Семинар 12. "Асимптоты графика функции"

симптоты

имптотой кривой называется прямая, к которой неограниченно приближается точка кривой при ее удалении по кривой в бесконечность.

$$\text{Если } \lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty,$$

$$\text{то прямая } x = a \text{ есть } \textit{вертикальная} \text{ асимптота кривой.}$$

апример, кривая $y = \frac{a}{x-a}$ имеет асимптоту $x = a$.

$$\text{Если } \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = c,$$

$$\text{то прямая } y = c \text{ есть } \textit{горизонтальная} \text{ асимптота кривой при } x \to \pm\infty.$$

ли существуют конечные пределы

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k \quad \text{и} \quad \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - kx] = b,$$

$$\text{то прямая } y = kx + b \text{ есть } \textit{наклонная} \text{ асимптота кривой } y = f(x) \text{ при } x \to \pm\infty.$$

ои нахождении горизонтальных и наклонных асимптот следует различать пределы при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$.

Назад Далее Выход

Пример 1. Найти асимптоты кривой $y = \frac{x^2+3x+6}{x-1}$.

Р е ш е н и е. Функция определена для всех действительных чисел, кроме $x = 1$.
Так как

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{x^2+3x+6}{x-1} = -\infty, \text{ а } \lim_{x\to 1+0} \frac{x^2+3x+6}{x-1} = +\infty,$$

то прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой.
Так как

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+3x+6}{x-1} = \pm\infty,$$

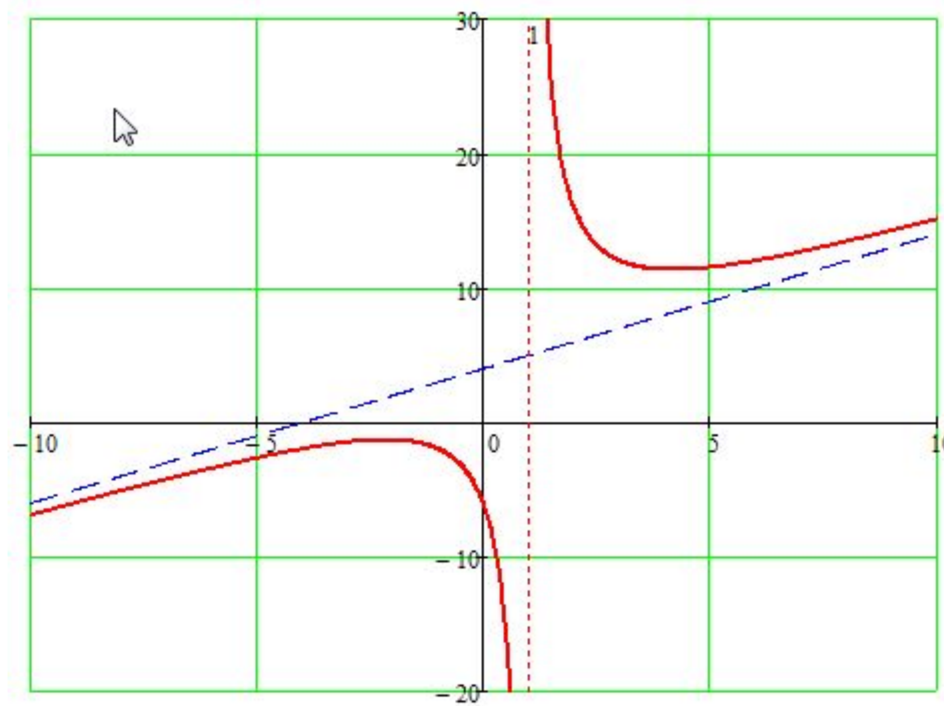
то горизонтальных асимптот нет.

Найдем параметры k и b наклонной асимптоты:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+3x+6}{x(x-1)} = 1 = k \ ; \quad \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{x^2+3x+6}{x-1} - x\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+3x+6-x^2+x}{x-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x+6}{x-1} = 4 = b,$$

следовательно, прямая $y = x + 4$ – наклонная асимптота.

Эскиз графика функции имеет вид.



Пример 2. Найти асимптоты кривой $y = \frac{x}{x^2-1}$.

Р е ш е н и е. Функция определена для всех действительных чисел, кроме $x = 1$ и $x = -1$.

Так как

$$\lim_{x\to 1+0} \frac{x}{x^2-1} = +\infty; \quad \lim_{x\to 1-0} \frac{x}{x^2-1} = -\infty;$$

$$\lim_{x\to -1+0} \frac{x}{x^2-1} = +\infty; \quad \lim_{x\to -1-0} \frac{x}{x^2-1} = -\infty,$$

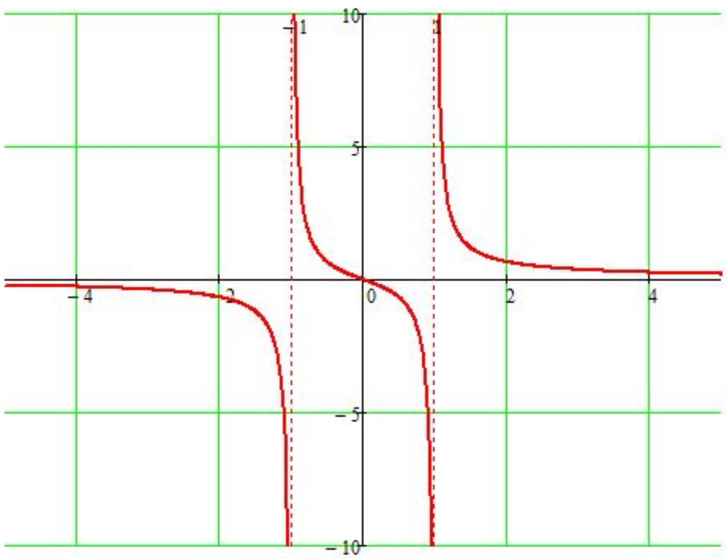
то прямые $x = 1$ и $x = -1$ являются вертикальными асимптотами.

Так как

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{x}{x^2-1} = 0,$$

то прямая $y = 0$ – горизонтальная асимптота.

Так как график имеет горизонтальную асимптоту, то наклонной асимптоты нет.



Пример 3. Найти асимптоты кривой $y = \frac{\sin x}{x}$.

Р е ш е н и е. Функция определена для всех действительных чисел, кроме $x = 0$.
Так как

$$\lim_{x \to 0 \pm 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

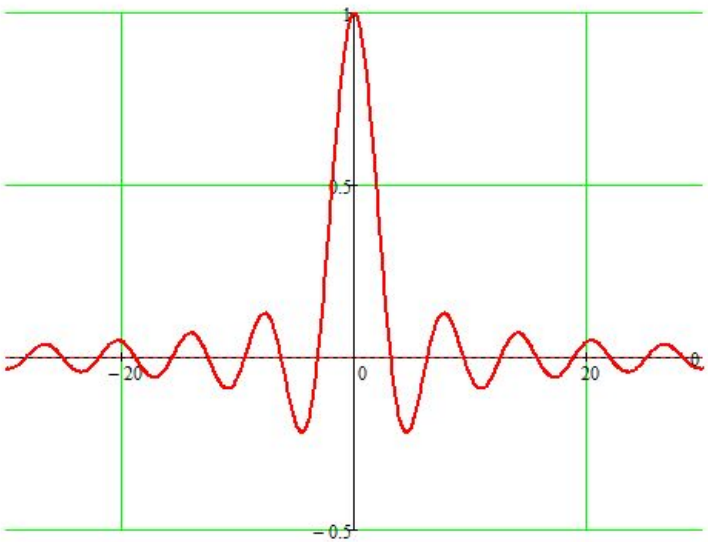
то вертикальной асимптоты кривой нет.

Так как

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sin x}{x} = 0,$$

то прямая $y = 0$ – горизонтальная асимптота.

Так как график имеет горизонтальную асимптоту, то наклонной асимптоты нет.



Выберите все верные утверждения относительно функции $y = \ln \sin x$

- [ ] $f(x)$ не имеет асимптот.
- [ ] $f(x)$ имеет асимптоту при $x \to -\infty$.
- [x] $f(x)$ имеет вертикальную асимптоту.
- [ ] $f(x)$ имеет асимптоту при $x \to +\infty$.

Выберите все верные утверждения относительно функции $y = e^{-\frac{1}{x}}$

- [x] $f(x)$ имеет асимптоту при $x \to -\infty$
- [ ] $f(x)$ не имеет асимптот
- [x] $f(x)$ имеет вертикальную асимптоту
- [x] $f(x)$ имеет асимптоту при $x \to +\infty$

Выберите все верные утверждения относительно функции $y = \frac{x^3+x}{1-x^2}$

- [x] $f(x)$ имеет вертикальную асимптоту
- [ ] $f(x)$ не имеет асимптот
- [ ] $f(x)$ имеет асимптоту при $x \to +\infty$
- [x] имеет наклонную асимптоту
- [ ] $f(x)$ имеет асимптоту при $x \to -\infty$

Найдите уравнения всех асимптот функции

$$y = -x + 3 + \ln(x+1)$$

- [ ] $y = 3$
- [ ] $y = -x + 3$
- [x] $\cancel{y = -x}$
- [x] $x = -1$

Найдите уравнения всех асимптот функции $y = \frac{2x^2}{x^2-1}$

- [x] $x = -1$
- [ ] $y = 2x$
- [x] $x = 1$
- [x] $y = 2$

Найдите уравнения всех асимптот функции $y = \frac{e^{x-1}}{(x-1)^2}$

- [x] $y = 0$
- [ ] $y = e^{-1}$
- [x] $x = 1$
- [ ] $y = 1$