

# Алгоритмически неразрешимые проблемы

В теории алгоритмов известны задачи, о которых **доказано**, что для их решения не существует алгоритма.

Такие задачи называются **алгоритмически неразрешимыми**.

# ТЕОРЕМА (проблема “останова”):

**Не существует** алгоритма (машины Тьюринга), позволяющего по описанию произвольного алгоритма и его исходных данных (и алгоритм и данные заданы символами на ленте машины Тьюринга) определить, **останавливается ли** этот алгоритм на этих данных или работает бесконечно.

Иными словами: проблема «останова», т.е. определения по записи произвольного алгоритма, а также по записи произвольного "входа", остановится ли вычислительное устройство, действующее в соответствии с данным алгоритмом и обрабатывающее данный "вход", или же оно будет работать бесконечно долго, является алгоритмически неразрешимой.

## ПОНЯТИЕ САМОПРИМЕНИМОСТИ АЛГОРИТМА :

Алгоритм называется **самоприменимым**, если он эффективно перерабатывает текст, соответствующий его собственной записи, в некоторый результат за конечное число шагов.

В противном случае - если алгоритм не останавливается и продолжает работать бесконечно долго, он называется **несамоприменимым**.

**ТЕОРЕМА** (проблема распознавания самоприменимости):

Проблема распознавания самоприменимости  
алгоритмически неразрешима.

Проблема распознавания самоприменимости является частным случаем проблемы останова.  
Алгоритмическая неразрешимость более общей проблемы будет очевидна.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:**

От противного

Пусть такая машина существует.

Назовем ее А.

Тогда А

- любой самоприменимый шифр перерабатывает в '1'  
(значит машина самоприменима)
- любой несамоприменимый в '0'  
(машина несамоприменима)

Если существует такая машина А,  
то существует и такая машина В, что:

- несамоприменимые машины перерабатывает в '1'
- самоприменимые не перерабатывает (работает бесконечно)

Рассмотрим два случая:

1. В самоприменима
1. В несамоприменима

1. Если  $V$  самоприменима, то она, будучи применена к своему шрифту  $V^*$ , будет работать бесконечно.

Но это означает, что данный алгоритм несамоприменим.  
Противоречие.

2. Если  $V$  несамоприменима, то она, будучи применена к своему шрифту  $V^*$ , остановится с 1.  
Применимость  $V$  к  $V^*$  означает, что  $V$  самоприменима.  
Противоречие.

Следовательно, таких машин  $A$  и  $B$  не существует.  
Теорема доказана.

# ПРИМЕРЫ НЕРАЗРЕШИМЫХ ПРОБЛЕМ:

## ◆ Десятая проблема Гильберта

Пусть задан многочлен  $n$ -ой степени с целыми коэффициентами –  $P$ , существует ли алгоритм, который определяет, имеет ли уравнение  $P=0$  решение в целых числах?

Ю.В. Матиясевич показал, что такого алгоритма **не существует**, т.е. отсутствует общий метод определения целых корней уравнения  $P=0$  по его целочисленным коэффициентам.





## Проблема тотальности

По произвольному заданному алгоритму определить, будет ли он останавливаться на всех возможных наборах исходных данных.

Другая формулировка этой задачи – определить, является ли алгоритм  $P$  всюду определённым или частично определённым?

## ❖ Проблема “останова” и сводящиеся к ней задачи

### ❖ ТЕОРЕМА:

**Задача о печатании данного знака машины на чистой ленте точно один раз алгоритмически неразрешима.**

### **ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:**

Пусть дана машина  $T$ , которая работает на чистой ленте.

1. Преобразуем машину  $T$  в машину  $D$

1.1 если в алфавите машины  $T$  нет “0”, то  $D$  совпадает с  $T$

1.2 если “0” есть, то заменяем в алфавите  $D$  “0” новым знаком, который не содержался в ее алфавите.

2. Построим машину  $E$  такую, которая работает также, как и машина  $T$ , но после остановки машины  $T$  она ставит “0” и тоже останавливается.

3. Вывод: “0” печатается один раз, если машина Тьюринга останавливается на чистой ленте.

Задача о печатании “0” равносильна задаче об остановке машины на чистой ленте.

## ❖ ТЕОРЕМА:

**Задача о печатании данного знака машины на чистой ленте бесконечное количество раз алгоритмически неразрешима**

**Доказательство:**

Возьмем знак «0». Пусть машина Тьюринга  $T$  работает на чистой ленте.

1. Преобразим ее в новую машину Тьюринга  $D$ .

1.1 Если  $T$  не содержит в своем алфавите «0», то  $D$  совпадает с  $T$ .

1.2 Если  $T$  имеет этот знак в своем алфавите, то в алфавите машины  $D$  «0» будет заменен любым знаком, ранее не входящим в алфавит машины.

D остановится тогда, когда остановится T.

2. Построим машину E, которая работает как D вплоть до ее остановки. После чего E переходит в состояние A и печатает «0» бесконечно много раз ( $A\lambda \rightarrow 0RA$ ).
3. Получим, что символ «0» печатается бесконечно много раз в том и только в том случае, если машина T останавливается на чистой ленте. Значит задача о печатании бесконечно большого числа нулей равносильна задаче об остановке машины на чистой ленте.

Поскольку задача останова алгоритмически неразрешима, то и задача о печатании символа бесконечно много раз тоже *неразрешима*.

## ❖ ТЕОРЕМА:

**Проблема распознавания эквивалентности машин Тьюринга является алгоритмически неразрешимой.**

По двум произвольным машинам Тьюринга определить, будут ли они выдавать одинаковые выходные результаты на всех исходных данных.

# Примеры задач, для которых не найден алгоритм решения

## 1. Вычисление совершенных чисел

Совершенные числа – это числа, которые равны сумме своих делителей, например:  $28 = 1+2+4+7+14$ .

Определим функцию  $S(n)$  = n-ое по счёту совершенное число и поставим задачу вычисления  $S(n)$  по произвольно заданному  $n$ . **Не найден общий метод вычисления совершенных чисел**, мы даже не знаем, множество совершенных чисел конечно или счетно.

## 2. Распределение девяток в записи числа $\pi$ (пи)

Определим функцию  $f(n) = i$ ,

где  $n$  – количество девяток подряд в десятичной записи числа  $\pi$

,

а  $i$  – номер самой левой девятки из  $n$  девяток подряд:

$\pi = 3,141592\dots f(1) = 5.$

Задача состоит в вычислении функции  $f(n)$  для произвольно заданного  $n$ .

Поскольку число  $\pi$  является иррациональным и трансцендентным, то мы не знаем никакой информации о распределении девяток (равно как и любых других цифр) в десятичной записи числа  $\pi$ . Вычисление  $f(n)$  связано с вычислением последующих цифр в разложении  $\pi$ , до тех пор, пока мы не обнаружим  $n$  девяток подряд, однако у нас нет общего метода вычисления  $f(n)$ , поэтому для некоторых  $n$  вычисления могут продолжаться бесконечно – мы даже не знаем в принципе (по природе числа  $\pi$ ) существует ли решение для всех  $n$ .

## Вопросы для самопроверки:

1. Какие задачи называются алгоритмически неразрешимыми?
2. Сформулируйте проблему тотальности.
3. Какой алгоритм называется самоприменимым/несамоприменимым?
4. В чем заключается проблема останова?
5. Какой способ доказательства неразрешимости задачи является самым распространенным?
6. Является ли задача, для которой не найден алгоритм решения неразрешимой?
7. Сформулируйте проблему распознавания эквивалентности.