

# Биостатистика

## 3. Анализ количественных признаков

Рубанович А.В.

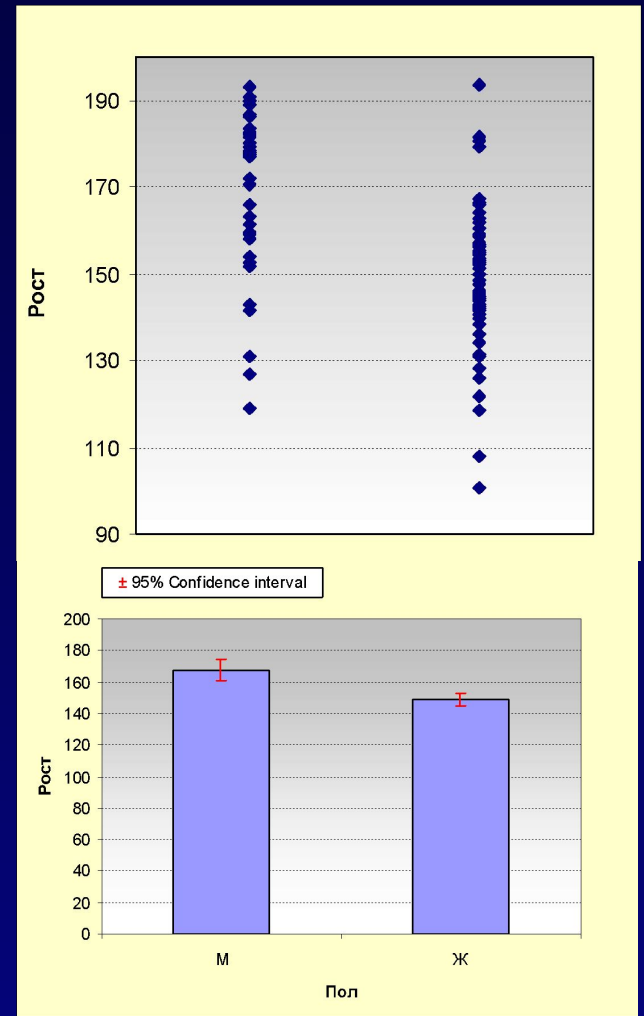
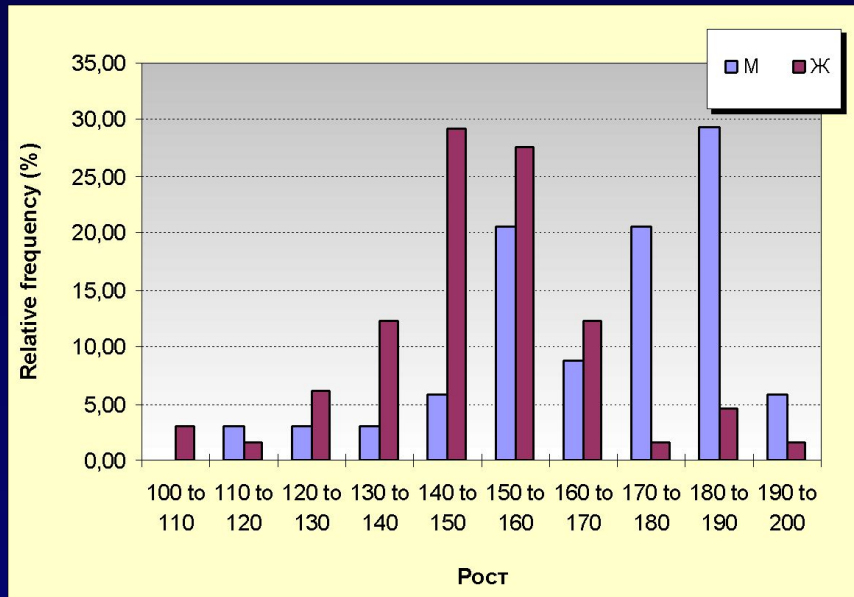
*Институт общей генетики им. Н.И. Вавилова РАН*

# Чем мы занимались на предыдущем занятии?

- Мы вспомнили общепринятые методы описания и представления данных
- На примере качественных признаков (данных о частотах) познакомились с принципами построения и проверки статистических гипотез
- Поговорили о вероятностях возможных ошибок, возникающих при использовании всякого статистического теста
- При этом мы сознательно не затрагивали ряд традиционных для статистики тем: сравнение средних, критерий Стьюдента и т.д.
- Отчасти потому, что вы об этом наверняка слышаны, но в основном из методических соображений

# Сравнение средних

Перейдем, наконец, к задаче о сравнении средних для двух выборок. Например, рост в выборках «М» и «Ж»



Нулевая гипотеза состоит в предположении, что обе выборки изъятые из одной генеральной совокупности (т.е. различий нет):

$$H_0: \bar{x}_1 = \bar{x}_2$$

$$H_1: \bar{x}_1 \neq \bar{x}_2 \text{ (двусторонний тест)}$$

Дальше надо предложить способ оценить вероятность ошибки I рода

# Сравнение средних

На прошлом занятии мы рассмотрели достаточно универсальный способ построения статистических критериев:  $Z$  – статистика, т.е.  $Z = \xi / \sigma_\xi$

$$Z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}}, \text{ т.е. разность средних, деленная на стандартное отклонение этой разности.}$$

Есть надежда, что эта величина имеет нормальное распределение со средним 0 и дисперсией 1. Так оно и есть, но только при больших объемах выборок!

Для не очень больших выборок распределение величины  $t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}}$  следует распределению Стьюдента.



Это распределение случайной величины, равной

$$t = \frac{\xi_0}{\sqrt{\frac{1}{k} (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_k^2)}}, \text{ где все } \xi_i - \underline{\text{нормальны}}$$

$k$  – число степеней свободы

Вильям Стьюдент (Госсет) (1876-1936)

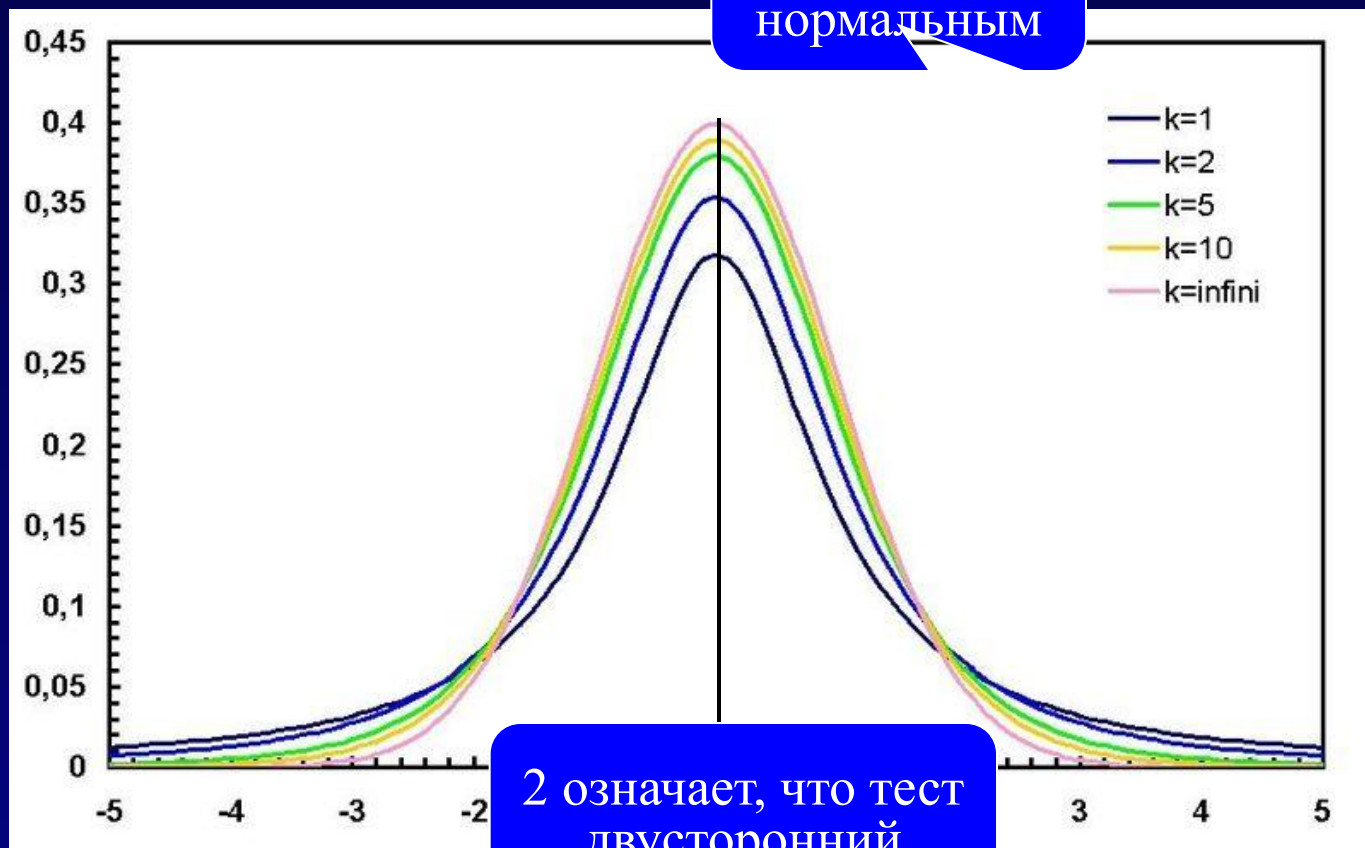
Работал на пивоваренном заводе Гиннеса

Опубликовал «распределение Стьюдента» в 1908 г.

# Сравнение средних

Распределение Стьюдента очень похоже на нормальное, но имеет большую дисперсию:  $D(t) = k/(k-2) > 1$

При  $k \rightarrow \infty$   
становится  
нормальным



2 означает, что тест  
двусторонний

Excel умеет вычислять «хвосты» распределения Стьюдента:

0.024

=СТЮДРАСП(2; 100; 1)

# Сравнение средних

3 варианта использования теста Стьюдента:

1 Сравнение выборочного среднего с известным числом

1 Сравнение двух зависимых выборок

Для каждой особи проводят 2 однотипных замера:

- до и после приема лекарства,
- в этом году и в прошлом году и т.д.

1 Сравнение двух выборочных средних для независимых выборок

Возможно раного объема

# Упражняемся ...

15 октября 2011 г. президент Д. Медведев сообщил, что средняя продолжительность жизни в РФ

В этом месяце в районном морге получена другая оценка:  $62 \pm 3$  года. Отличается ли от среднего по стране?

Эта запись означает, что наша величина имеет распределение Стьюдента с  $n-1$  степенями свободы

получена другая оценка?

Вычисляем величину  $\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_x} = \frac{\bar{x} - \mu}{S_x} \sqrt{n}$

2 означает, что тест двусторонний

$$P = 0.022 = \text{СТЮДРАСП}((69-62)/3; 100-1; 2)$$

Вывод: нулевая гипотеза отвергается. Вероятность того, что при этом отвергли правильную нулевую гипотезу равна 0.022 (ошибка I рода). Выборка по данным районного морга не соответствует среднему по стране.

Различия статистически значимы.

Никогда не пишите, что различия достоверны!

Достоверно это то, что происходит с вероятностью 1

В данном примере среднее для одной выборки сравнивалось с заранее известной величиной. Это так называемый одновыборочный тест (мы это уже делали: помните 470 из 1000?)

# Сравнение средних

в случае зависимых выборок



Это простой случай. Вычисляется  $t$ -статистика

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{SE_1^2 + SE_2^2}}$$

и вес хвостов распределения Стьюдента с  $n_1 + n_2 - 2$  степенями свободы.

Можно ни о чем этом не думать и  
использовать

`=ТТЕСТ(массив1; массив2; 2; 1)`

2 означает, что тест

двусторонний

1 означает, что

Для независимых выборок все несколько сложнее...

зависимы



# Сравнение средних

## в случае независимых выборок

При сравнении средних двух независимых выборок возможны 2 ситуации:

- $\sigma_1 = \sigma_2$ , т.е. изменчивость данных в обеих выборках одинакова

Тогда все просто: вычисляется статистика 
$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{SE_1^2 + SE_2^2}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$$

- $\sigma_1 \neq \sigma_2$ , т.е. изменчивость данных в выборках неодинакова, и эти различия статистически значимы. Тогда вычисляется объединенная дисперсия для двух выборок. Число степеней свободы тоже модифицируется.

Не будем расписывать, как это делается, а запустим Excel

`=ТТЕСТ(массив1; массив2; 2; 2)`

2 означает, что тест  
двусторонний

2 -  $\sigma_1 = \sigma_2$   
3 -  $\sigma_1 \neq \sigma_2$

Надо сказать, что Excel не проверяет статистическую значимость  $\sigma_1 \neq \sigma_2$ ,  
Более адекватно поступает WinStat

# Сравнение средних

## в случае независимых выборок

При сравнении средних двух независимых выборок возможны 2 ситуации:

- $\sigma_1 = \sigma_2$ , т.е. изменчивость данных в обеих выборках одинакова

Тогда все просто: вычисляется статистика 
$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{SE_1^2 + SE_2^2}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$$

- $\sigma_1 \neq \sigma_2$ , т.е. изменчивость данных в выборках неодинакова, и эти различия статистически значимы. Тогда вычисляется объединенная дисперсия для двух выборок. Число степеней свободы тоже модифицируется.

Не будем расписывать, как это делается, а запустим Excel

`=ТТЕСТ(массив1; массив2; 2; 2)`

2 означает, что тест  
двусторонний

2 -  $\sigma_1 = \sigma_2$   
3 -  $\sigma_1 \neq \sigma_2$

Надо сказать, что Excel не проверяет статистическую значимость  $\sigma_1 \neq \sigma_2$ ,  
Более адекватно поступает WinStat

# Упражняемся...

Оценка	Число учеников (из 100)	
	Физика	Физкультура
2	10	0
3	50	10
4	30	20
5	10	70

Считаем t-статистику:

$$t = \frac{4.6 - 3.4}{\sqrt{0.08^2 + 0.07^2}} = 11.3$$

$$= \text{СТЪЮДРАСП}(11,3; 100-2; 2)$$

Значимо!  $P = 10^{-19}$

Средняя оценка по физике = 3.4. Дисперсия = 0.64

Средняя оценка по физкультуре = 4.6. Дисперсия = 0.44

Чему равны стандартные отклонения и ошибки самих оценок (*SD* и *SE*)?

По физике:  $3.4 \pm 0.1$  Можно записать так  $3.40 \pm 0.08$ , но не так  $3.4 \pm 0.08$

$$SD = \sqrt{0.64} = 0.8 \quad SE = \frac{0.8}{\sqrt{100}} = 0.08$$

По физкультуре:  $4.6 \pm 0.1$

$$SD = \sqrt{0.44} = 0.66 \quad SE = \frac{0.66}{\sqrt{100}} = 0.07$$

# Сравнение средних

С ПОМОЩЬЮ



Microsoft Excel - Примеры

Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Диаграмма Окно Справка

1 **t-Test (independent)**

2

3

4

5 Пол

6 М

7 Ж

8

9 entire sample

10

11

12 F-Test: ???

13

14

15

16

17 t-Test:

18

19 Variance Estimate

20 Pooled

21 Separate

22

N	Рост Mean	95% Conf. (±)	Std.Error	Std. Dev.
34	167,6657333	6,768068593	3,326599492	19,39724161
65	148,7635341	4,142643345	2,073647311	16,7182791
99	155,2551985	3,941888953	1,986356806	19,76400067

F	P
1,346160392	0,306850009

Дисперсии выборок значимо не различаются

Variance Estimate	T	Degrees of Freedom	P
5,052704192	97	2,04833E-06	
4,822008823	59,03233383	1,03622E-05	

110 120 130 140 150 160 170 180 190 200

Рост

OK Cancel

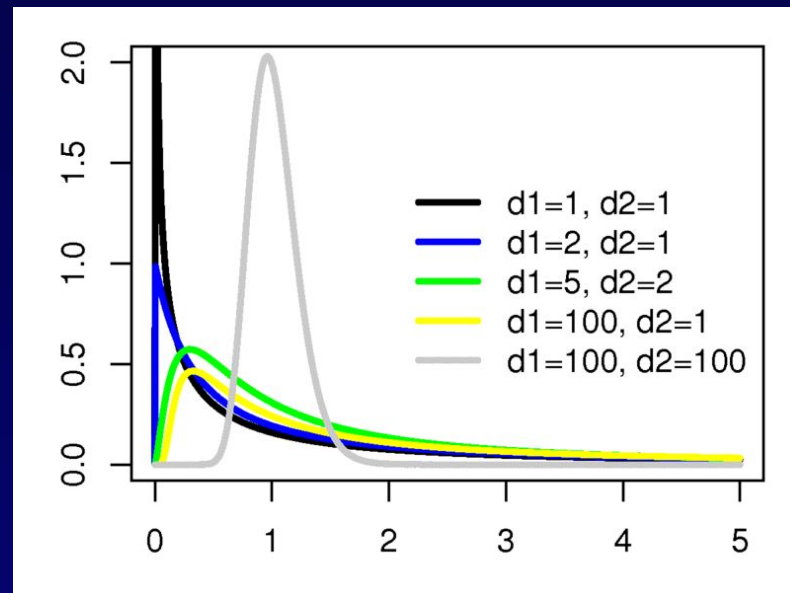
?

# Сравнение дисперсий



Р. Фишер построил критерий (односторонний) для сравнения дисперсий ( $F$ -тест) и вычислил функцию распределения соответствующей статистики.

$$F = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \quad (\text{большая на меньшую}),$$



В Excel имеется функция, вычисляющая это распределение

`=FРАСП(1,5;100;100)`

Можно также сравнить дисперсии двух выборок

`=ФТЕСТ(массив1; массив2)`

$H_0: \sigma_1 = \sigma_2$  против  $H_1: \sigma_1 < \sigma_2$

Не путайте статистику (критерий) Фишера с точным тестом Фишера!

# Сравнение дисперсий



Дисперсионный анализ (ANOVA) – сравнение нескольких выборок

Рассмотрим набор  $k$  выборок:  
(при  $k = 2$  все сведется к критерию Стьюдента)

	Среднее	Дисперсия
Выборка 1	$\bar{x}_1$	$\sigma_1^2$
Выборка 2	$\bar{x}_2$	$\sigma_2^2$
.....	...	...
Выборка $k$	$\bar{x}_k$	$\sigma_k^2$
Все выборки	$\bar{x}$	$\sigma^2$

Р. Фишер показал, что

$$\sigma^2 = \sigma_W^2 + \sigma_B^2$$

т.е. дисперсию объединенной выборки можно разложить на сумму средней дисперсии внутри выборок ( $\sigma_W^2$ ) и межвыборочную дисперсию ( $\sigma_B^2$ ):

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^k \sigma_k^2}{k} + \frac{\sum_{i=1}^k (\bar{x}_i - \bar{x})^2}{k}$$

Ничего, кроме школьной алгебры!

Средняя дисперсия

Статистика

$$F = \frac{\sigma_B^2}{\sigma_W^2}$$

Дисперсия средних

Внутривыборочная изменчивость

Межвыборочная изменчивость

Остаточная изменчивость

$$H_0: \bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \dots = \bar{x}_k$$

$H_1$ : хотя бы одно среднее отличается

Факториальная изменчивость

# Сравнение нескольких выборок

Statistics Graphics Data Help

Basics  
Compare 2 groups  
Compare N groups  
Correlation  
Regression  
Discriminant analysis...  
Cluster analysis...  
Factor analysis...  
Survival analysis  
Process capability...

Analysis of variance...  
Repeated measures...  
H-test (Kruskal-Wallis)...  
Friedman-test...  
Q-test (Cochran)...

	46	0,127068751
	42	0,31899416
	11	0,598639833
Entire sample	99	0,260888439

Analysis of variance

1 variable plus grouping variable

Variable: АберХр

Grouping variable: GSTP1\_A313G

2nd grouping variable: ФИО

With interaction

1 to N variables of the same type

Template: Standard

Standard error  
 Confidence interval

± 95% Confidence interval

Genotype	Mean Value	95% CI Lower	95% CI Upper
A/A	0,127068751	0,06	0,19
A/G	0,31899416	0,20	0,44
G/G	0,598639833	0,45	0,75

# Сравнение нескольких выборок

## Упражняемся...

Для нашей учебной базы данных сравним частоты aberrаций хромосом для носителей различных генотипов по локусу *GSTP1*



	A	B	C	D	F	
1	<b>Analysis of Variance</b>					
2						
3	Variable: АберХр					
4	grouped by: GSTP1_A313G					
5						
6		Sum of Squares	Degrees of Freedom	Mean Square	F	
7					P	
8	Between Groups	2,220394197	2	1,110197098	11,78092131	2,65812E-05
9	Within Groups	9,046739097	96	0,094236866		
10	Total	11,26713329	98	0,114970748		

Межгрупп раз выше,

	A	B	C	D	E	F	G
1	Однофакторный дисперсионный анализ						
2							
3	ИТОГИ						
4	Группы	Счет	Сумма	Среднее	Дисперсия		
5	AA	46	5,845163	0,127069	0,048833		
6	AG	42	13,39775	0,318994	0,153666		
7	GG	11	6,585038	0,59864	0,054892		
8							
9							
10	Дисперсионный анализ						
11	очник вари	SS	df	MS	F	P-Значение	критическое
12	Между гр	2,220394	2	1,110197	11,78092	2,66E-05	3,091191
13	Внутри гр	9,046739	96	0,094237			
14							
15	Итого	11,26713	98				

Можно обойтись пакетом

«Анализ данных» в Excel



# Важное предупреждение

t-тест (Стьюдента)  
F-тест (Фишера)  
Дисперсионный анализ } только для нормально распределенных данных!

В противном случае можно получить совершенно абсурдный результат:

	Фирма 1	Фирма 2
	100	120
	100	120
	100	120
	100	120
	110	120
	110	500
Средние	103.3	183.3

В какой фирме зарплата выше?

=TTEST(массив1; массив2; 2; 3)

$P = 0.235$  😞

Эти средние значимо не различаются по тесту Стьюдента!

На этом примере видно, что в ряде случаев надо сравнивать не сами данные, а их порядковые ранги (номера в последовательности)

# Ранговые статистики

Данные

Фирма 1	Фирма 2	
100	120	
100	120	
100	120	
100	120	
110	120	
110	500	
Средние	103.3	183.3

Ранги

Фирма 1	Фирма 2	
1	7	
2	8	
3	9	
4	10	
5	11	
6	12	
Средние	3.5	9.5

0.0002 =ТТЕСТ(массив1; массив2; 2; 2)

Другое дело! Хотя и это некорректно...

# Ранговые критерии

Ранговые критерии являются непараметрическими, т.е. такими, которые не зависят от характера распределения данных. В частности они нечувствительны к выбросам отдельных точек

Самый простой тест – критерий знаков для пары зависимых выборок

Плацебо	Лекарство	Разность
105	120	+
110	115	+
120	110	-
103	125	+
115	120	+
121	134	+
107	110	+
114	117	+

1 минус из 8

Приводит ли лекарство к увеличению систолического давления?

0.035 =БИНОМРАСП  
(1;8;0,5;1)

Различия значимы по одностороннему тесту (но не по двустороннему!)

# Ранговые критерии

Для сравнения 2 независимых выборок используется тест Манна – Уитни, который основан на вычислении суммы рангов для каждой из выборок

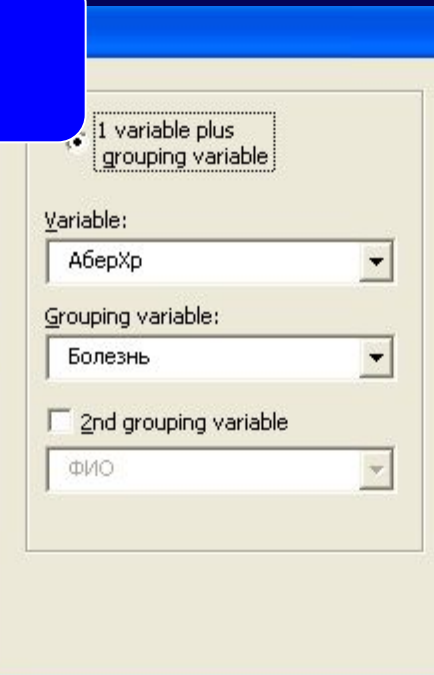
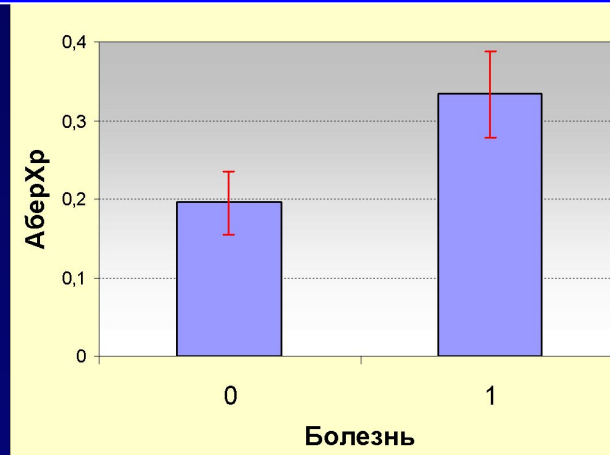
Как всегда  $H_0$ : выборки взяты из одной генеральной совокупности.

Упражняемся ...



Но что там с нормальностью?

Видим различия средних.



Проверяем значимость различий по Стьюденту:

t-Test:

	Variance Estimate	T	Degrees of Freedom	P
Pooled		-2,057004362	97	0,042370006
Separate		-2,030799745	86,41661279	0,045349121

Различия значимы по Стьюденту (независимо от условия равенства дисперсий)

# Проверяем нормальность ...

Строим гистограммы распределений аберраций для больных и здоровых:

Необходимо использовать непараметрический тест Манна-Уитни

Попробуем все это воспроизвести:



Болезнь	N	АберХр Mean Rank	U
0	52	45,32692308	979
1	47	55,17021277	1465

-1,801821207    0,07157354

Проверяем значимость различий по Стьюденту:

t-Test:

Variance Estimate	T	Degrees of Freedom	P
Pooled	-2,057004362	97	0,042370006
Separate	-2,030799745	86,41661279	0,045349121

Различия значимы по Стьюденту (независимо от условия равенства дисперсий)

# Что значит «незначимо»?

Допустим мы не обнаружили статистическую значимость различий, о чем с грустью сообщаем в публикации. Достаточно ли этого?

НЕТ! Мы должны продемонстрировать, что объемы наших выборок достаточны, чтобы обнаружить эффект, если он существует.

Мощность (чувствительность) используемых тестов должна быть не ниже 80% (тогда упускаем не более 20% открытий)

Только в этом случае незначимые различия можно рассматривать как отрицательный результат

# Что значит «незначимо»?

Допустим, что для 2 выборок имеем:

	$n$	$\bar{x}$	$SE$	$SD$
Выборка 1	100	10	1	10
Выборка 2	100	12	1	10



Тогда по тесту Стьюдента различия незначимы и  $P = 0.159$

Compare2/ Numerical observations/ Normal distribution/mean value

Проверим мощность данного теста

Compare2/ Power/ Comparison of means

Size A - 100 Size B - 100

DETECT a difference 2

⇒ Мощность всего 29% !

т.е. доля упущенных открытий более 70% ! 

О чем мы обязаны сообщить в публикации (правда биологи этого почти никогда не делают)

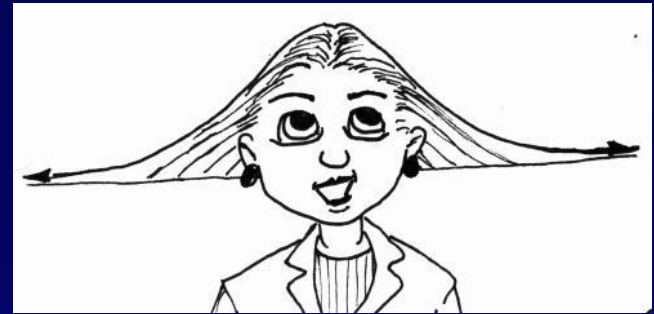
Чтобы выйти на мощность 80% объемы выборок должны быть 400 и 400

Compare2/ Sample size/ Means

# На сегодня это все 😊

Напоследок хочу посоветовать:

1] Проверяйте характер распределения сравниваемых величин. Или хотя бы стройте гистограммы распределений – для себя.



2] Поставьте на свой компьютер WinStat и постройте пример использования дисперсионного анализа

3] На всякий случай проверяйте значимость различий параметрическими и непараметрическими методами.

4] Оценивай мощность теста в случае получения незначимых результатов