АВТОМАТИЗАЦИЯ ТРУДА УЧИТЕЛЯ НА ПРИМЕРЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОГРАММНОГО ПАКЕТА MATHCAD

Автор
Лагутина Марина Андреевна

Руководитель проекта
Учитель математики ГБОУ СОШ №237

Белкина Елена Геннадьевна

ЦЕЛИ РАБОТЫ

- Ознакомить учителей математики с возможностями продукта MathCAD
- Обеспечить автоматизацию работы учителей с использованием MathCAD
- Рассмотреть решение систем алгебраических уравнений с помощью MathCAD

ДЛЯ КОГО ЭТА РАБОТА

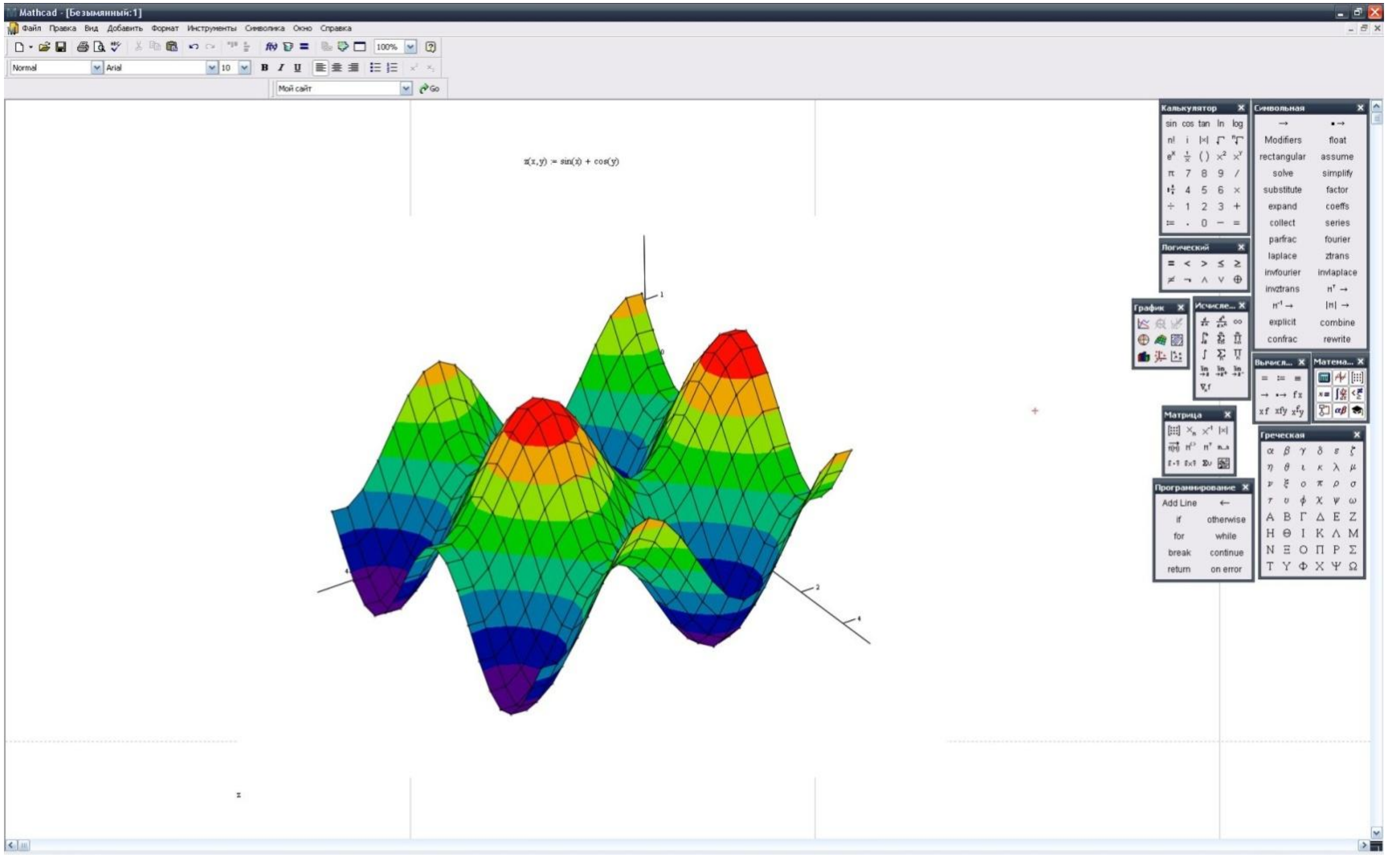
- Работа может применяться на факультативных занятиях и математических кружках
- Работа ориентирована на **школьных учителей математики,** в том числе проводящих факультативные занятия и математические кружки.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

- Работа разделена на две части:
  1. Предоставляет базовые знания работы с программой MathCAD
  2. Как они могут быть применены для решения СЛАУ и других типовых математических задач, часто встречаемых в ходе преподавания школьных дисциплин

КАК РЕШАЮТСЯ ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ?

- Язык Fortran
  - задачи линейной алгебры, интегрирование, решение дифференциальных уравнений
- Математические пакеты
  - Mathematica
  - Maple
  - Matlab
  - Mathcad



ПОЧЕМУ MATHCAD?

Пакет **MathCAD** популярен, пожалуй, более в инженерной, чем в научной среде.

ПОЧЕМУ MATHCAD?

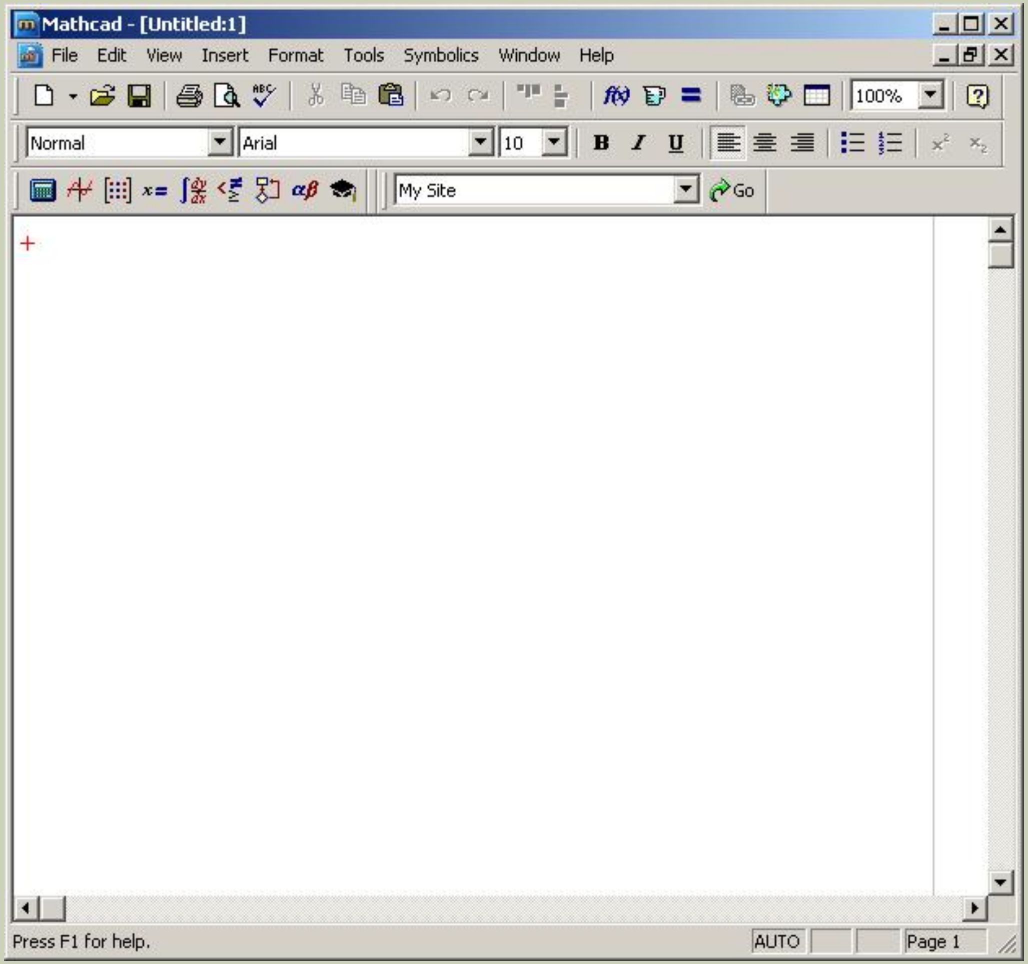
- Режим WYSIWYG
- Не требуется изучать какую-либо систему команд, как, например, в случае пакетов **Mathematica** или **Maple**
- Ориентирован на проведение численных расчетов
- Простота освоения
- Дружественный интерфейс

ЧТО УМЕЕТ MATHCAD?

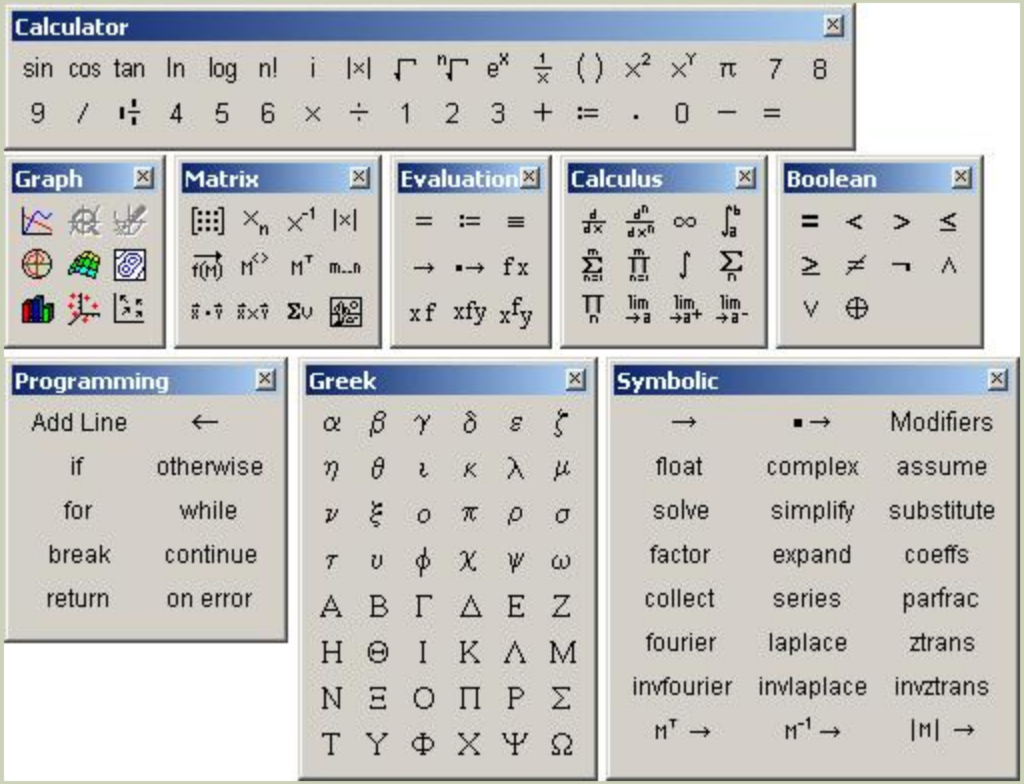
- подготовливать научно-технические документы, содержащие текст, и формулы, записанные в привычной для специалистов форме;
- вычислять результаты математических операций, в которых участвуют числовые константы, переменные и размерные физические величины;
- операции с векторами и матрицами;
- решение уравнений и систем уравнений (неравенств);
- проводить статистические расчеты и анализ данных;
- строить двумерные и трехмерные графики;
- тождественные преобразования (в том числе упрощение), аналитическое решение уравнений и систем;
- дифференцирование и интегрирование, аналитическое и численное;
- решение дифференциальных уравнений;

- **И многое другое…**

ИНТЕРФЕЙС MATHCAD



ОСНОВНЫЕ КОМАНДЫ



ПРАВИЛА НАБОРА КОМАНД

5^2=25

ПРАВИЛА НАБОРА КОМАНД

Êîä íàïèñàí íà **MathCAD**, ùåëêíèòå äâà ðàçà íà ýòîé îáëàñòè

$5^2 = 25$ $5^3 = 125$ $5^4 = 625$ $5^5 = 3.125 \times 10^3$

ПРАВИЛА НАБОРА КОМАНД

Íàïèøåì íåñêîëüêî îïðåäåëåíèé

$x := 10$ $\qquad f(x) := \log(x)$ $\qquad i := 2..\,5$ $\qquad$ - îïðåäåëåíèÿ

Íàéäåì çíà÷åíèå ëîãàðèôìà

$f(x) = 1$ $\qquad f(100) = 2$ $\qquad i = \begin{array}{|c|}\hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline 4 \\ \hline 5 \\ \hline \end{array}$

ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ

Упростить выражение:

$$\frac{a^2 - b^2}{2a + 2b}$$

ПРАВИЛА НАБОРА КОМАНД

- Указатель мыши подводим к опции “Символы” в главном меню и щелкаем левой кнопкой мыши один раз (далее входим в “Символы”).
- В выпадающем меню указатель мыши подводим к опции “Упростить” и щелкаем на указанном пункте. На экране отображается наше выражение, но уже в выделенном виде.
- Повторяем наши действия: входим в “Символы” (подводим указатель мыши и щелкаем левой кнопкой мыши) и активизируем “Упростить”. На экране появляется ответ:

ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ

Получаем ответ:

$$\frac{1}{2} \cdot a - \frac{1}{2} \cdot b$$

ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ

Упростить выражение:

$$10x^2 - 5y^2, при\ x = 1.5,\ y = -1.6$$

ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ

Набираем на клавиатуре:

X= 1.5

Y=-1.6

10x^2-5y^2=

ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ

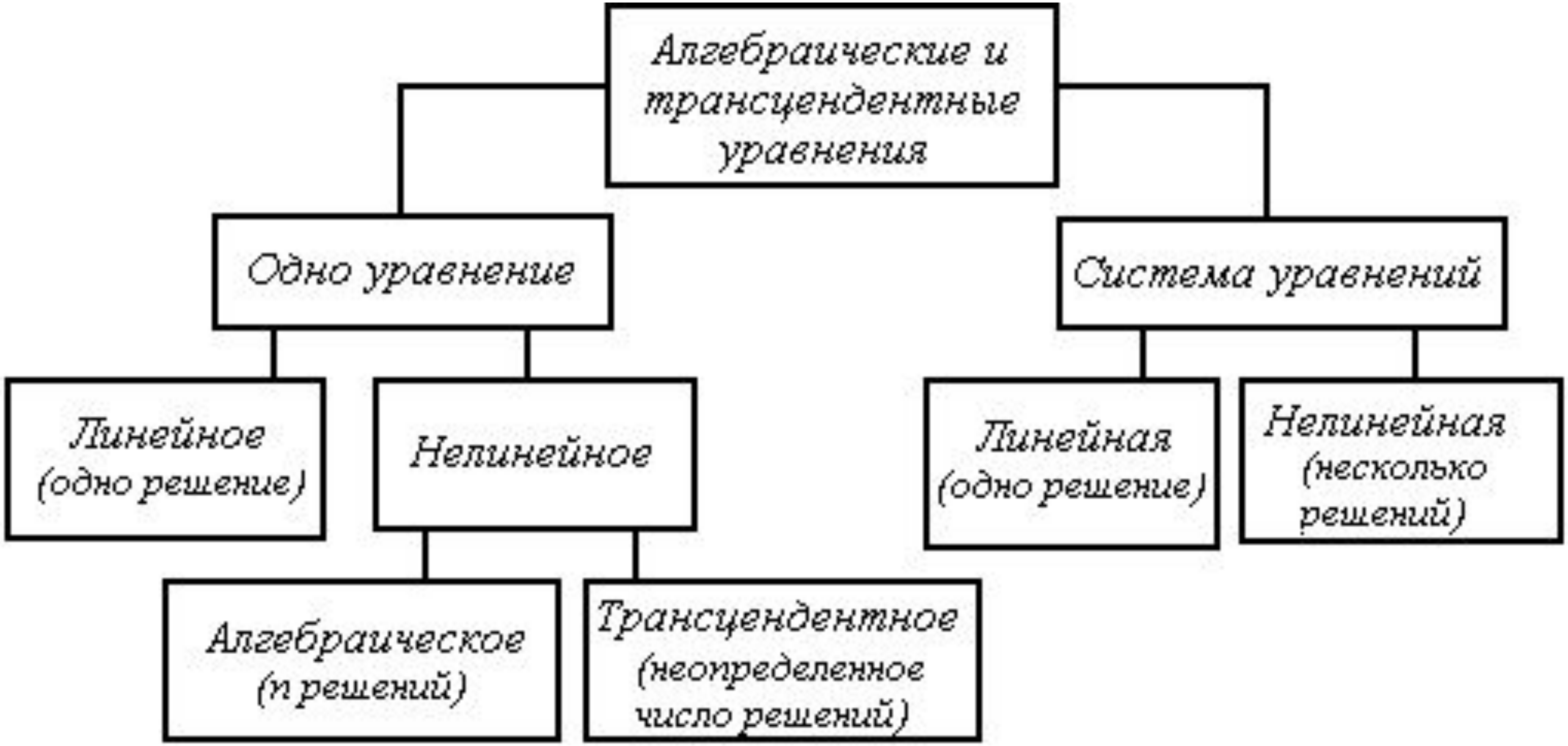
Получаем ответ:

$$\mathbf{x} := 1.5$$

$$y := -1.6$$

$$10x^2 - 5y^2 = 9.7$$

РЕШЕНИЕ СЛАУ



СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ СЛАУ

Способы решения делятся на две группы:

1. *точные методы*, представляющие собой конечные алгоритмы для вычисления корней системы (решение систем с помощью обратной матрицы, правило **Крамера**, метод **Гаусса** и др.),
2. *итерационные методы*, позволяющие получить решение системы с заданной точностью путем сходящихся итерационных процессов (**метод итерации, метод Зейделя** и др.).

СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ СЛАУ

Точные методы

- Вследствие неизбежных округлений результаты являются приближенными

Итерационные методы

- Добавляется погрешность метода. Эффективное применение итерационных методов существенно зависит от удачного выбора начального приближения и быстроты сходимости процесса

РЕШЕНИЕ СЛАУ С ПОМОЩЬЮ БЛОКА GIVEN И ФУНКЦИИ FIND

- MathCAD дает возможность решать системы уравнений.

  Максимальное число уравнений и переменных равно **50**. Результатом решения системы будет численное значение искомого корня.

РЕШЕНИЕ СЛАУ С ПОМОЩЬЮ БЛОКА GIVEN И ФУНКЦИИ FIND

- Системы линейных и нелинейных уравнений и неравенств позволяет решать блок ***given*** в сочетании с функцией ***Find***. В блоке ***given*** записывается система уравнений и/или неравенств, подлежащих решению.

РЕШЕНИЕ СЛАУ С ПОМОЩЬЮ БЛОКА GIVEN И ФУНКЦИИ FIND

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 7, \\ x - 3y + 2z = 5, \\ x + y + z = 3. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ СЛАУ С ПОМОЩЬЮ БЛОКА GIVEN И ФУНКЦИИ FIND

- Воспользуемся MathCAD и запишем систему в терминах блока «given - find»:

$$\begin{gathered}\text{given}\\ x + 2y + 3z = 7\\ x - 3y + 2z = 5\\ x + y + z = 3\\ \text{find}(x, y, z) \rightarrow \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\end{gathered}$$

РЕШЕНИЕ СЛАУ МАТРИЧНЫМ СПОСОБОМ

- *Матричным уравнением* называется уравнение, коэффициенты и неизвестные которого – прямоугольные матрицы соответствующей размерности.

Матричные уравнения можно разрешать только, если система не вырождена, то есть ее определитель отличен от нуля. Матричный способ более изящен (хотя и не самый эффективный с точки зрения вычислительной математики).

РЕШЕНИЕ СЛАУ МАТРИЧНЫМ СПОСОБОМ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b,$$

$$x = A^{-1}b.$$

РЕШЕНИЕ СЛАУ МАТРИЧНЫМ СПОСОБОМ

- **Последовательность действий для решения с помощью Mathcad:**
  1. Установите режим автоматических вычислений.
  2. Введите матрицу системы и матрицу-столбец правых частей.
  3. Вычислите решение системы по формуле x=A-1b.
  4. Проверьте правильность решения умножением матрицы системы на вектор-столбец решения.
  5. Найдите решение системы с помощью функции **lsolve** и сравните результаты.

РЕШЕНИЕ СЛАУ МАТРИЧНЫМ СПОСОБОМ

Напишем код решения СЛАУ матричным способ на MathCAD. Также Решим систему с помощью функции **lsolve** и сравним результат с решением **x=A-1b**. С функцией **lsolve** мы сталкиваемся впервые, опишем ее:

Lsolve(A,b) – возвращает вектор решения такой, что Ax=b.

Аргументы***:***

A - квадратная, не сингулярная матрица.

b - вектор, имеющий столько же рядов, сколько рядов в матрице ***A***.

РЕШЕНИЕ СЛАУ МАТРИЧНЫМ СПОСОБОМ

Ðåøåíèå ÑËÀÓ ìàòðè÷íûì ñïîñîáîì è ñ ïîìîùüþ lsolve

Ìàòðèöà ñèñòåìû: Ìàòðèöà ïðàâîé ÷àñòè

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Âû÷èñëåíèå îïðåäåëèòåëÿ

$$|A| = 5$$

Îïðåäåëèòåëü îòëè÷åí îò íóëÿ, ñèñòåìà èìååò åäèíñòâåííîå ðåøåíèå

$$x := A^{-1} \cdot b \qquad x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$ -îòâåò

$$A \cdot x - b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ - ïðîâåðêà ðåøåíèÿ

Ðåøåíèå ñèñòåìû ñ ïîìîùüþ ôóíêöèè **lsolve**

$$x := \mathrm{lsolve}(A, b) \qquad x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

РЕШЕНИЕ СЛАУ МЕТОДОМ ГАУССА

- Метод Гаусса, его еще называют методом Гауссовых исключений, состоит в том, что систему приводят последовательным исключением неизвестных к эквивалентной системе с треугольной матрицей.

РЕШЕНИЕ СЛАУ МЕТОДОМ ГАУССА

$$\begin{cases} x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1, \\ \qquad\qquad x_2 + \dots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2, \\ \qquad\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_n = \beta_n, \end{cases}$$

Решение которой находят по рекуррентным формулам:

$$x_n = \beta_n, \quad x_i = \beta_i - \sum_{j=i+1}^{n} \alpha_{ij} x_j, \quad (i = n-1, n-2, \dots, 1)$$

РЕШЕНИЕ СЛАУ МЕТОДОМ ГАУССА

- Прямой ход метода Гаусса — элементарными операциями над строками приводят расширенную матрицу системы к ступенчатому виду:

$$A_p = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ 0 & 1 & \cdots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \beta_n \end{bmatrix},$$

РЕШЕНИЕ СЛАУ МЕТОДОМ ГАУССА

- Обратный ход метода Гаусса — ступенчатую матрицу преобразуют так, чтобы в первых *n* столбцах получилась единичная матрица:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & x_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & x_n \end{bmatrix}$$

Последний, (n + 1) столбец этой матрицы содержит решение системы.

РЕШЕНИЕ СЛАУ МЕТОДОМ ГАУССА

- В MathCAD прямой и обратный ходы метода Гаусса выполняет функция **rref(A)**.

Далее показано решение системы линейных уравнений методом Гаусса, в котором используются следующие функции:

  - **Rref(A)** - возвращается ступенчатая форма матрицы *A*.
  - **Augment(A,B)** - Возвращается массив, сформированный расположением А и В бок о бок. Массивы А и В должны иметь одинаковое число строк

РЕШЕНИЕ СЛАУ МЕТОДОМ ГАУССА

- **Последовательность действий:**

  Функция **augment(A,b)** формирует расширенную матрицу системы добавлением к матрице системы справа столбца правых частей. Функция **rref** приводит расширенную матрицу системы к ступенчатому виду, выполняя прямой и обратный ходы гауссова исключения. Последний столбец содержит решение системы.

РЕШЕНИЕ СЛАУ МЕТОДОМ ГАУССА

Ðåøåíèå ÑËÀÓ ìåòîäîì Ãàóññà

Ìàòðèöà ñèñòåìû: Ìàòðèöà ïðàâîé ÷àñòè

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}$$

ORIGIN:= 1

Ôîðìèðîâàíèå ðàñøèðåííîé ìàòðèöû ñèñòåìû:

$$Ab := \mathrm{augment}(A, b) \qquad Ab = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 15 \end{pmatrix}$$

Ïðèâåäåíèå ðàñøèðåííîé ìàòðèöû ñèñòåìû ê ñòóïåí÷àòîìó âèäó (ïðÿìîé è îáðàòíûé õîäû ìåòîäà Ãàóññà):

$$Ag := \mathrm{rref}(Ab) \qquad Ag = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Ôîðìèðîâàíèå ñòîëáöà ðåøåíèÿ ñèñòåìû: Ïðîâåðêà ïðàâèëüíîñòè

$$x := \mathrm{submatrix}(Ag, 1, 3, 4, 4) \qquad x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad A \cdot x - b = \begin{pmatrix} 1.776 \times 10^{-15} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

РЕШЕНИЕ СЛАУ МЕТОДОМ КРАМЕРА

- **Последовательность действий:**

  Вычисляем D определитель матрицы A.

  Зададим матрицу DX1, заменой первого столбца матрицы A, матрицей b. Вычисляем определитель матрицы DX1.

  Зададим матрицу DX2, заменой второго столбца матрицы A, матрицей b. Вычисляем определитель матрицы DX2.

  Зададим матрицу DX3, заменой третьего столбца матрицы A, матрицей b. Вычисляем определитель матрицы DX3.

  Определяем решение системы линейных уравнений x_1, x_2, x_3.

РЕШЕНИЕ СЛАУ МЕТОДОМ КРАМЕРА

Ðåøåíèå ÑËÀÓ ìåòîäîì Êðàìåðà

Ìàòðèöà ñèñòåìû: Ìàòðèöà ïðàâîé ÷àñòè

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$DX := |A| \qquad DX = 5$$

$$DX1 := \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 15 & -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad DX1 := |DX1| \qquad DX1 = 10$$

$$DX2 := \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 15 & 4 \end{pmatrix} \qquad DX2 := |DX2| \qquad DX2 = 5$$

$$DX3 := \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 15 \end{pmatrix} \qquad DX3 := |DX3| \qquad DX3 = 15$$

$$x := \frac{DX1}{DX} \qquad x = 2$$

$$y := \frac{DX2}{DX} \qquad y = 1$$

$$z := \frac{DX3}{DX} \qquad z = 3$$

ВЫВОДЫ

- Пакет MathCAD чрезвычайно интуитивен, т.к. все формулы в его документах записываются в традиционной форме, и как таковой язык программирования не применяется, а богатый пакет встроенных функций позволяет решать многочисленные задачи: разрешать уравнения и системы, раскладывать многочлены и решать неравенства, строить графики и т.д.
- Данная работа позволит ученикам и учителям быстро освоить основные навыки работы с пакетом MathCAD, а последовательные примеры и методы решения помогут их закрепить для решения новых задач.