02.12.2013

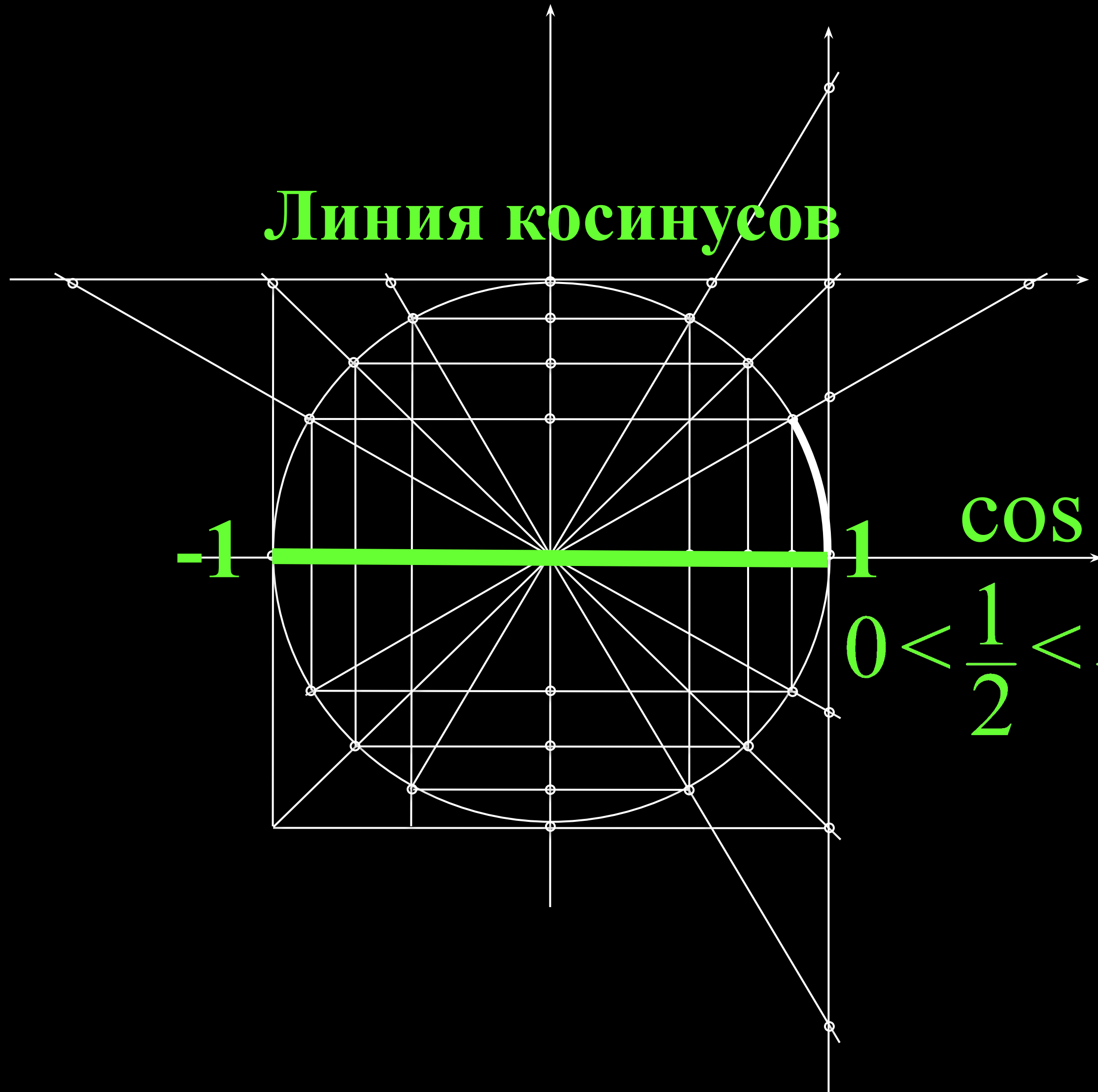
Арккосинус.

Решение уравнений cosx=a.

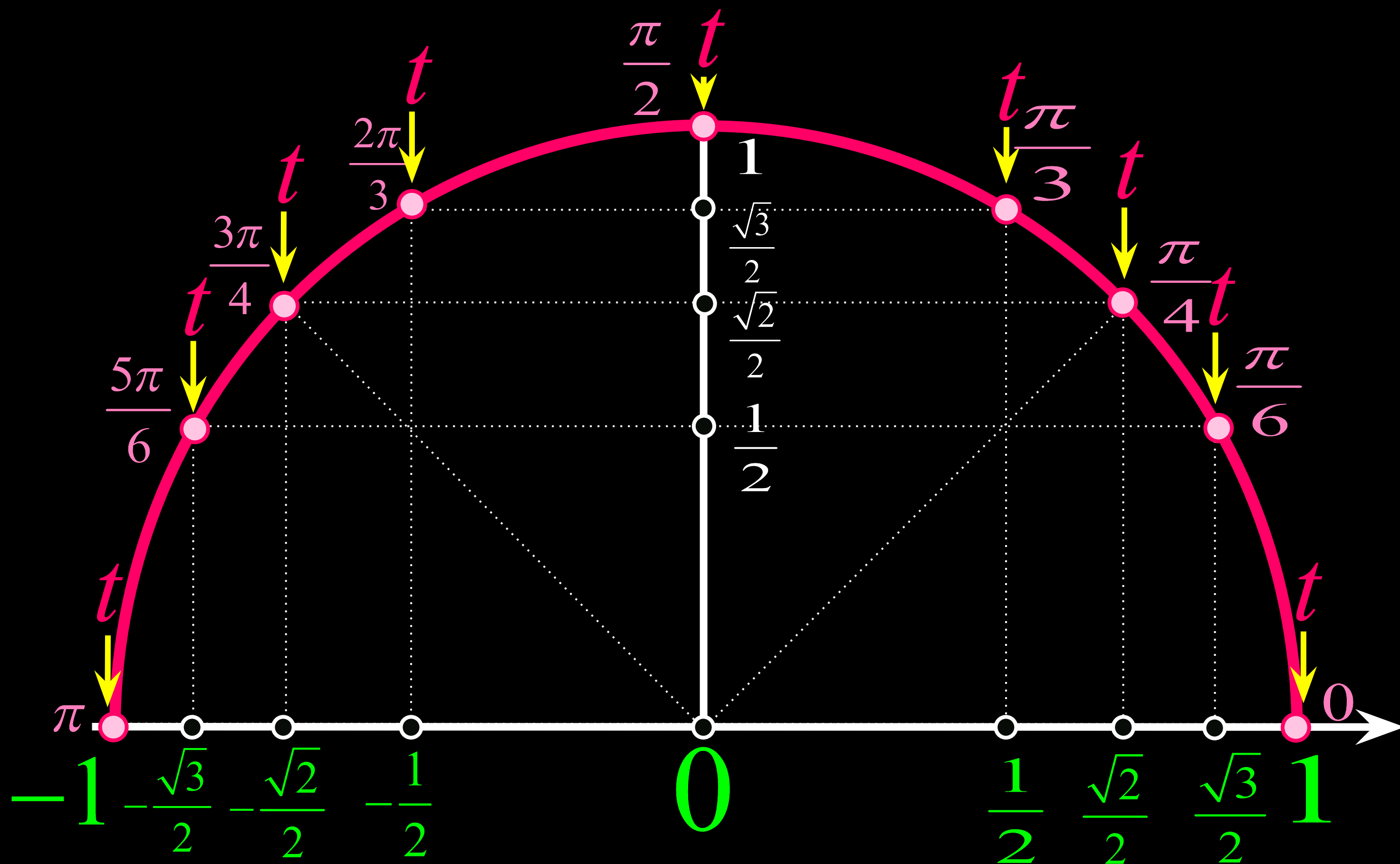
Урок№1

Назовите линию на тригонометре

Назовите неотрицательные точные значения косинуса



$$0<\frac{1}{2}<\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{\sqrt{3}}{2}<1$$

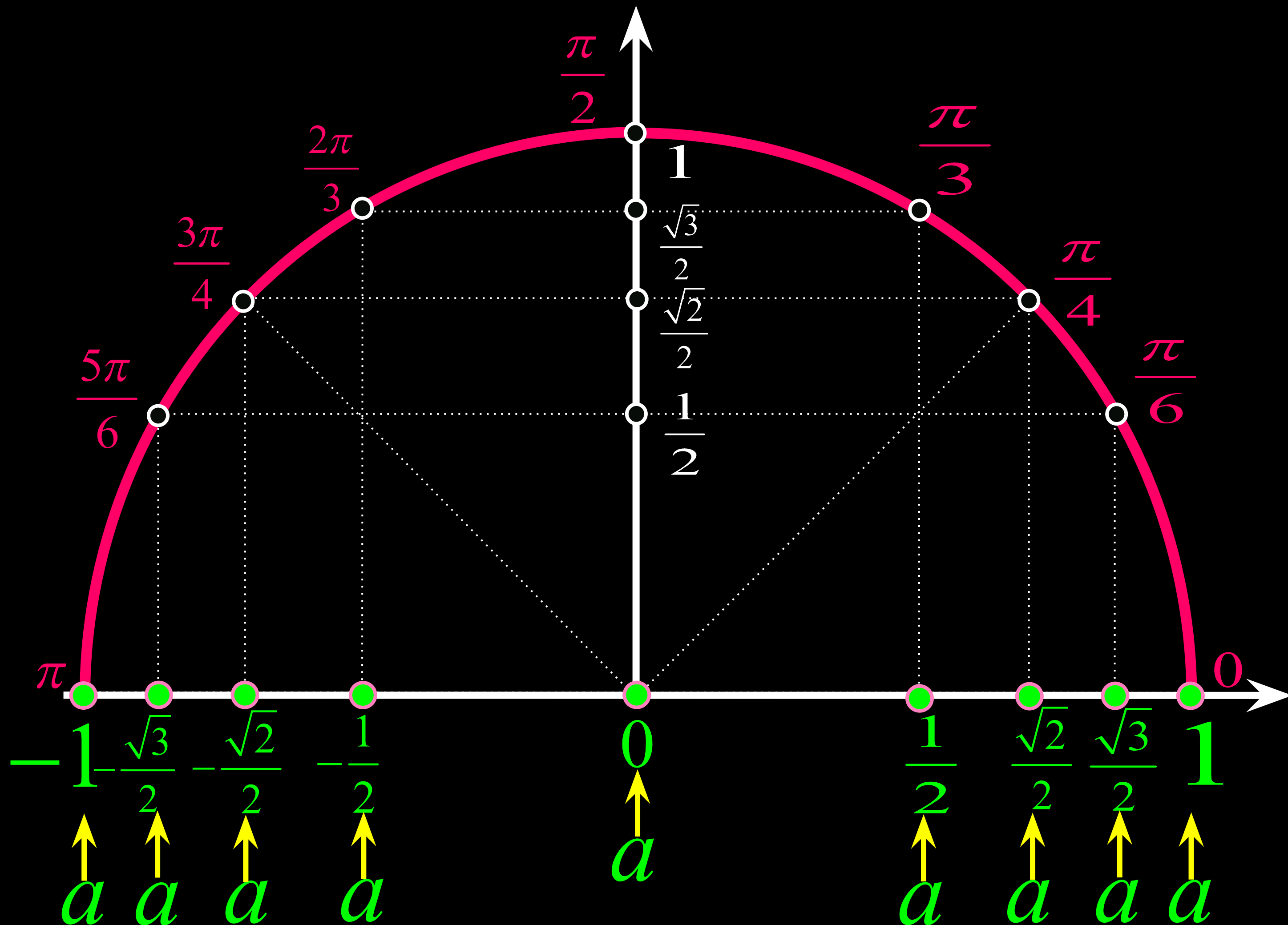


$$t:\ 0 \nearrow \pi$$

Как меняются значения косинуса?

$$\cos t - ?$$

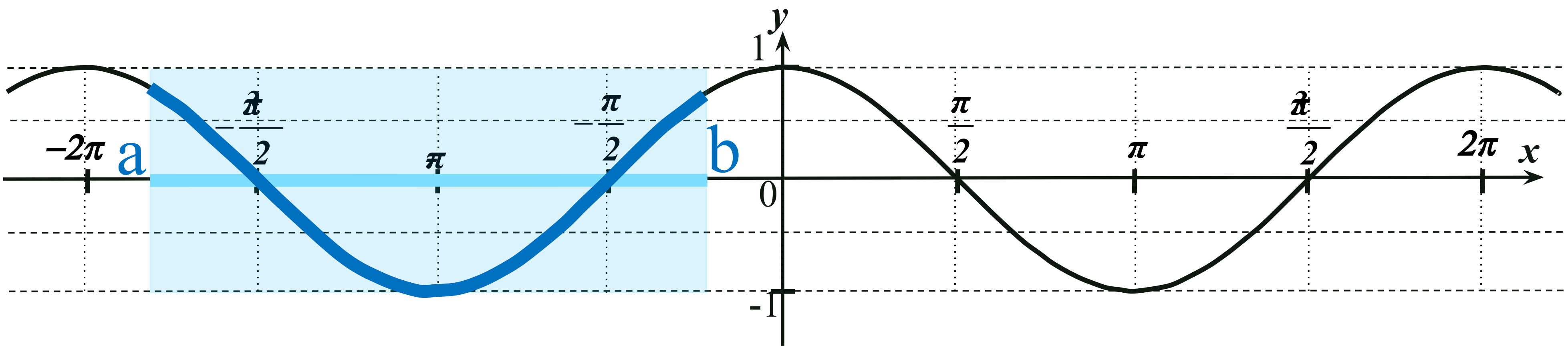
$$\cos t \searrow -1$$



$\frac{\pi}{2}$
$\frac{2\pi}{3}$
$\frac{3\pi}{4}$
$\frac{5\pi}{6}$
$\frac{\pi}{3}$
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{6}$
π
0
1
$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{1}{2}$
-1
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$-\frac{1}{2}$
0
$\frac{1}{2}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$
1
a a a a a a a a a

$$a = \cos t, \quad t - ?$$

$y = \cos x$



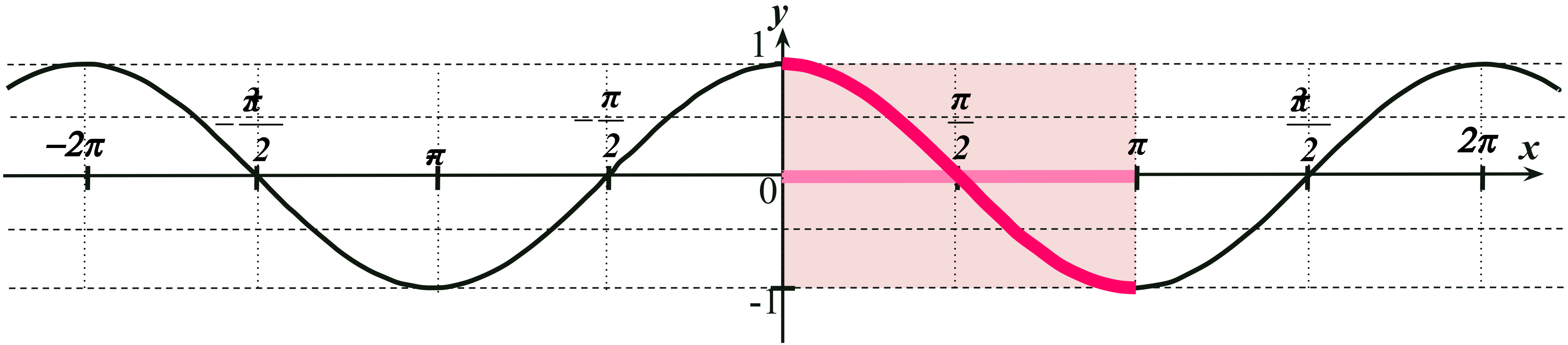
На отрезке от ***а* до b** косинус убывает и все свои значения принимает только один раз

Да

Нет

правильно!

$y = \cos x$

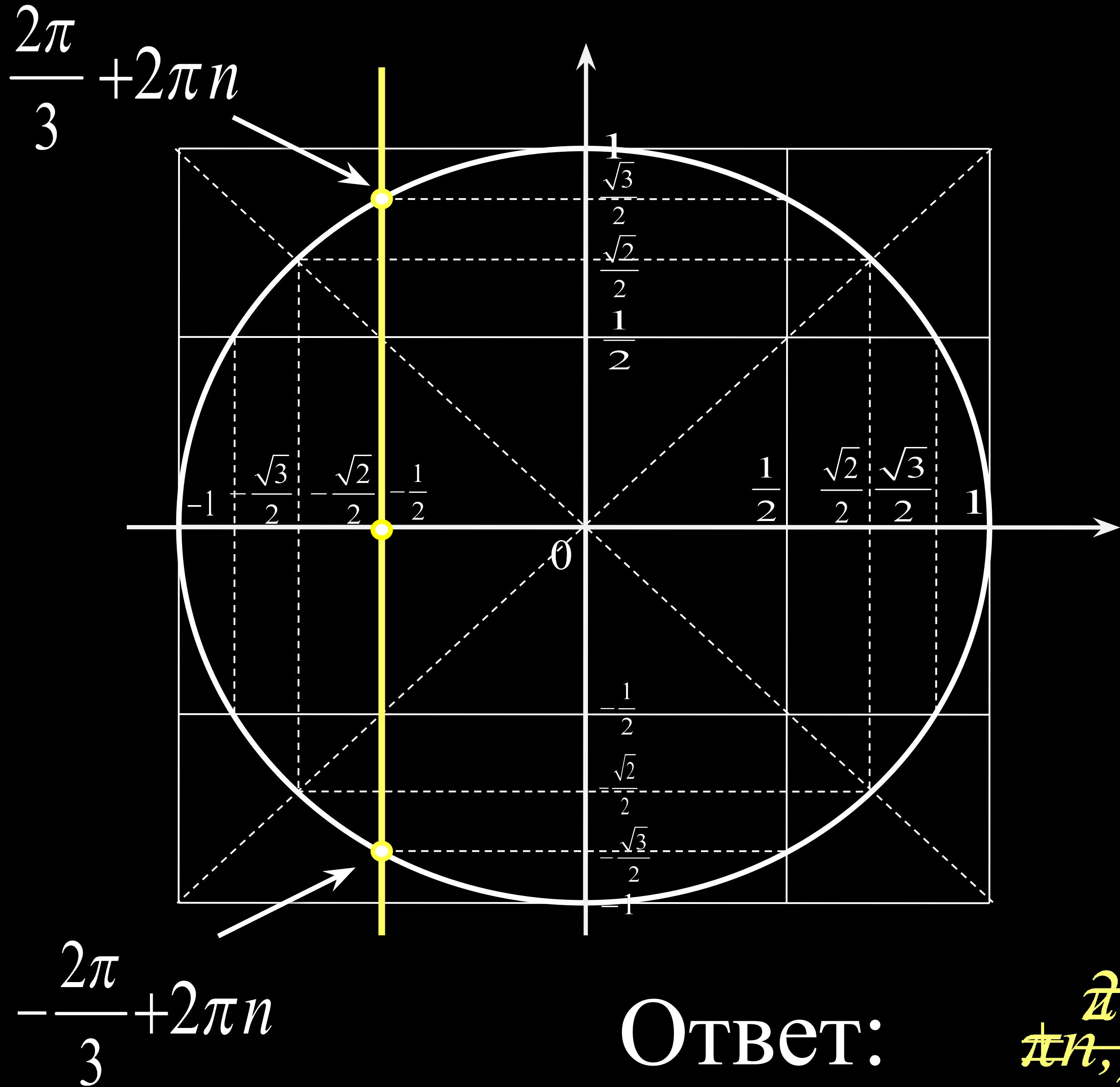


На отрезке от *0* до π косинус убывает и все свои значения принимает только один раз

Да

верно!

Нет



$$\cos t = -\frac{1}{2}$$

$$t - ?$$

Ответ: $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$

Найти корни уравнения на (1;6)

$$\cos x = \frac{1}{2}.$$

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

$$1 < \frac{\pi}{3} < 6 - верно;$$

$$1 < -\frac{\pi}{3} < 6 - неверно;$$

$$1 < -\frac{\pi}{3} + 2\pi < 6 - верно;$$

$$Ответ: \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}.$$

К

Решение уравнений $\cos x = a$

1. *$|a|>1$-нет корней;*

2. *частные случаи: $a=-1;0;1$;*

3. *решение уравнений для точных значений косинуса по тригонометру.*

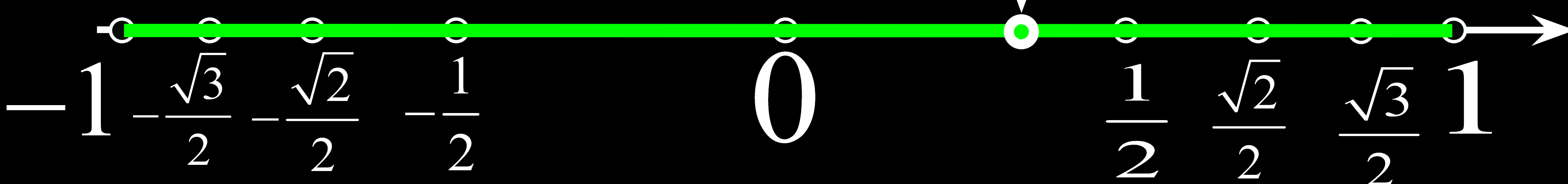
Как решать уравнение $\cos x = a$, если

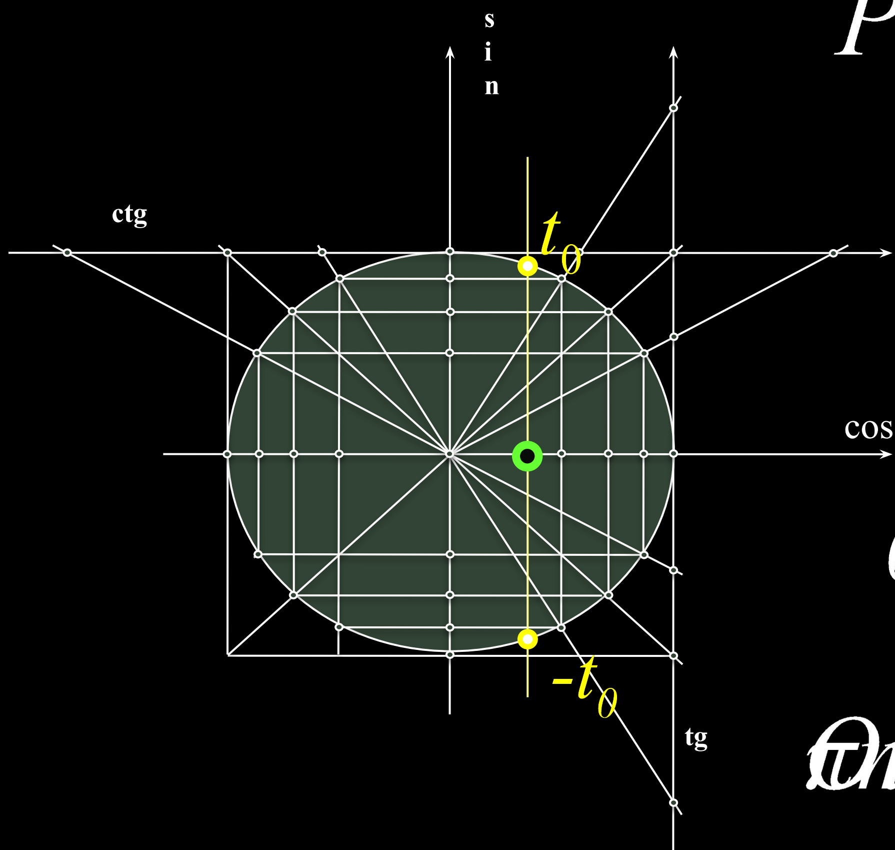
$$a = \frac{1}{3} \quad ?$$

Это допустимое значение косинуса, значит уравнение

$$\cos x = \frac{1}{3}$$

имеет решение.





Решить уравнение:

$$\cos x = \frac{1}{3}.$$

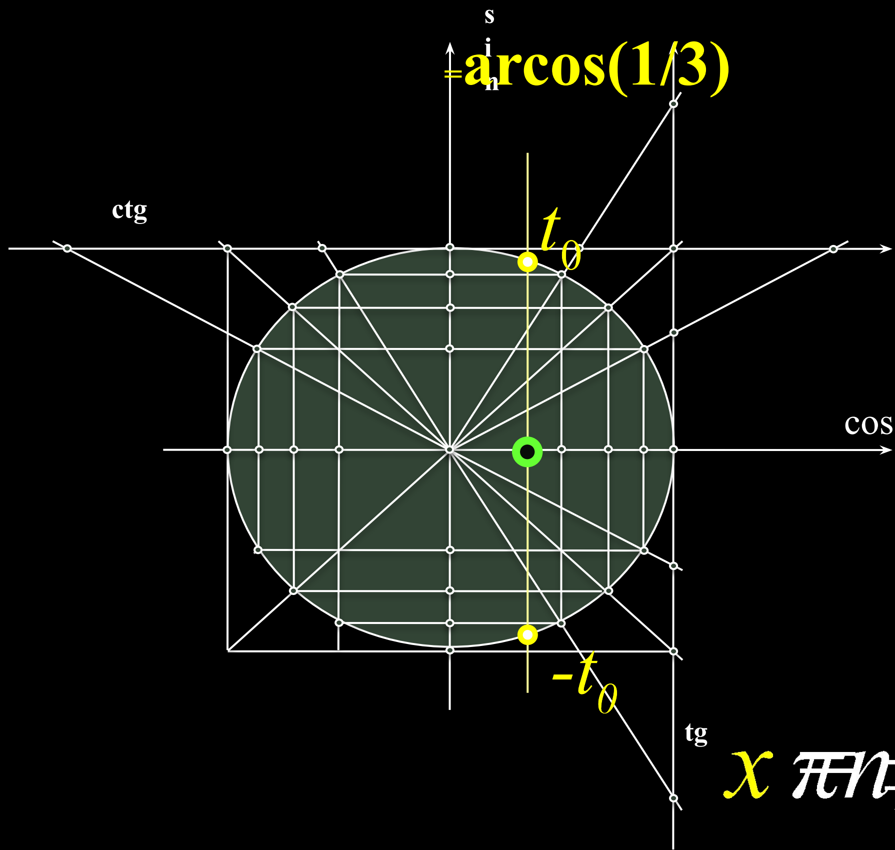
$$x = \pm t_0 + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

$$0 < \frac{1}{3} < \frac{1}{2}; \qquad \frac{\pi}{3} < t_0 < \frac{\pi}{2}.$$

Ответ: $\pm t_0 + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

t_0 - такое число, косинус которого равен $\frac{1}{3}$.

$$t_0 - ?$$



$$\cos x = \frac{1}{3}.$$

$$x = \pm t_0 + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}.$$

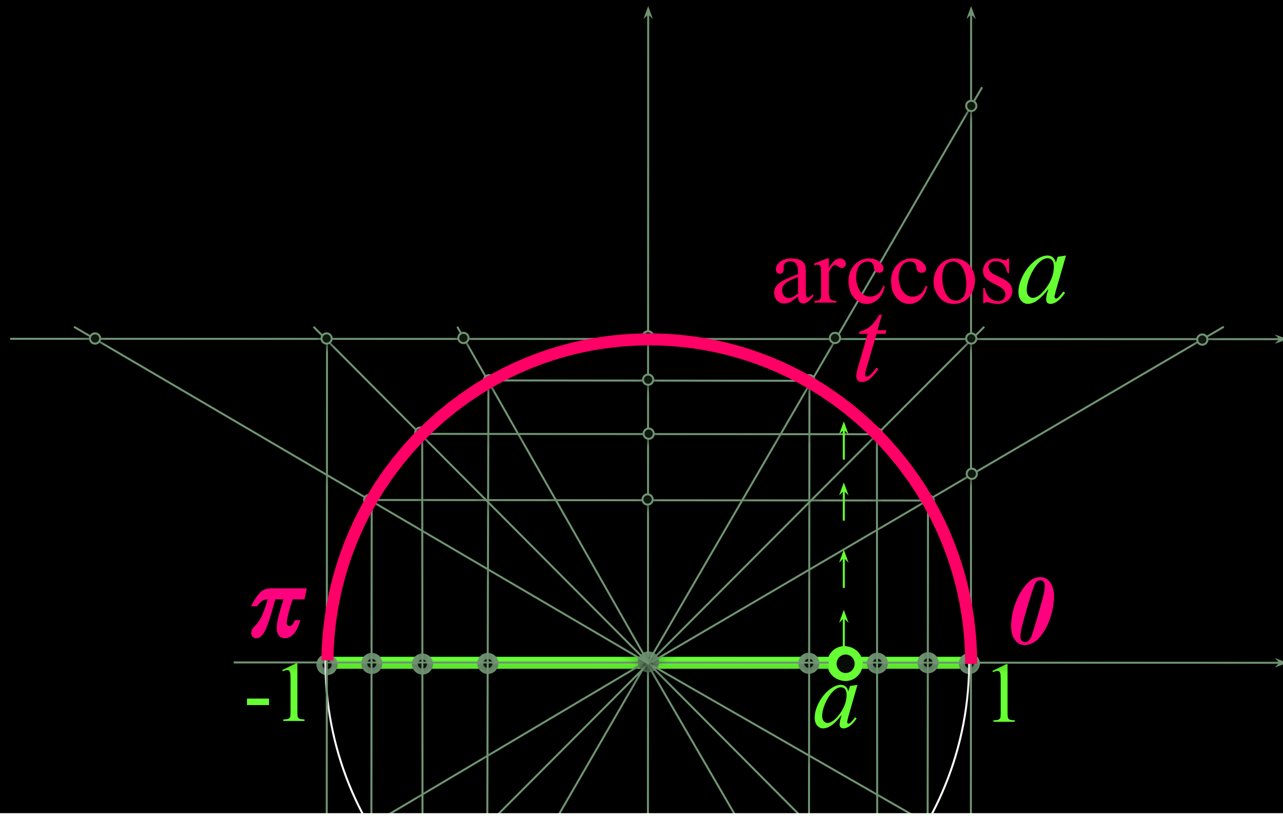
$$t_0 = \arccos\frac{1}{3};$$

$$x = \pm \arccos\frac{1}{3} + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}$$

t_0 - такое число, косинус которого равен $\frac{1}{3}$.

Ответ: $x = \pm \arccos\frac{1}{3} + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}$.

t_0 ?



$$t = \arccos a$$

Определение арккосинуса

K

Пусть a- произвольное значение косинуса. $a \in [-1;1]$

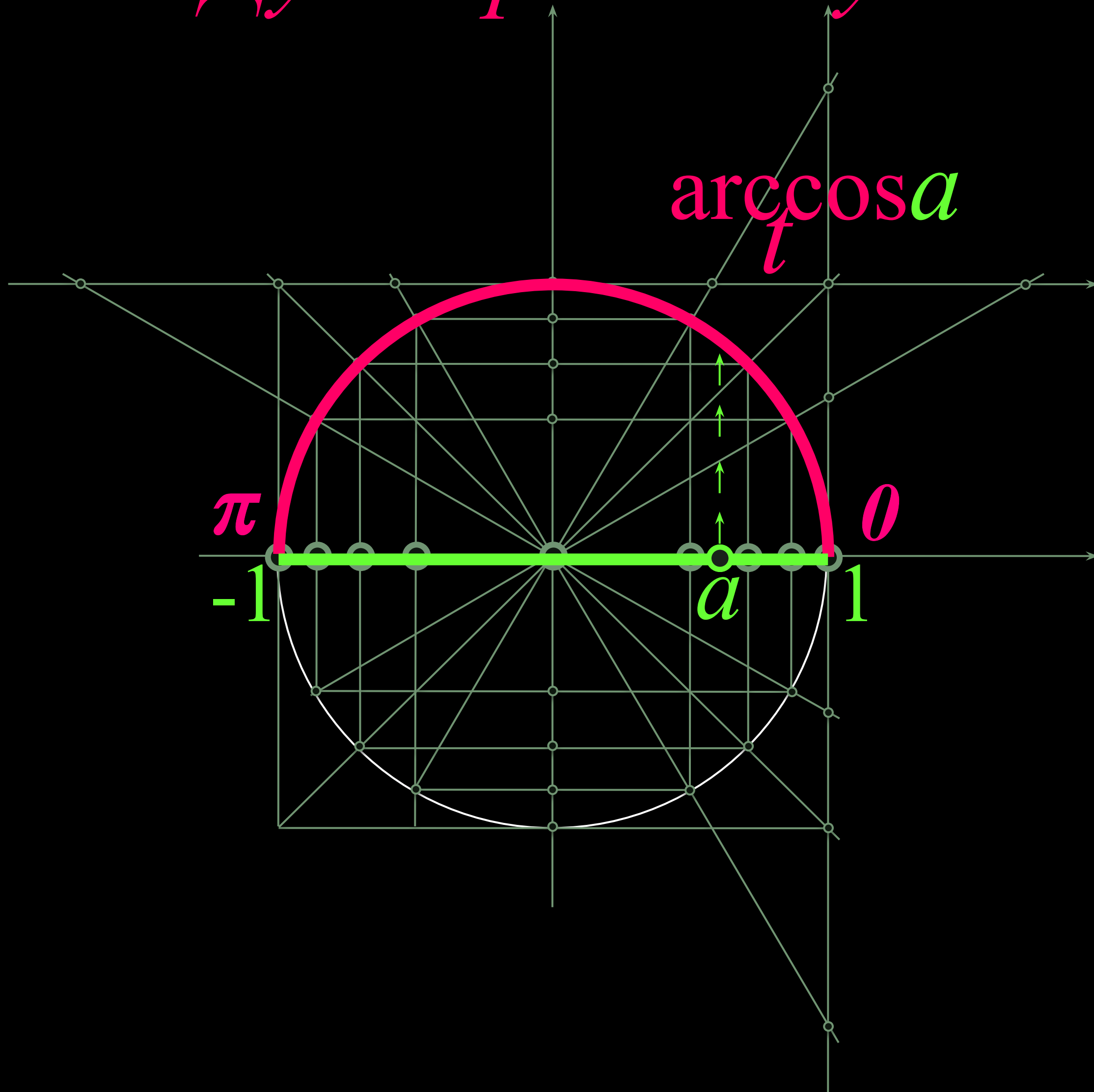
t-такое число, что косинус t равен a и $0 \le t \le \pi$

$$\cos t = a$$

$$0 \le t \le \pi$$

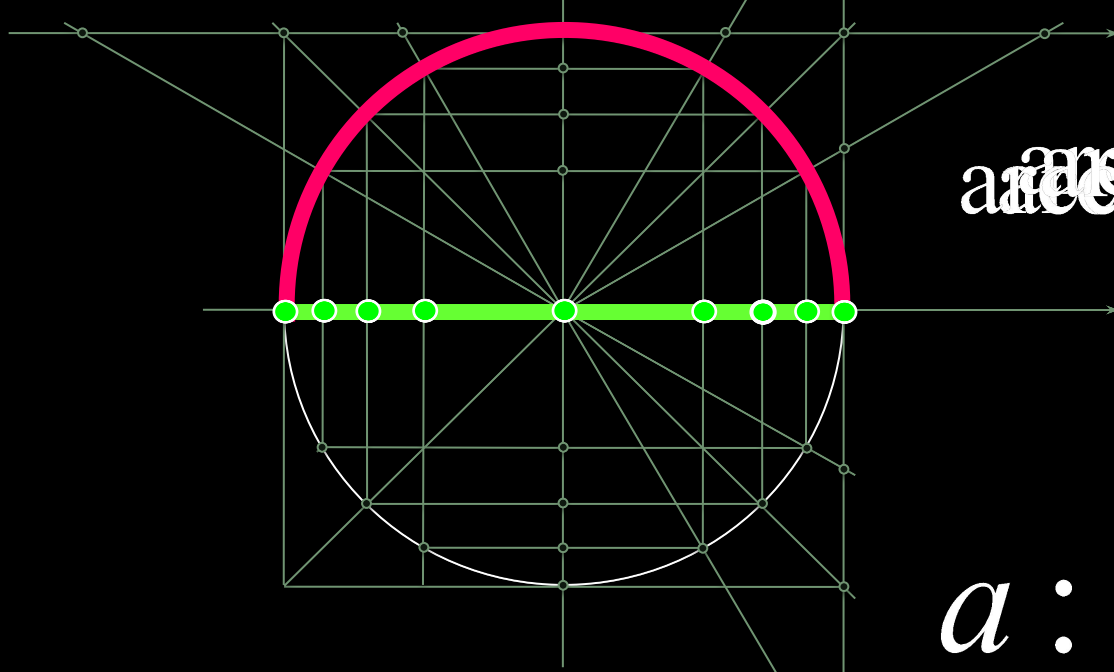
$$\left(\mathbf{arccos}\, a = t \right) \Leftrightarrow \left(\quad \right)$$

Дуга арккосинусов



Как меняются значения арккосинуса, если a возрастает?

Найти значение арккосинуса



$$a: \ -1 \nearrow 1;$$

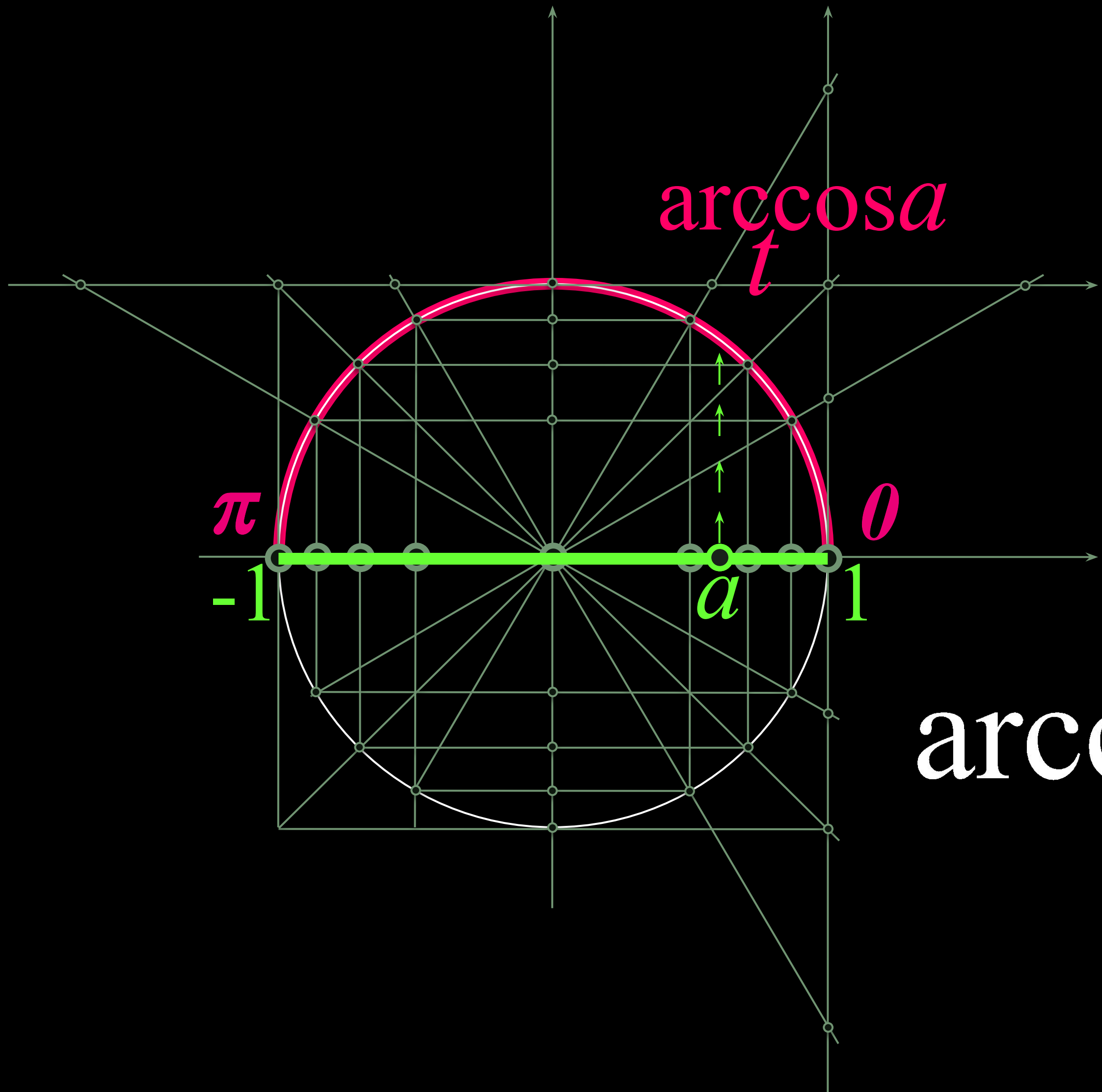
$$\arccos a: \quad \pi \searrow 0.$$

Если $|a| \le 1$

При каком a … $t \in [0; \pi]$

Какие значения может принимать arccos a?

$\cos t = a$



$$\arccos a \in [0; \pi].$$

К

$$\arccos 0,5=\frac{\pi}{3}$$

Доказать, что

$$\arccos 0,5=\frac{\pi}{3}.$$

Доказательство:

$0,5\in[-1;1]$ – *верно;*

$\frac{\pi}{3}\in[0;\pi]$ – *верно;*

$\cos\frac{\pi}{3}=0,5$ – *верно;*

$\arccos 0,5=\frac{\pi}{3}$, *что и требовалось доказать.*

Найти значения выражений:

Проверка

$$1.\ \cos\left(\arccos\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2};$$

$$2.\ \cos\left(\arccos 0\right)=0;$$

$$3.\ \cos\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$4.\ \cos\left(\arccos \pi\right)=\textit{несуществует}.$$

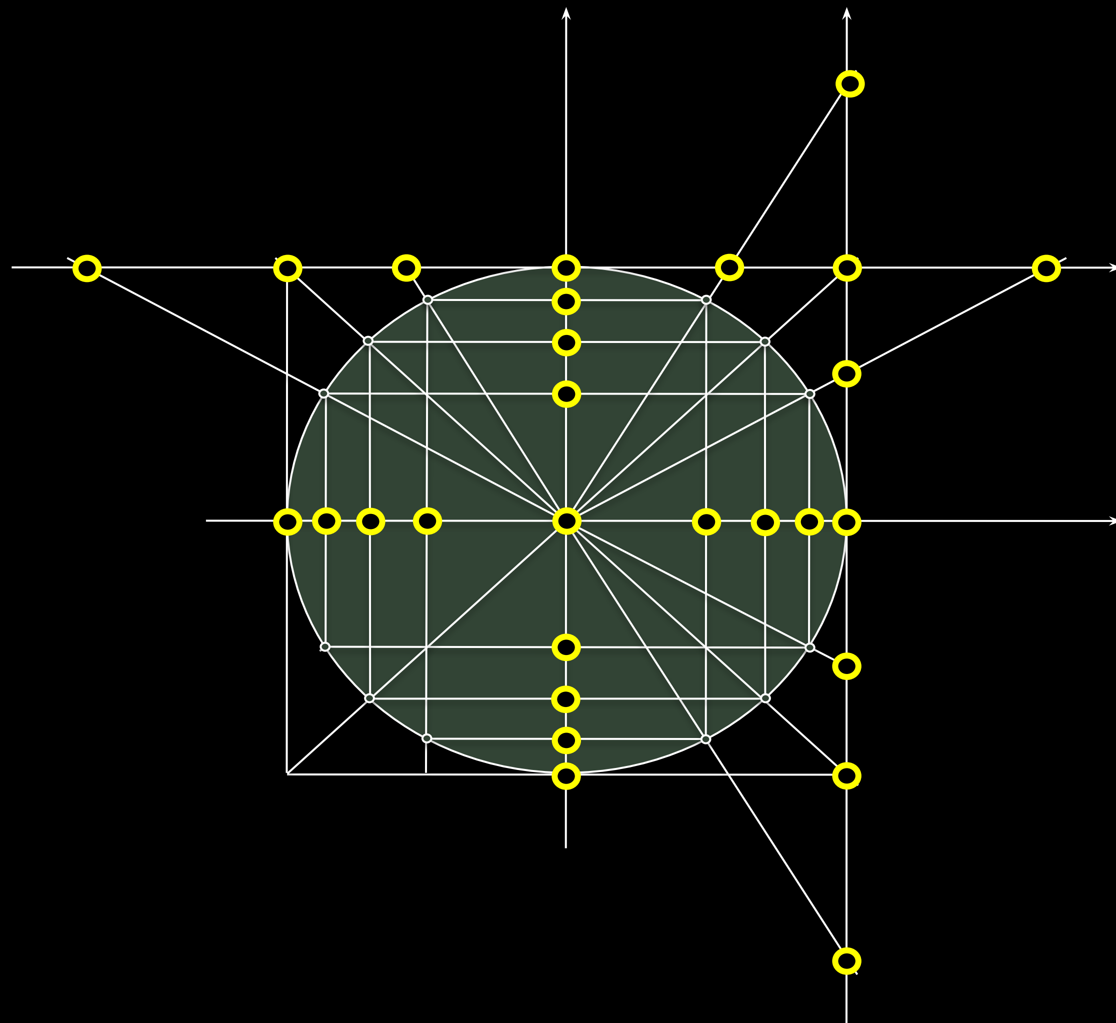
$$\cos\left(\arccos a\right) = a$$

для $-1 \le a \le 1$.

Арккосинус. Решение уравнений cosx=a.

Урок№2

Назвать линию и координату точки



Проверка домашнего задания

$$15.4a)$$

$$\sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Проверка домашнего задания

15.4*г*)

$$\sin\left(\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Заполните таблицу

Проверка

a	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
arccosa	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

$$a: \ -1 \nearrow 1;$$

$$\arccos a: \quad \pi \searrow 0.$$

Найти область допустимых значений arccos$x$.

$$-1 \le x \le 1$$

$$Ответ: x \in [-1;1]$$

Найти область допустимых значений

$$\arccos(3\text{-}2x).$$

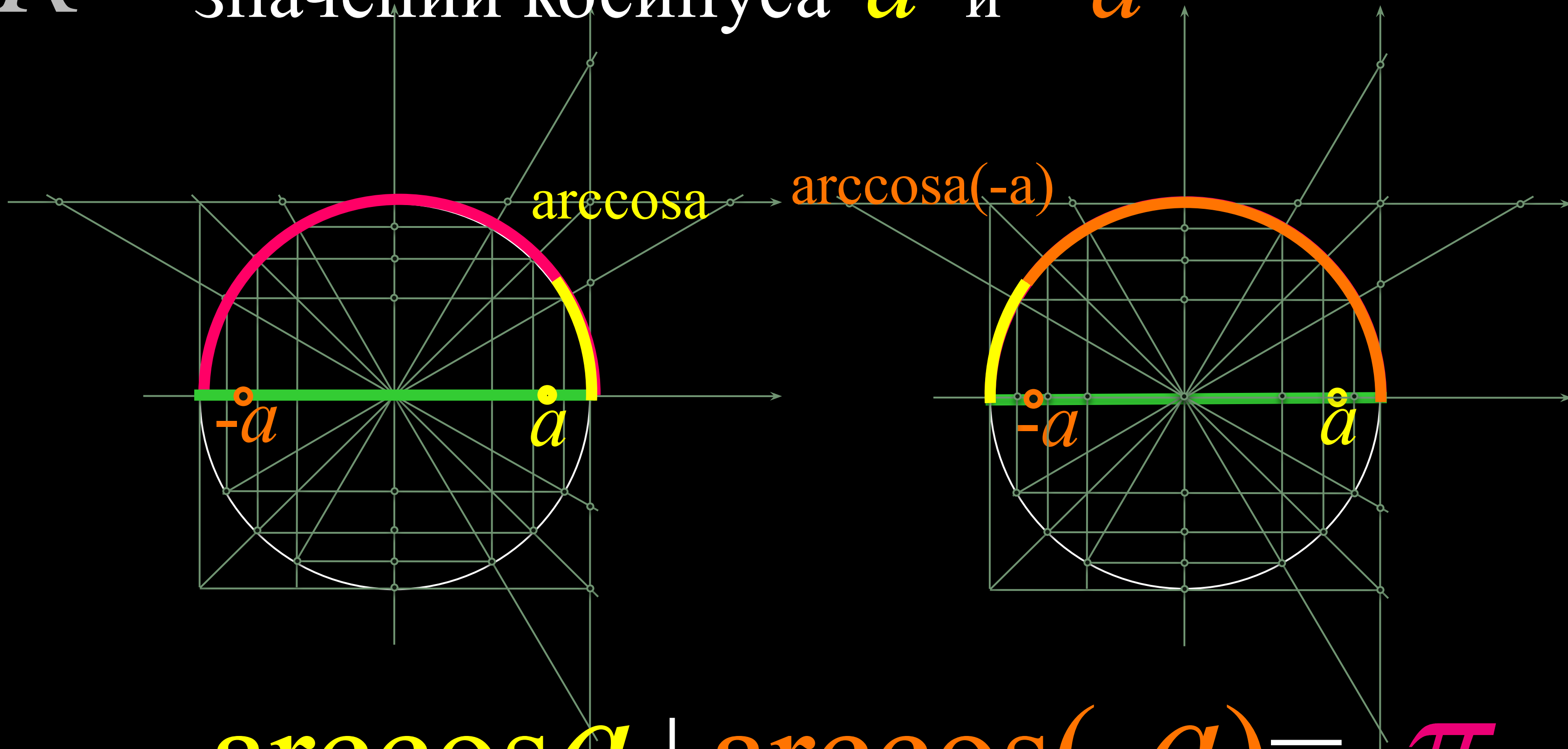
$$-1 \le 3 - 2x \le 1;$$

$$-4 \le -2x \le -2;$$

$$1 \le x \le 2;$$

$$Ответ: x \in [1;2].$$

Свойство арккосинусов противоположных значений косинуса a и $-a$



$$\arccos a + \arccos(-a) = \pi$$

Свойство арккосинусов противоположных чисел a и $-a$

$$\boxed{\arccos(-a) = \pi - \arccos a, \text{ где } 0 < a \le 1}$$

Например:

$\arccos(-1) = \pi - \arccos 1 = \pi - 0 = \pi;$

$\arccos(-0{,}5) = \pi - \arccos 0{,}5 = \pi - \pi/3 = 2\pi/3;$

$\arccos(-\sqrt{3}/2) = \pi - \arccos(\sqrt{3}/2) = \pi - \pi/6 = 5\pi/6.$

К

Формула корней уравнения

$\cos x = a$

для $|a| < 1, a \neq 0$

K

$$\cos x = a$$

$$\text{для } |a| < 1, a \neq 0$$

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathrm{Z}$$

K

$$\cos x = 0{,}7$$

$$a = 0{,}7\ ;\ |0{,}7| < 1$$

$$x = \pm\arccos 0{,}7 + 2\pi n, n \in Z$$

К

$$\cos x = 0,5$$

$$a = 0,5\ ; \qquad |0,5| < 1$$

$$x = \pm \arccos 0,5 + 2\pi n, n \in Z$$

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$$

$$Ответ: x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$$

$$\cos x = a$$

$|a|>1$ — Нет корней

$|a|\le 1$ — Бесконечно много корней

- $a=0,1,-1$ частные случаи
- a- точное значение косинуса
- a- не явл. точным значением косинуса

Вычислите:

$$tg\left(\arccos\left(-\frac{5}{13}\right)\right).$$

Вычислите: $tg\left(\arccos\left(-\frac{5}{13}\right)\right).$

Решение:

$$1)\ \arccos\left(-\frac{5}{13}\right)=t, tgt-?$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos t=-\frac{5}{13},\\ t\in[0;\pi];\end{array}\right|\rightarrow t\in \text{II четверти};$$

$$1+tg^2t=\frac{1}{\cos^2 x}\ \Big|\ \rightarrow 1+tg^2t=\frac{169}{25};$$

$$tg^2t = \frac{169}{25} - \frac{25}{25} = \frac{144}{25} = \left(\frac{12}{5}\right)^2, \Bigg| \rightarrow tgt = -\frac{12}{5}.$$

$$tgt < 0,$$

Ответ:-2,4

Арккосинус. Решение уравнений $\cos x = a$.

Урок№3

Верно ли, что

$$\arccos(\cos t) = t\,?$$

Нет.

Приведем опровергающий пример:

$t = 2\pi$

левая часть: $\arccos(\cos 2\pi) = \arccos 1 = 0;$

правая часть: $2\pi,$

$0 \neq 2\pi.$

Равенство

$$\arccos(\cos t) = t$$

верно только для $t \in [0; \pi]$.

$$\arccos\left(\cos\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4},$$

$$\arccos\left(\cos\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3},$$

$$\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) - ?$$

$$\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \arccos\left(\cos\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

$$\arccos\left(\cos\frac{8\pi}{7}\right)=\arccos\left(\overset{+}{\cos}\underbrace{\left(\pi+\frac{\pi}{7}\right)}_{3\text{ четверть}}\right)=$$

$$\arccos\left(-\cos\frac{\pi}{7}\right)=\pi-\arccos\left(\cos\frac{\pi}{7}\right)=\pi-\frac{\pi}{7}=\frac{6\pi}{7}.$$

Решить уравнение $\cos x = -\frac{3}{4}$ и указать все его корни, принадлежащие промежуткам

$$а)\left[0;\frac{3\pi}{2}\right],$$

$$б)(-\pi;0),$$

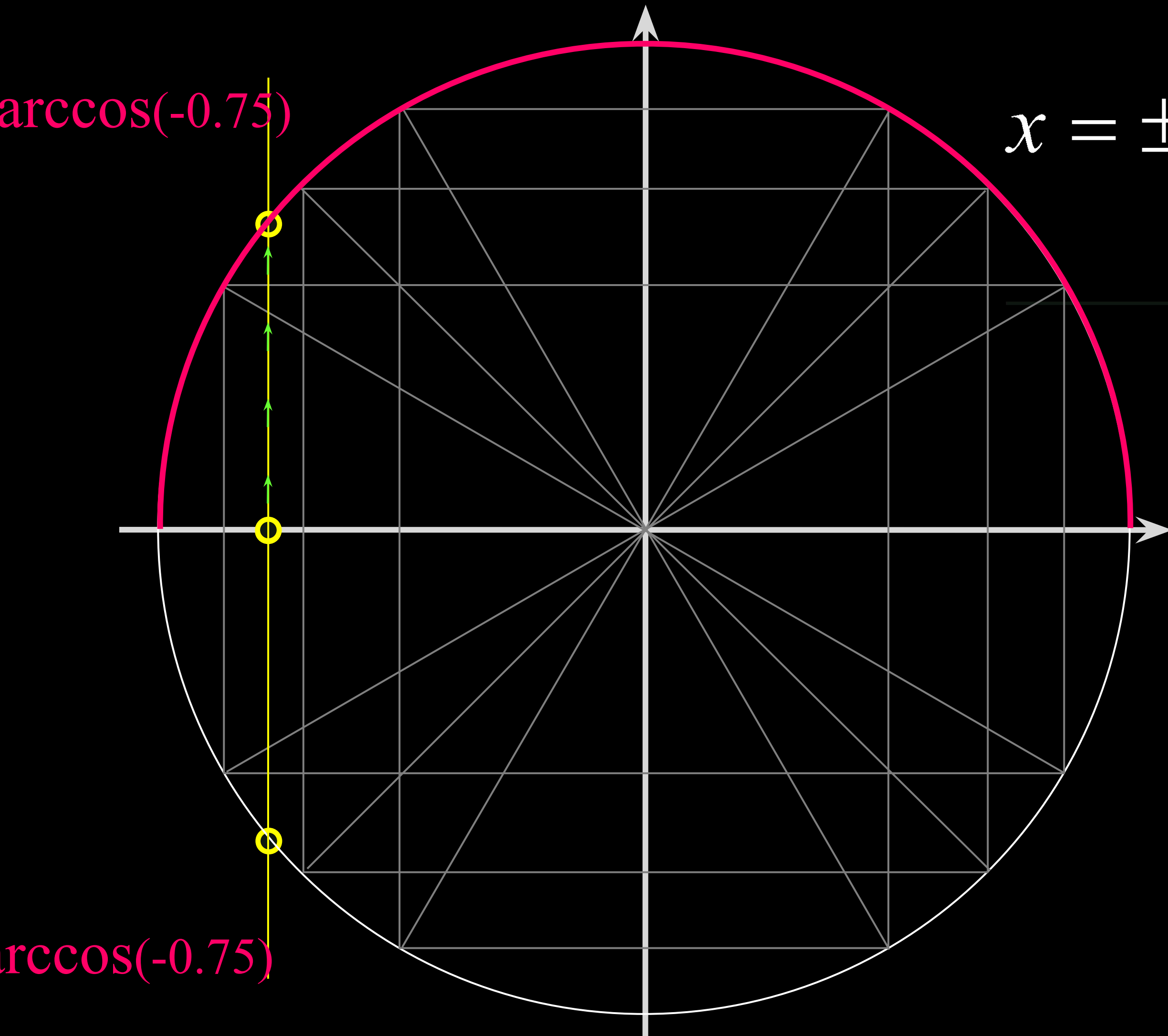
$$в)\left[\pi;\frac{5\pi}{3}\right).$$

1)Решим уравнение

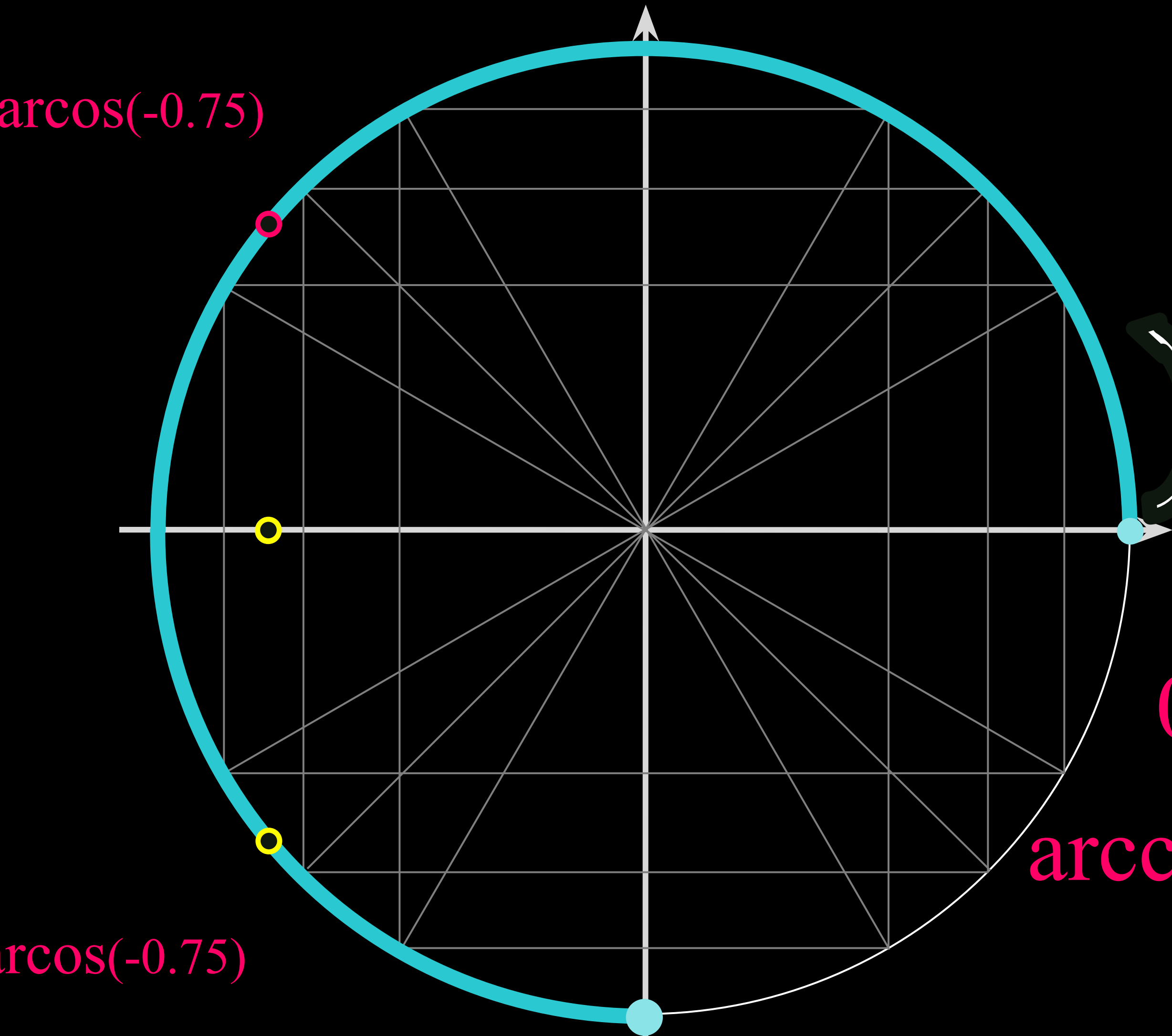
$$\cos x = -\frac{3}{4}$$

$$x = \pm\arccos(-\frac{3}{4}) + 2\pi n,$$

$$n \in Z$$



2)Найдем корни, принадлежащие дуге



$$\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]$$

$$-\arccos(-0{,}75)<0$$

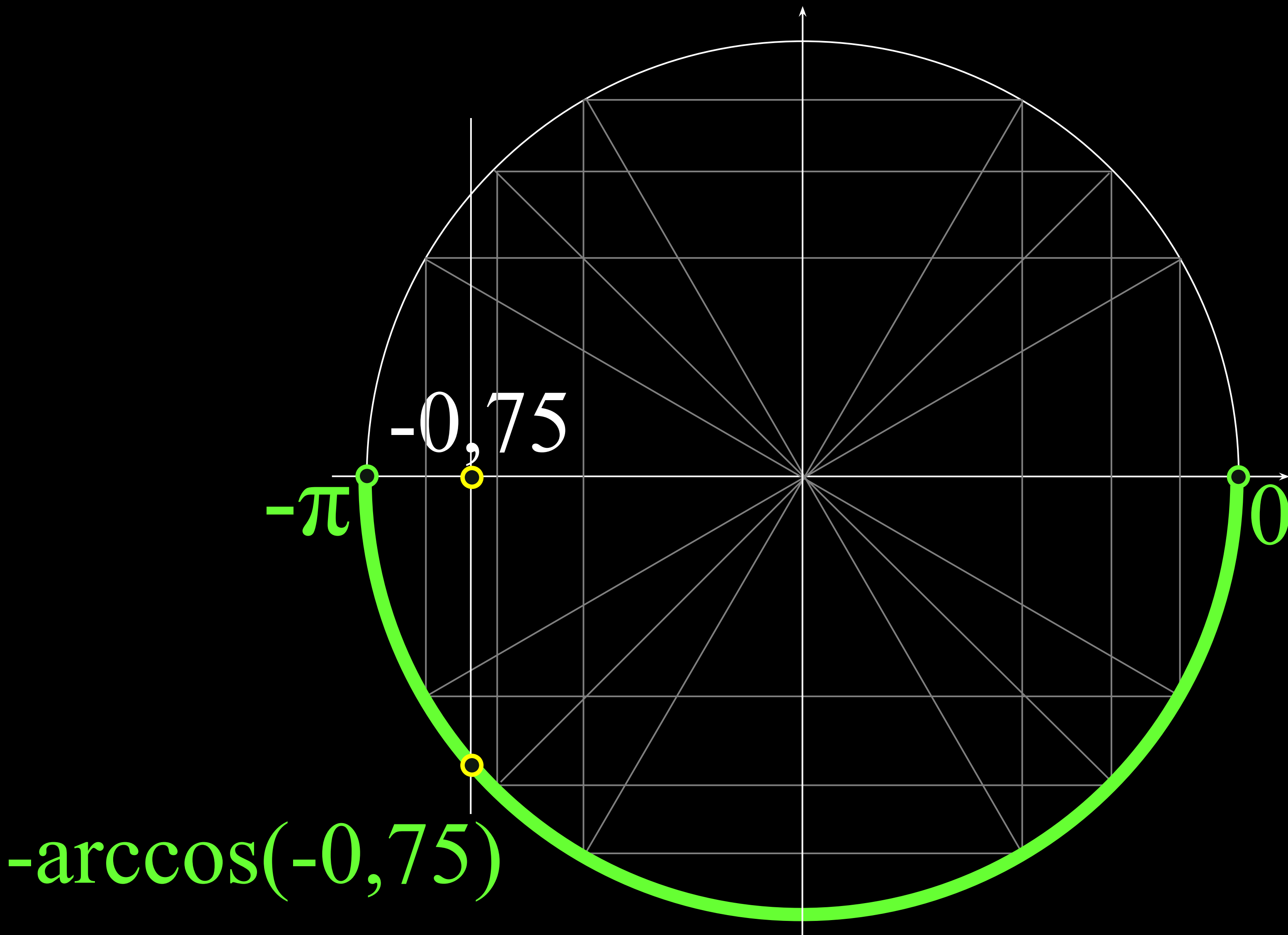
$$0<\arccos(-0{,}75)<\pi$$

$$\arccos(-0{,}75)\in\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]$$

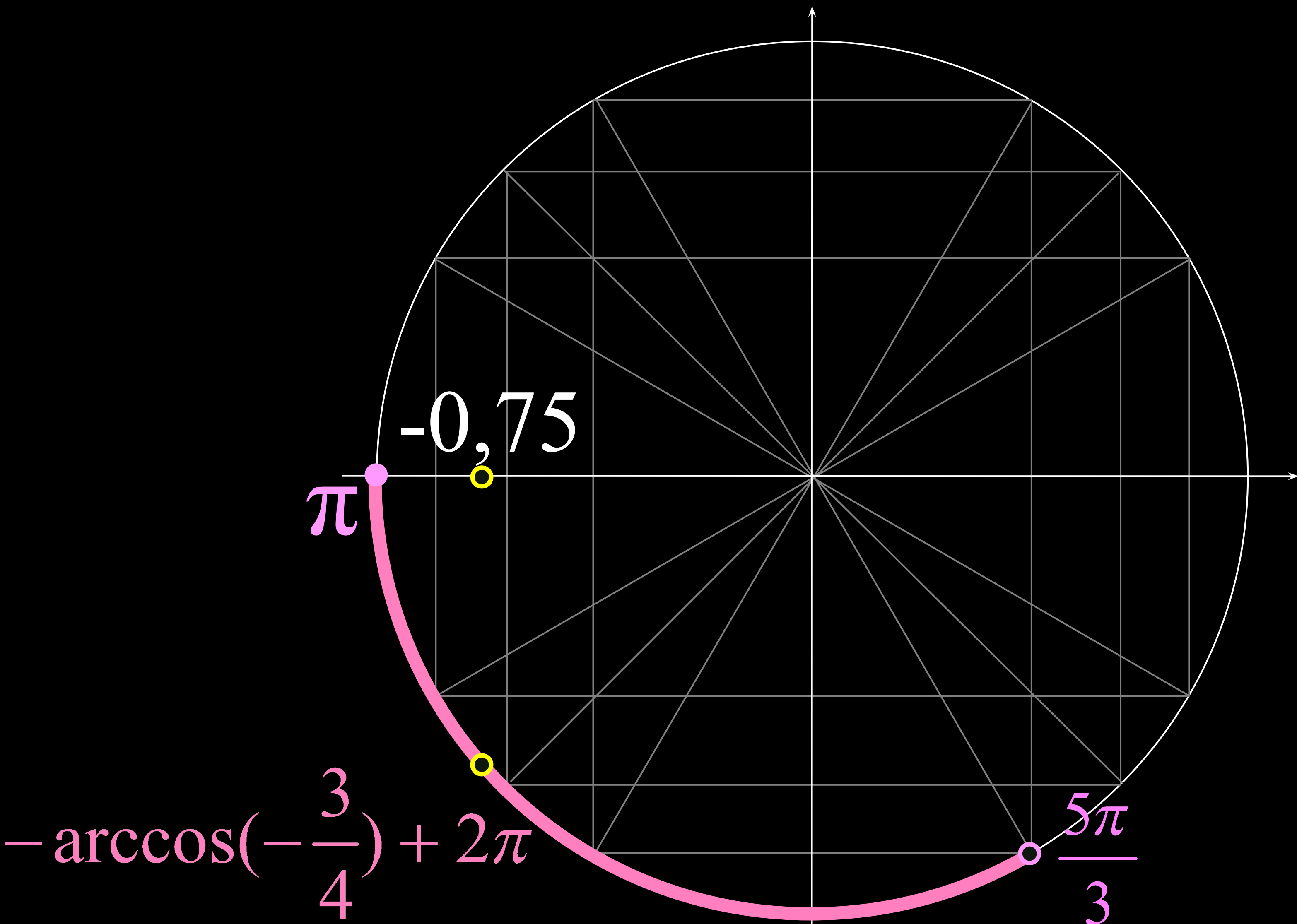
$$-\arccos(-0{,}75)<0$$

$$0<-\arccos(-0{,}75)+2\pi<3\pi/2$$

$$-\arccos(-0{,}75)+2\pi \in \left[0;\frac{3\pi}{2}\right]$$



-0,75
-π
0
-arccos(-0,75)


-0,75
π
$-\arccos(-\frac{3}{4})+2\pi$
$\frac{5\pi}{3}$

Ответ:

$$x = \pm \arccos(-\frac{3}{4}) + 2\pi n, n \in Z;$$

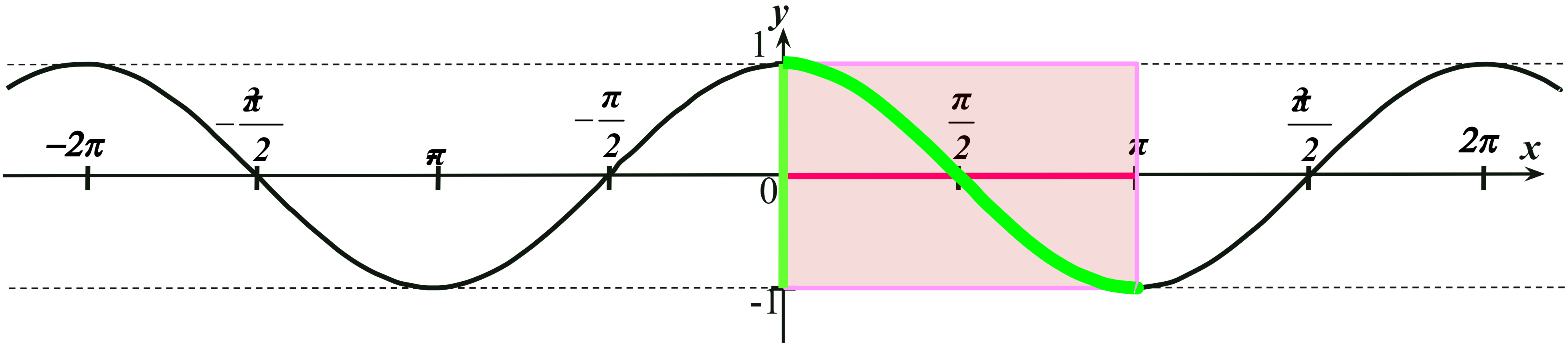
$$а)\ \arccos(-\frac{3}{4}), -\arccos(-\frac{3}{4}) + 2\pi;$$

$$б)\ -\arccos(-\frac{3}{4});$$

$$в)\ -\arccos(-\frac{3}{4}) + 2\pi.$$

На отрезке от 0 до π косинус убывает и все свои значения принимает только один раз

На оси Ox выделим значения арккосинуса



Как найти по графику y=cos *x* ***arccos a*** ?

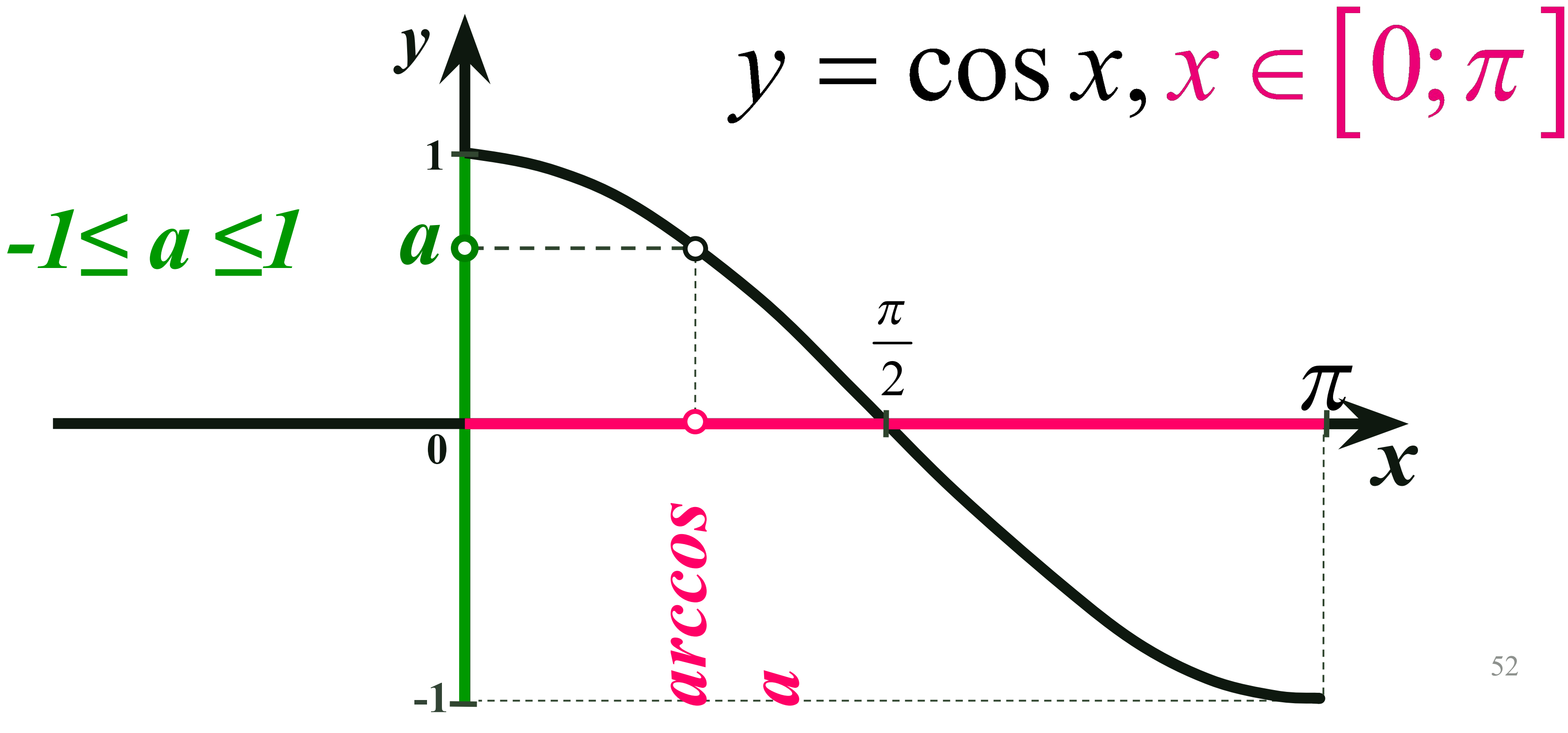
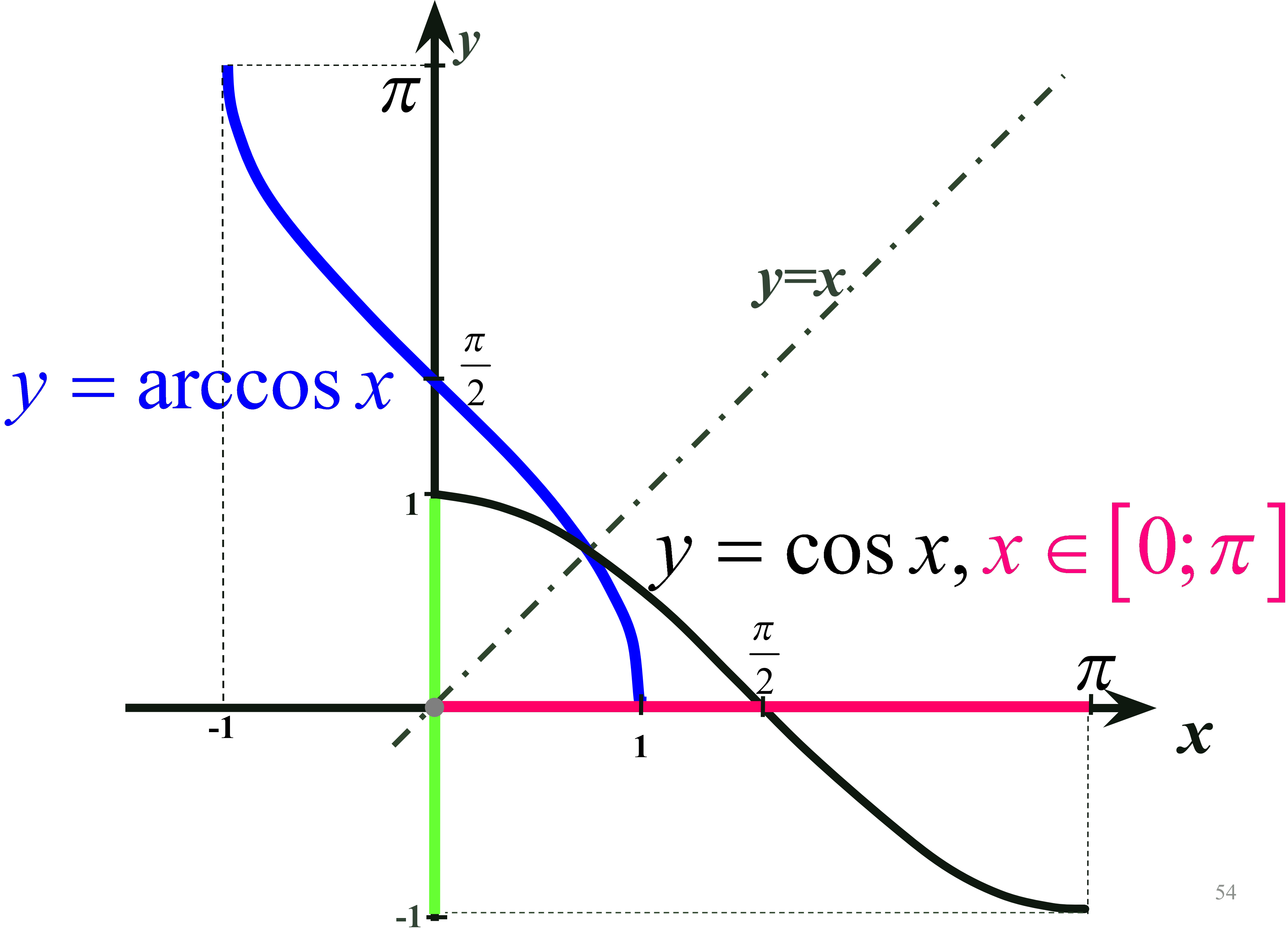


График функции, обратной

$y = \cos x$ при $x \in \left[0; \pi\right]$



y
π
y=x
π/2
y = arccos x
1
y = cos x, x ∈ [0; π]
π/2
π
-1
1
x
-1

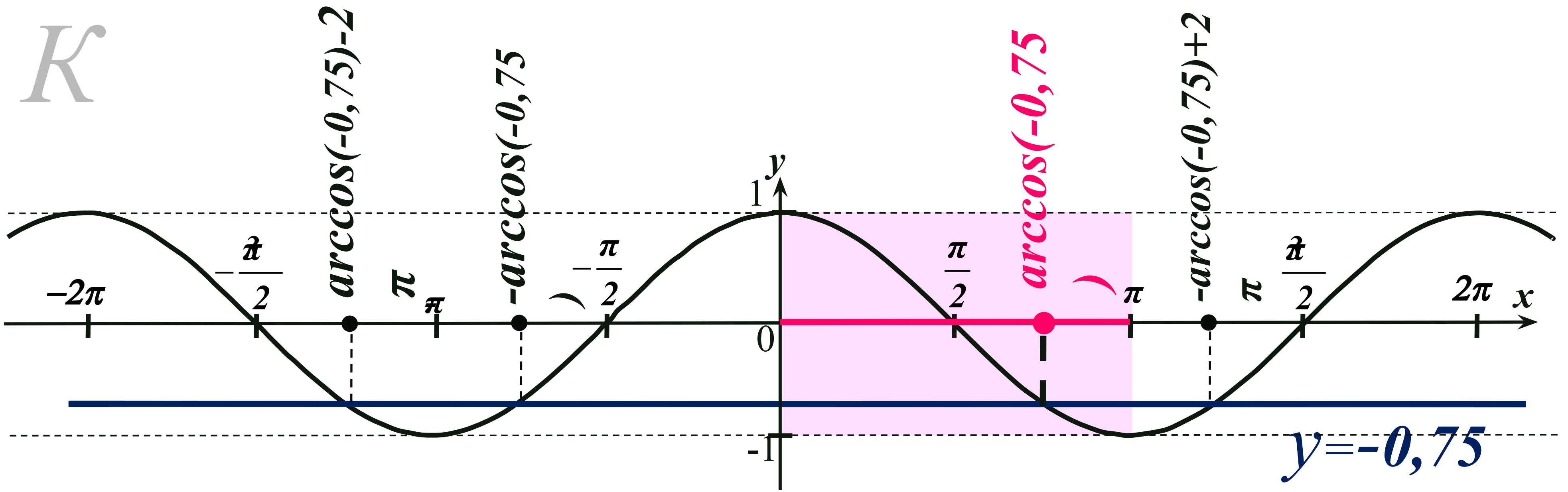
Решить уравнение $\cos x = -\frac{3}{4}$ и указать все его корни, принадлежащие промежуткам

$$а)\left[0;\frac{3\pi}{2}\right],$$

.

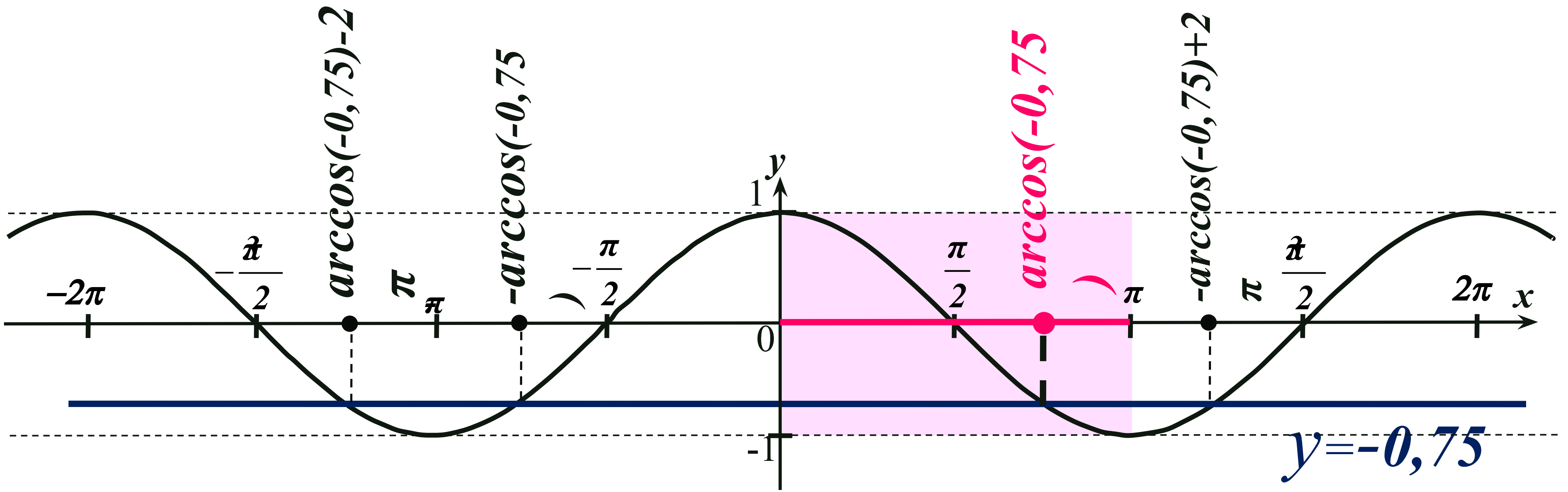
$$б)\left(-\pi;0\right),$$

$$в)\left[\pi;\frac{5\pi}{3}\right).$$



Решим уравнение графически

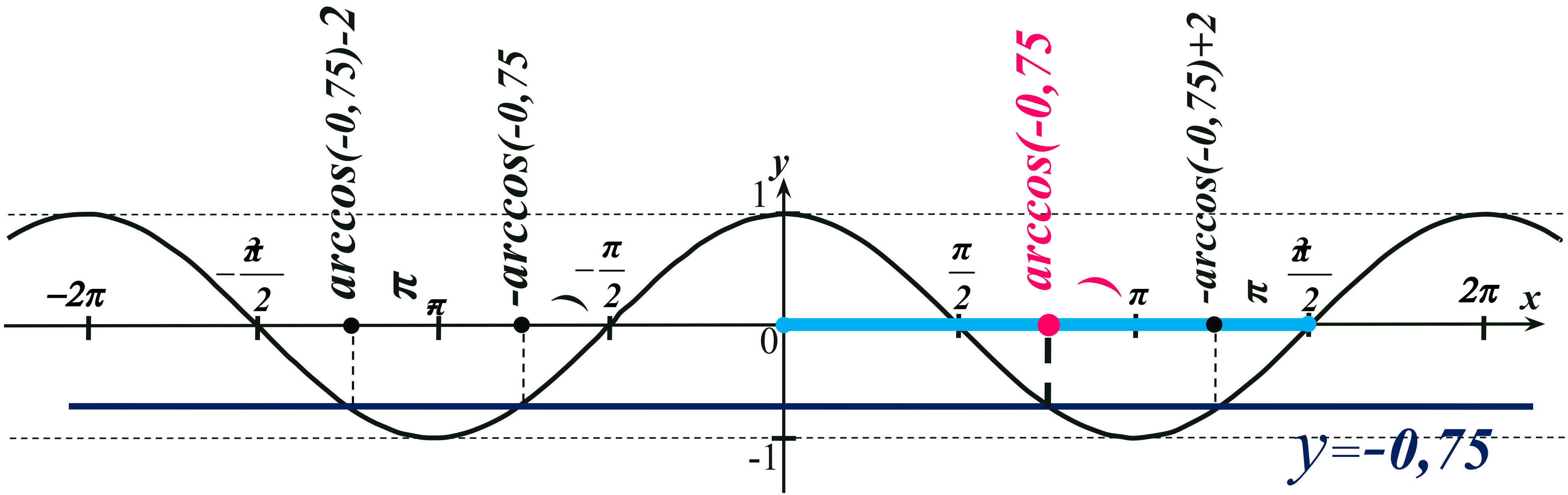
cosx= -0,75



$$\cos x = -0,75$$

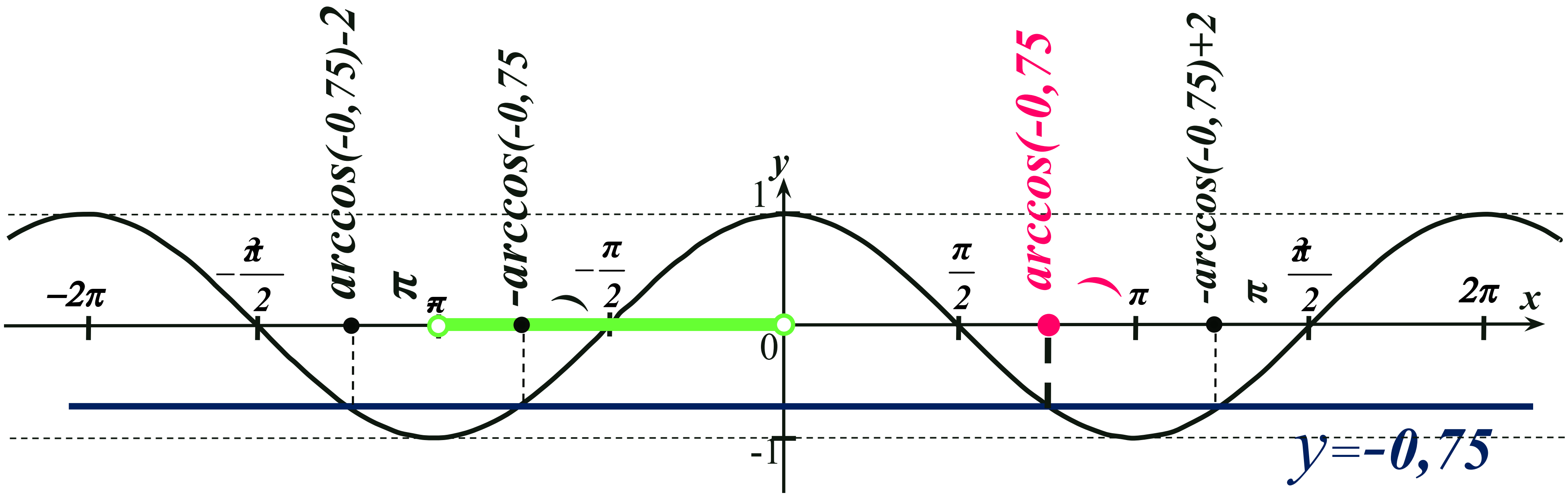
$$x = \pm\arccos(-0,75) + 2\pi n;$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \pi - \arccos 0,75 + 2\pi n \\ x = -\pi + \arccos 0,75 + 2\pi n \end{array}\right. ;$$



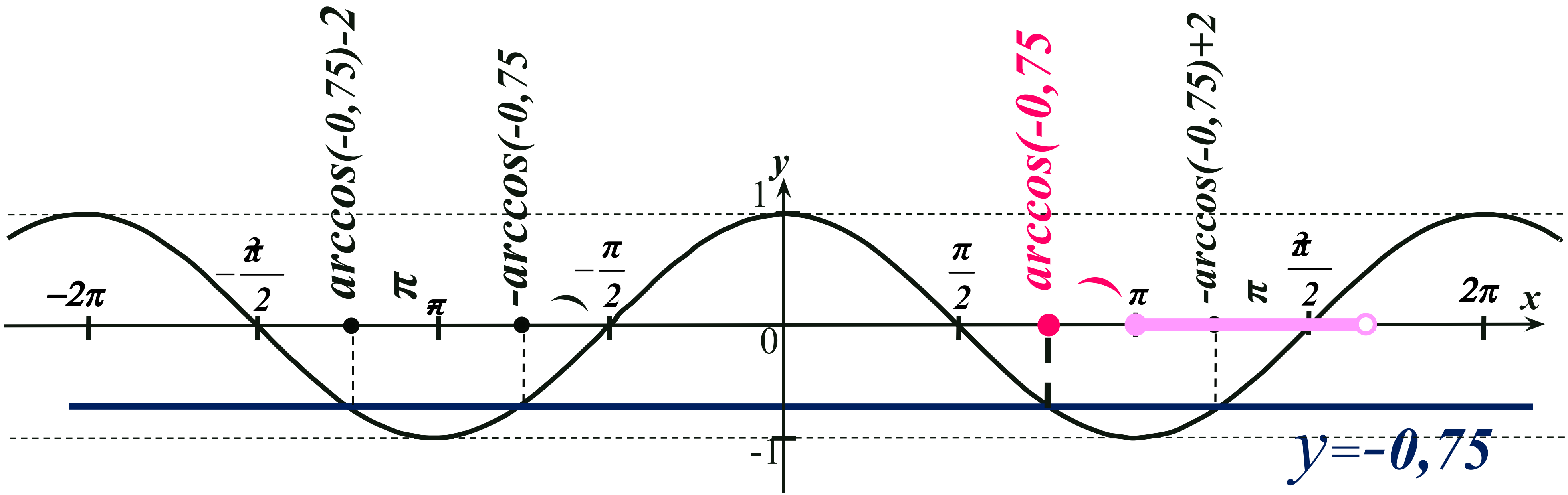
$$a)\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]$$

$$\arccos(-\frac{3}{4}), -\arccos(-\frac{3}{4})+2\pi;$$



$б)\ (-\pi;0)$

$$-\arccos(-\frac{3}{4});$$



$$в)\left[\pi;\frac{5\pi}{3}\right)$$

$$-\arccos(-\frac{3}{4})+2\pi.$$

Ответ:

$$x = \pm\arccos\left(-\frac{3}{4}\right) + 2\pi n, n \in \mathrm{Z};$$

$$a)\ \arccos\left(-\frac{3}{4}\right), -\arccos\left(-\frac{3}{4}\right) + 2\pi;$$

$$б)\ -\arccos\left(-\frac{3}{4}\right);$$

$$в)\ -\arccos\left(-\frac{3}{4}\right) + 2\pi.$$

Используемая литература:

1. Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа. 10-11классы. В 2ч. М.:Мнемозина, 2009. ISBN 978-5-346-01136-1
2. Виленкин Н.Я. и др. Алгебра и математический анализ.10 кл.: Учеб. Пособие для шк. и кл. с углубл. изуч. математики/М.:Мнемозина, 2004. ISBN 5-346-00333-9
3. А.И. Азаров, В.И. Булатов, В.С. Федосенко, А.С. Шибут. Тригонометрия(тождества, уравнения, неравенства, системы). Минск ТетраСистемс 2003 ISBN 985-470-079-8
4. В. Мирошин. Обратные тригонометрические функции. Библиотечка «Первого сентября» Математика №4(16)/2007.

Интернет-ресурсы:

Замковая Т.Б., Нечаева Н.В.

1.От окружности до тригонометра. http://festival.1september.ru/articles/596859

2.Отбор корней. http://festival.1september.ru/articles/596861/