Арифметические действия над целыми числами

Сложение и вычитание

В большинстве компьютеров операция вычитания не используется. Вместо нее производится сложение уменьшаемого с обратным или дополнительным кодом вычитаемого. Это позволяет существенно упростить конструкцию АЛУ.

При сложении обратных кодов чисел А и В имеют место четыре основных и два особых случая. Рассмотрим их.

СЛУЧАЙ 1

А и В положительные. При суммировании складываются все разряды, включая разряд знака. Так как знаковые разряды положительных слагаемых равны нулю, разряд знака суммы тоже равен нулю.

Десятичная запись:

$$\begin{array}{r} 3 \\ +\;7 \\ \hline 10 \end{array}$$

Двоичные коды:

$$\begin{array}{rcccccccc} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ + & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

СЛУЧАЙ 2

А положительное, В отрицательное и по абсолютной величине больше, чем А.

Десятичная запись:

$$\begin{array}{r} 3 \\ + \\ -10 \\ \hline -7 \end{array}$$

Двоичные коды:

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Обратный код **-10**

Обратный код **-7**

При переводе в прямой код биты цифровой части результата инвертируются:

1 0000111 = -7_{10}

СЛУЧАЙ 3

А положительное, В отрицательное и по абсолютной величине меньше, чем А.

Десятичная запись:

$$\begin{array}{r} 10 \\ + \quad -3 \\ \hline 7 \end{array}$$

Обратный код -3

Двоичные коды:

	0	0	0	0	1	0	1	0
+	1	1	1	1	1	1	0	0
	0	0	0	0	0	1	1	0
								+1
	0	0	0	0	0	1	1	1

Компьютер исправляет полученный первоначально неправильный результат (6 вместо 7) переносом единицы из знакового разряда в младший разряд суммы.

СЛУЧАЙ 4

А и В отрицательные.

Десятичная запись:		Двоичные коды:							
-3		1	1	1	1	1	1	0	0
+ -7	+	1	1	1	1	1	0	0	0
-10		1	1	1	1	0	1	0	0
									+1
		1	1	1	1	0	1	0	1

Обратный код **-3**

Обратный код **-7**

Обратный код **-10**

Полученный первоначально неправильный результат компьютер исправляет переносом единицы из знакового разряда в младший разряд суммы. При переводе результата в прямой код биты цифровой части числа инвертируются: **1 0001010 = -10_{10}.**

СЛУЧАЙ 5

A и B положительные, A + B ≥ 2^{n-1}, где n – количество разрядов формата чисел.

Десятичная запись:

$$\begin{array}{r} 65 \\ +\ 97 \\ \hline 162 \end{array}$$

Двоичные коды:

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Переполнение

Семи разрядов цифровой части числового формата недостаточно для размещения восьмиразрядной суммы ($162_{10} = 10100010_2$), поэтому старший разряд суммы оказывается в знаковом разряде. Это вызывает несовпадение знака суммы и знаков слагаемых, что является свидетельством переполнения разрядной сетки.

СЛУЧАЙ 6

A и B отрицательные, $|A| + |B| \geq 2^{n-1}$ (для однобайтового формата $n = 8$, $2^{n-1} = 2^7 = 128$).

Десятичная запись:

Двоичные коды:

$$
\begin{array}{r}
-63 \\
+\ -95 \\
\hline
-158
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccccccc}
 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
+ & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & +1
\end{array}
$$

Обратный код -63

Обратный код -95

Переполнение

Здесь знак суммы тоже не совпадает со знаками слагаемых, что свидетельствует о переполнении разрядной сетки.

Все рассмотренные случаи имеют место и при сложении дополнительных кодов чисел.

СЛУЧАЙ 1

А и В положительные.

Здесь нет отличий от случая 1, рассмотренного для обратного кода.

СЛУЧАЙ 2

А положительное, В отрицательное и по абсолютной величине больше, чем А.

Десятичная запись:

$$\begin{array}{r} 3 \\ + \\ -10 \\ \hline -7 \end{array}$$

Двоичные коды:

$$\begin{array}{cccccccccc} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ + & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Дополнительный код **-10**

Дополнительный код **-7**

При переходе в прямой код биты цифровой части результата инвертируются и к младшему разряду прибавляется единица:

1 0000110 + 1 = 1 0000111 = -7_{10}.

СЛУЧАЙ 3

А положительное, В отрицательное и по абсолютной величине меньше, чем А.

Десятичная запись:

	10
+	-3
	7

Дополнительный код -3

Двоичные коды:

	0	0	0	0	1	0	1	0
+	1	1	1	1	1	1	0	1
	0	0	0	0	0	1	1	1

Перенос отбрасывается

Единицу переноса из знакового разряда компьютер отбрасывает.

СЛУЧАЙ 4

А и В отрицательные.

Десятичная запись:	Двоичные коды:
-3	1 1 1 1 1 1 0 1
+ -7	+ 1 1 1 1 1 0 0 1
-10	1 1 1 1 0 1 1 0

Перенос отбрасывается

Дополнительный код -3

Дополнительный код -7

Дополнительный код -10

Единицу переноса из знакового разряда компьютер отбрасывает.

Случаи переполнения для дополнительных кодов рассматриваются по аналогии со случаями 5 и 6 для обратных кодов.

Задания

Выполните вычитания чисел путем сложения их обратных (дополнительных) кодов в формате 1 байт. Укажите, в каких случаях имеет место переполнение разрядной сетки:

а) 9 - 2

б) 2 - 9

в) -5 - 7

г) -20 - 10

д) 50 - 25

е) 127 - 1

ж) -120 - 15

з) -126 - 1

и) -117 - 1

Умножение и деление

Во многих компьютерах умножение производится как последовательность сложений и сдвигов. Для этого в АЛУ имеется регистр, называемый накапливающим сумматором, который до начала выполнения операции в нем поочередно размещаются множимое и результаты промежуточных сложений, а по завершении операции – окончательный результат.

Другой регистр АЛУ, участвующий в выполнении этой операции, вначале содержит множитель. Затем по мере выполнения сложений содержащееся в нем число уменьшается, пока не достигнет нулевого значения.

Умножим 110011_2 на 101101_2.

Пример

Накапливающий сумматор:	Множитель:
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	101101
+ 1 1 0 0 1 1	
1 1 0 0 1 1	101100
+ 1 1 0 0 1 1	Сдвиг на 2 позиции влево
1 1 1 1 1 1 1 1	101000
+ 1 1 0 0 1 1	Сдвиг на 1 позицию влево
1 0 1 0 0 1 0 1 1 1	100000
+ 1 1 0 0 1 1	Сдвиг на 2 позиции влево
1 0 0 0 1 1 1 1 0 1 1 1	000000

Деление для компьютера является трудной операцией. Обычно оно реализуется путем многократного прибавления к делимому дополнительного кода делителя.

Задания