Алгоритмы теории игр

Михаил Лукин, гр. 3539

План лекции

- Введение
- Матричные игры
  - Игры с седловой точкой
  - Смешанные стратегии
- Применение
- Итоги
- Литература

Введение

- Первая значительная книга по теории игр появилась в 1944г (Дж. фон Нейман, С. Моргенштерн «Теория игр и экономическое поведение»).
- Предмет оказался чрезвычайно сложным, даже для математики .
- Теория игр она нашла свое применение, прежде всего, в военном деле и экономике.

Матричные игры

- Этот раздел теории игр является наиболее полно изученным.

Определения

- Система Г = (X, Y, K), где X и Y – непустые множества, и функция $K : X \times Y \to R$, называется антагонистической игрой в нормальной форме. Элементы $x \in X$ и $y \in Y$ называются стратегиями игроков 1 и 2 соответственно.
- Антагонистические игры, в которых оба игрока имеют конченые множества стратегий, называются матричными.

- Пусть игрок 1 имеет всего m стратегий, а игрок 2 – n стратегий.
- Установим биекцию между множест-вами:

1. X и M = {1, …, m};
2. Y и N = {1, …, n}.

- Тогда игра Г полностью задается матрицей

$$A = \{\alpha_{i,j}\}$$

где

$$\alpha_{i,j} = K(x_i, y_j),$$

$$(i, j) \in M \times N,$$

$$(x_i, y_j) \in X \times Y, \quad i \in M$$

Примеры

1. «Игра на уклонение».
2. Дискретная игра типа дуэли.

$$a_{ij} = \frac{i}{n} - \left(1 - \frac{i}{n}\right)\frac{j}{n} = \frac{n(i-j) + ij}{n^2} \quad , \ \mathrm{i} < \mathrm{j}$$

$$16 \cdot A =$$

0	-2	-5	-8
2	0	2	0
5	-2	0	8
8	0	8	0

Игры с седловой точкой

- **Теорема.** Пусть имеются два числовых множества A и B и функция $f: A \times B \to R$. Тогда $\max_{x \in A} \min_{y \in B} f(x, y) \le \min_{y \in B} \max_{x \in A} f(x, y)$.
- Пусть дана $f: A \times B \to R$. Точка (x_0, y_0) называется <u>седловой точкой</u> функции f, если 1. $\forall x \in A \quad f(x, y_0) \le f(x_0, y_0)$

  2. $\forall y \in B \quad f(x_0, y_0) \le f(x_0, y)$

Игры с седловой точкой 2

- **Теорема 2.** Пусть $f : A \times B \to R$ и существуют $\max\limits_{x \in A} \min\limits_{y \in B} f(x, y)$ *и* $\min\limits_{y \in B} \max\limits_{x \in A} f(x, y)$. Тогда

$$\max_{x \in A} \min_{y \in B} f(x, y) = \min_{y \in B} \max_{x \in A} f(x, y)$$

равносильно тому, что f имеет седловую точку.

- *Может ли у матрицы быть несколько седловых точек?*
- *Все ли матрицы имеют седловую точку?*

Смешанные стратегии

- **Основная теорема матричных игр.** В смешанных стратегиях игра двух лиц с нулевой суммой имеет седловую точку.

Итеративный метод Брауна – Робинсона

- Идея метода – многократное фиктивное разыгрывание игры с заданной матрицей выигрыша.
- Недостаток: малая скорость сходимости.

$$\overline{v}_k = \max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\eta_j^k = \sum_{j=1}^{n} a_{i_{k+1}j}\eta_j^k$$

$$\underline{v}_k = \min_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\xi_i^k = \sum_{m=1}^{m} a_{ij_{k+1}}\xi_i^k$$

$$\max_k(\underline{v}_k / k) \le v \le \min_k(\overline{v}_k / k)$$

Монотонный итеративный алгоритм

$$x_N = (\xi_1^N, \ldots, \xi_m^N) \in X \quad c_N = (\gamma_1^N, \ldots, \gamma_n^N) \in R^N$$

$$x_N = (1-\alpha_N) x_{N-1} + \alpha_N \tilde{x}_N \quad c_N = (1-\alpha_N) c_{N-1} + \alpha_N \tilde{c}_N$$

$$0 \le \alpha_N \le 1$$

$$\underline{v}_{N-1} = \min_{j=1,\ldots n} \gamma_j^{N-1}$$

Пример применения

- Выбор оптимальной стратегии в условиях неопределенности.

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3
A_1	3	6	8
A_2	9	4	2
A_3	7	5	4

Итоги

- Матричные игры – наиболее изученный раздел теории игр.
- Основное применение теории игр – – экономика.

Литература

1. Петросян, Зенкевич, Семина «Теория игр»
2. http://fmi.asf.ru/vavilov/Tiv.htm
3. http://vvo.psati.ru/files/RPU/page2.files/index10.html
4. http://www.dvo.ru/studio/linpro/buka/node20.html – основная теорема двойственности
5. Робинсон Дж. «Итеративный метод решения игр»