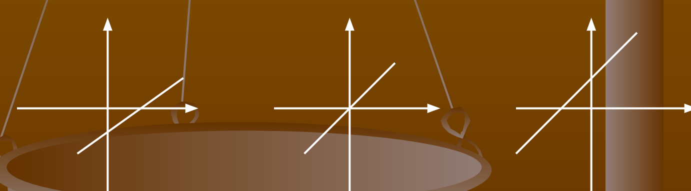
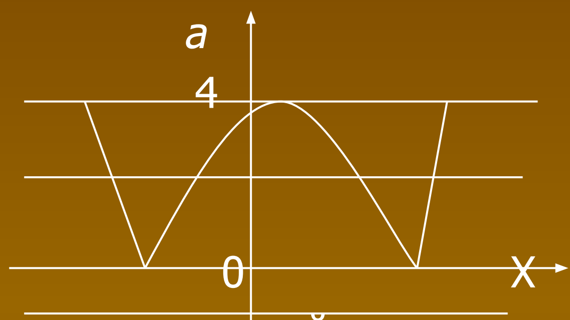


рис. 2

П Р И М Е Р №1

- Для каждого значения *a* определите число решений уравнения $/x^2-2x-3/=a$

- **Решение.** В этой задаче параметр уже выражен через переменную. Таким образом, надо просто аккуратно построить график данной функции.



- Количество решений уравнения при фиксированном а определяется числом точек пересечения построенного графика с прямыми *y=a*, проходящими параллельно оси Х. Отсюда сразу следует, что при *a>4* и при *a=0* имеем два решения, при *a=4* – три решения, при а *(0;4)* – четыре решения и, наконец, при *a<0* решений не существует.
- **Ответ.** Если *a* (4;+00), то два решения;
- если *a* {4}, то три решения;
- если *a* (0;4), то четыре решения;
- если *a* {0}, то два решения;
- если *a* (-00; 0), то нет решений.

П Р И М Е Р №2

Найдите все значения параметра *p,* при каждом из которых уравнение $(x-p)^2(p(x-p)^2-p-1)=-1$ имеет больше положительных корней, чем отрицательных.

Решение. Если p=0, то данное уравнение принимает вид $x^2=1$. Это уравнение имеет корни $x_1=1$ и $x_2=-1$. Следовательно, в этом случае число положительных и число отрицательных корней одинаково, и такое *p* условию задачи не удовлетворяет.

Пусть $p\neq 0$. Обозначим $z=(x-p)^2\geq 0$, тогда исходное уравнение принимает вид $pz^2-(p+z)z+1=0$ (*).

Корнями уравнения (*) являются $z_1=1$ $z_2=\frac{1}{p}$.

1)Если $p<0$, то $z_2<0$, что противоречит определению *z* , поэтому остается только $z=1$ и исходное уравнение имеет два корня: $x_1=p+1$ и $x_2=p-1$. Легко видеть, что при $-1< p <0$ имеем $x_1>0$ *и* $x_2<0$,

при $p<-1$ имеем $x_1<0$ и $x_2<0$,

а при $p=-1$ получаем $x_1=0$ и $x_2=-2$.

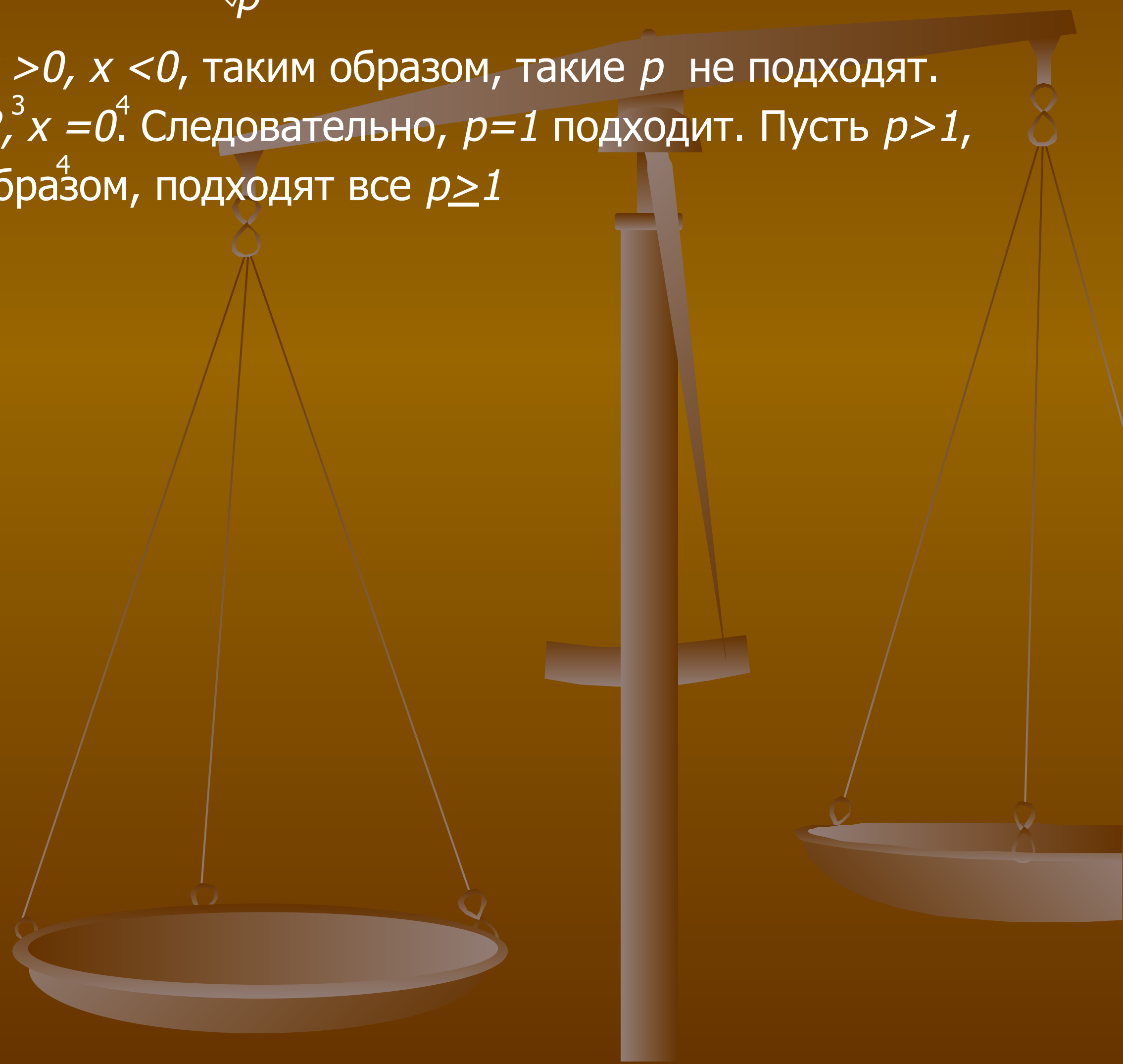
Следовательно, ни при каком $p<0$ исходное уравнение не имеет положительных корней больше, чем отрицательных, то есть никакие значения $p<0$ условию не удовлетворяют.

П Р И М Е Р №2

- 2) Если $p>0$, то и $z_2>0$ исходное уравнение имеет четыре корня:

$$x_1=p+1,\qquad x_2=p-1,\qquad x_3=p+\frac{1}{\sqrt{p}},\qquad x_4=p-\frac{1}{\sqrt{p}}$$

Пусть $0<p<1$, тогда $x_1>0$, $x_2<0$, $x_3>0$, $x_4<0$, таким образом, такие p не подходят. Пусть $p=1$. Тогда $x_1=2$, $x_2=0$, $x_3=2$, $x_4=0$. Следовательно, $p=1$ подходит. Пусть $p>1$, тогда $x_i>0$ при $i=1,2,3,4$. Таким образом, подходят все $p\geq 1$



Ответ. *p* принадлежит [1;+00).

П Р И М Е Р №3

Решите уравнение $\log_a a^2 + \log_a (x^2 - 1) = \log_a (\sqrt{x-1})^3 + \log_a \sqrt{x+1}$.

Решение ОДЗ: $x > 1$, $a > 0$, $a \neq 1$.

$$\log_a a^2 + \log_a (x^2 - 1) = \log_a (\sqrt{x-1})^3 + \log_a \sqrt{x+1}$$

$$\log_a (a^2(x^2 - 1)) = \log_a ((\sqrt{x-1})^3 \sqrt{x+1}),$$

$$a^2(x^2-1) = (x-1)\sqrt{(x-1)(x+1)},$$

$$a^2(x-1)(x+1) = (x-1)\sqrt{(x-1)(x+1)}$$

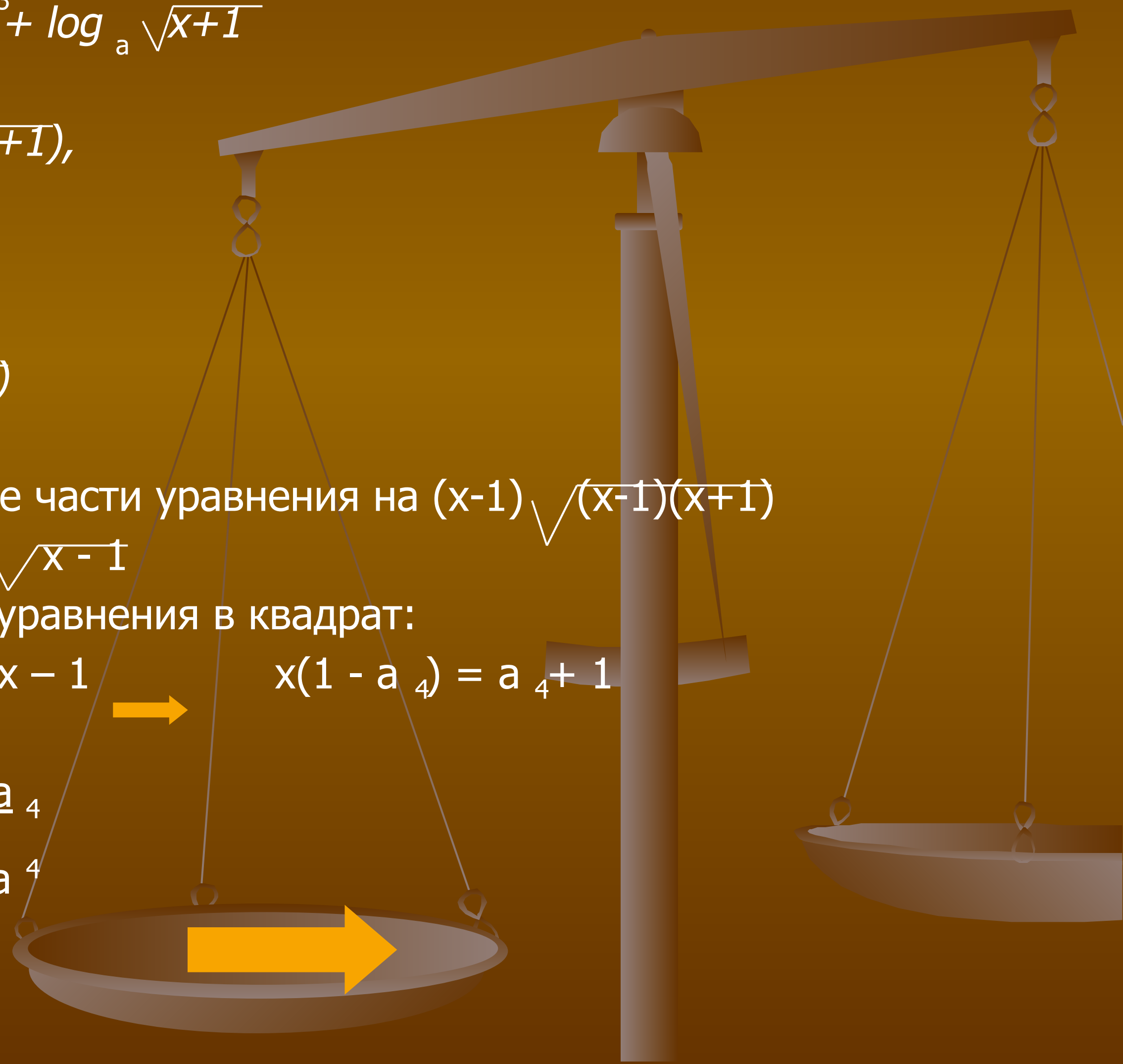
Так как $x \neq -1$ и $x \neq 1$, сократим обе части уравнения на $(x-1)\sqrt{(x-1)(x+1)}$

$$a^2\sqrt{x+1} = \sqrt{x-1}$$

Возведём обе части полученного уравнения в квадрат:

$a^4(x+1) = x-1$ → $a^4 x + a^4 = x - 1$ → $x(1 - a^4) = a^4 + 1$

Так как $a \neq -1$ и $a \neq 1$, то $x = \dfrac{1+a^4}{1-a^4}$



П Р И М Е Р №3

Для того чтобы значения *x* являлось решением уравнения, должно выполняться условие $x>1$, то есть $\frac{1+a^4}{1-a^4} > 0$

Выясним, при каких значениях параметр *a* это неравенство истинно:

$\frac{1+a^4}{1-a^4} - 1>0$, $\frac{2a^4}{1-a^4}>0$

Так как $a>0$, то полученная дробь положительна, если $1-a^4>0$, то есть при $a<1$.

Итак, при $0<a<1$, $x>1$, значит при $0<a<1$ x является корнем исходного уравнения.

Ответ. При $a<0$, $a=1$ уравнение не имеет смысла,

при $a \geq 1$ решений нет,

при $0<a<1$ $x=\frac{1+a^4}{1-a^4}$

П Р И М Е Р №4

Найдите все значения параметра *b,* при которых система уравнений имеет два действительных решения.

$$\begin{cases} 4y = 4b + 3 - x^2 + 2x \\ x^2 + y^2 = 2x \end{cases}$$

Решение. Преобразуем исходную систему следующим образом:

$$\begin{cases} 4y = 4b + 3 - x^2 + 2x \\ x^2 + y^2 = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y = 4b+4-(x-1)^2 \\ (x-1)^2 = 1-y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 4y + 4b + 3 = 0 \\ (x-1)^2 = 1-y^2 \end{cases}$$

Рассмотрим второе уравнение последней системы. Так как $(x-1)^2 > 0$, то значение переменной *y* должно лежать на отрезке $[-1;1]$.

Путём подстановки в систему проверяем, что при $y = \pm 1$ исходная система не имеет двух действительных решений, и условие на переменную *y* выглядит следующим образом: *y принадлежит* $(-1;1)$. (*)

Решения первого уравнения при $b \leq \frac{1}{4}$ имеют вид $y_{1,2} = 2 \pm \sqrt{1-4b}$

А при $b > \frac{1}{4}$ не существуют. Имеем $y_2 > 2$, то есть условие (*) не выполняется.

Таким образом, чтобы существовало решение системы, необходимо следующее:

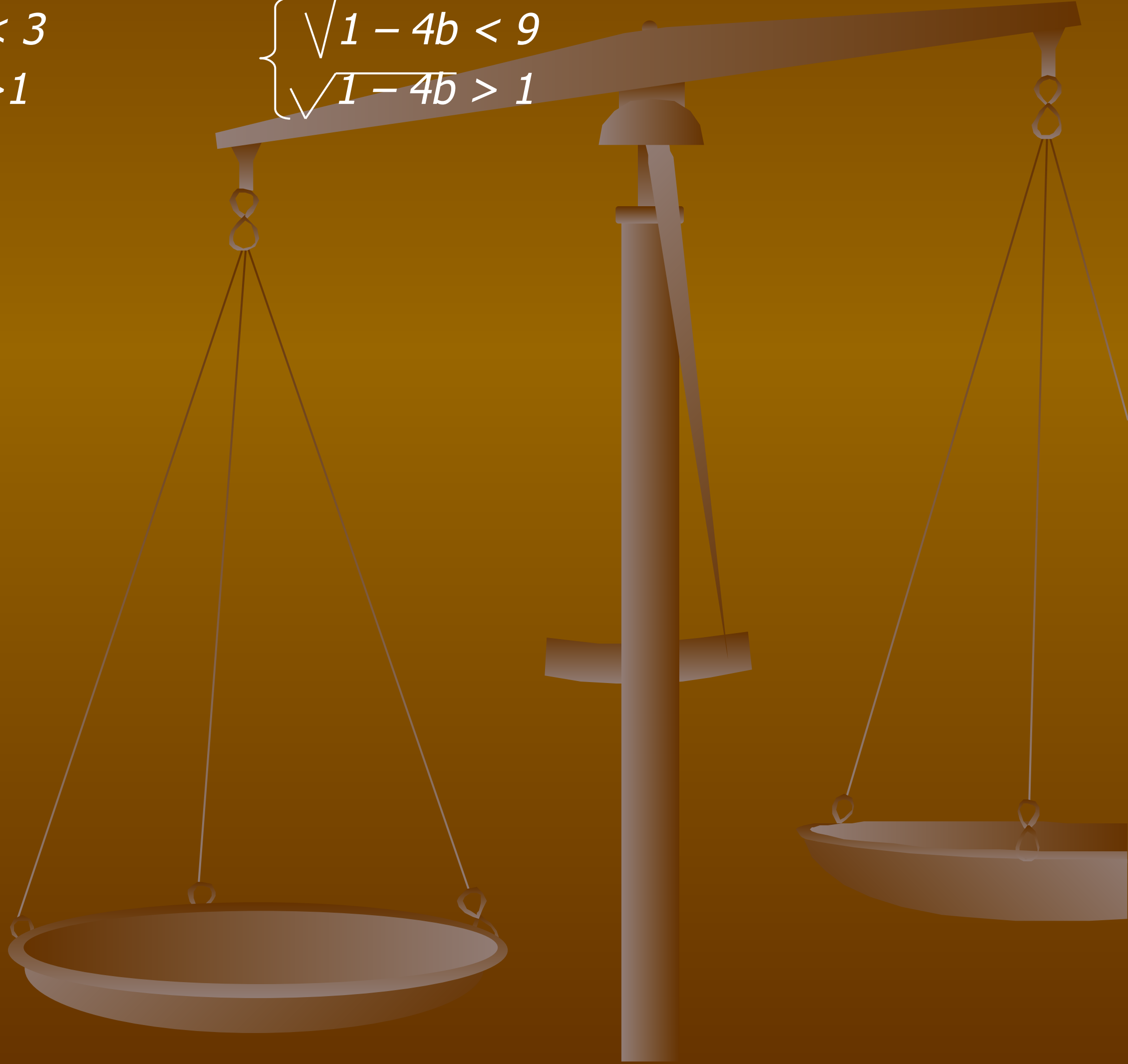
П Р И М Е Р №4

$-1 < 2 - \sqrt{1-4b} < 1$

$\begin{cases} 2 - \sqrt{1-4b} < -1 \\ 2 - \sqrt{1-4b} < 1 \end{cases}$ $\begin{cases} \sqrt{1 - 4b} < 3 \\ \sqrt{1 - 4b} > 1 \end{cases}$ $\begin{cases} \sqrt{1 - 4b} < 9 \\ \sqrt{1 - 4b} > 1 \end{cases}$

b принадлежит (-2;0)

<u>Ответ.</u> *b принадлежит (-2;0).*



Заключение

- Готовя данную работу, я ставила цель более глубокого изучения этой темы, выявления наиболее рационального решения, быстро приводящего к ответу. И работая, я способствовала расширению своего математического кругозора, интеллекта, развитию умения анализировать, сравнивать и обобщать, глубоко и прочно усвоив материал.

ЛИТЕРАТУРА

1. Еженедельная учебно-методическая газета «Математика» №36/2001; №4/2002; №22/2002; №23/2002; №33/2002.
2. ОЛВЗМШ МГУ «Задачи с параметрами»
3. «Система дополнительных занятий по математике 11 класс» С.А. Агалоков