

A collection of objects is arranged on a light-colored, textured surface. In the top left, a portion of a chessboard with a checkered pattern and several chess pieces is visible. Below the chessboard, there are two medals: one with a red ribbon and a star-shaped emblem, and another with a blue ribbon and a star-shaped emblem. A pair of thin-framed glasses lies horizontally across the middle. In the bottom left corner, a small, round, silver-colored compass is visible. The text 'Алгоритмы теории игр' is written in a serif font on the right side of the image.

Алгоритмы теории игр

Михаил Лукин, гр. 3539



План лекции

- ◆ Введение
- ◆ Матричные игры
- ◆ Игры с седловой точкой
- ◆ Смешанные стратегии
- ◆ Применение
- ◆ Итоги
- ◆ Литература



Введение

- ◆ Первая значительная книга по теории игр появилась в 1944г (Дж. фон Нейман, С. Моргенштерн «Теория игр и экономическое поведение»).
- ◆ Предмет оказался чрезвычайно сложным, даже для математики .
- ◆ Теория игр она нашла свое применение, прежде всего, в военном деле и экономике.



Матричные игры

- ◆ Этот раздел теории игр является наиболее полно изученным.



Определения

- ◆ Система $\Gamma = (X, Y, K)$, где X и Y – непустые множества, и функция $K : X \times Y \rightarrow R$, называется антагонистической игрой в нормальной форме. Элементы $x \in X$ и $y \in Y$ называются стратегиями игроков 1 и 2 соответственно.
- ◆ Антагонистические игры, в которых оба игрока имеют конечные множества стратегий, называются матричными.

- 
- ◆ Пусть игрок 1 имеет всего m стратегий, а игрок 2 – n стратегий.
 - ◆ Установим биекцию между множествами:

1. X и $M = \{1, \dots, m\};$

2. Y и $N = \{1, \dots, n\}.$

- ◆ Тогда игра Γ полностью задается матрицей

$$A = \{\alpha_{i,j}\}$$
$$\alpha_{i,j} = K(x_i, y_j),$$

$$(i, j) \in M \times N,$$

$$(x_i, y_j) \in X \times Y, \quad i \in M$$



Примеры

1. «Игра на уклонение».
2. Дискретная игра типа дуэли.

$$a_{ij} = \frac{i}{n} - \left(1 - \frac{i}{n}\right) \frac{j}{n} = \frac{n(i-j) + ij}{n^2}, \quad i < j$$

$$16 \cdot A =$$

0	-2	-5	-8
2	0	2	0
5	-2	0	8
8	0	8	0

Игры с седловой точкой

- ◆ **Теорема.** Пусть имеются два числовых множества A и B и функция $f : A \times B \rightarrow R$. Тогда $\max_{x \in A} \min_{y \in B} f(x, y) \leq \min_{y \in B} \max_{x \in A} f(x, y)$.
- ◆ Пусть дана $f : A \times B \rightarrow R$. Точка (x_0, y_0) называется седловой точкой функции f , если
 1. $\forall x \in A \quad f(x, y_0) \leq f(x_0, y_0)$
 2. $\forall y \in B \quad f(x_0, y_0) \leq f(x_0, y)$

Игры с седловой точкой 2

- ◆ **Теорема 2.** Пусть $f : A \times B \rightarrow R$ и существуют $\max_{x \in A} \min_{y \in B} f(x, y)$ и $\min_{y \in B} \max_{x \in A} f(x, y)$. Тогда

$$\max_{x \in A} \min_{y \in B} f(x, y) = \min_{y \in B} \max_{x \in A} f(x, y)$$

равносильно тому, что f имеет седловую точку.

- ◆ *Может ли у матрицы быть несколько седловых точек?*
- ◆ *Все ли матрицы имеют седловую точку?*



Смешанные стратегии

- ◆ **Основная теорема матричных игр.**
В смешанных стратегиях игра двух лиц с нулевой суммой имеет седловую точку.



Итеративный метод Брауна – Робинсона

- ◆ Идея метода – многократное фиктивное разыгрывание игры с заданной матрицей выигрыша.
- ◆ Недостаток: малая скорость сходимости.

$$\bar{v}_k = \max_i \sum_{j=1}^n a_{ij} \eta_j^k = \sum_{j=1}^n a_{i_{k+1}j} \eta_j^k$$
$$\underline{v}_k = \min_j \sum_{i=1}^n a_{ij} \xi_i^k = \sum_{i=1}^n a_{ij_{k+1}} \xi_i^k$$

$$\max_k (\underline{v}_k / k) \leq v \leq \min_k (\bar{v}_k / k)$$



Монотонный итеративный алгоритм

$$x_N = (\xi_1^N, \dots, \xi_m^N) \in X \quad c_N = (\gamma_1^N, \dots, \gamma_n^N) \in R^N$$

$$x_N = (1 - \alpha_N)x_{N-1} + \alpha_N \tilde{x}_N \quad c_N = (1 - \alpha_N)c_{N-1} + \alpha_N \tilde{c}_N$$

$$0 \leq \alpha_N \leq 1$$

$$\underline{v}_{N-1} = \min_{j=1, \dots, n} \gamma_j^{N-1}$$



Пример применения

- ◆ Выбор оптимальной стратегии в условиях неопределенности.

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3
A_1	3	6	8
A_2	9	4	2
A_3	7	5	4



Итоги

- ◆ Матричные игры – наиболее изученный раздел теории игр.
- ◆ Основное применение теории игр – экономика.



Литература

1. Петросян, Зенкевич, Семина «Теория игр»
2. <http://fmi.asf.ru/vavilov/Tiv.htm>
3. <http://vvo.psati.ru/files/RPU/page2.files/index10.html>
4. <http://www.dvo.ru/studio/linpro/buka/node20.html> – основная теорема двойственности
5. Робинсон Дж. «Итеративный метод решения игр»