

АВТОМАТИЗАЦИЯ ТРУДА
УЧИТЕЛЯ НА ПРИМЕРЕ
РЕШЕНИЯ СИСТЕМ
АЛГЕБРАИЧЕСКИХ
УРАВНЕНИЙ
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ
ПРОГРАММНОГО ПАКЕТА
MATHCAD

Автор
Лагутина Марина
Андреевна

Руководитель
проекта
Учитель
математики
ГБОУ СОШ
№237

Белкина
Елена
Геннадьевна

ЦЕЛИ РАБОТЫ

- Ознакомить учителей математики с возможностями продукта MathCAD
- Обеспечить автоматизацию работы учителей с использованием MathCAD
- Рассмотреть решение систем алгебраических уравнений с помощью MathCAD

ДЛЯ КОГО ЭТА РАБОТА

- Работа может применяться на факультативных занятиях и математических кружках
- Работа ориентирована на **школьных учителей математики**, в том числе проводящих факультативные занятия и математические кружки.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

- Работа разделена на две части:
 1. Предоставляет базовые знания работы с программой MathCAD
 2. Как они могут быть применены для решения СЛАУ и других типовых математических задач, часто встречаемых в ходе преподавания школьных дисциплин

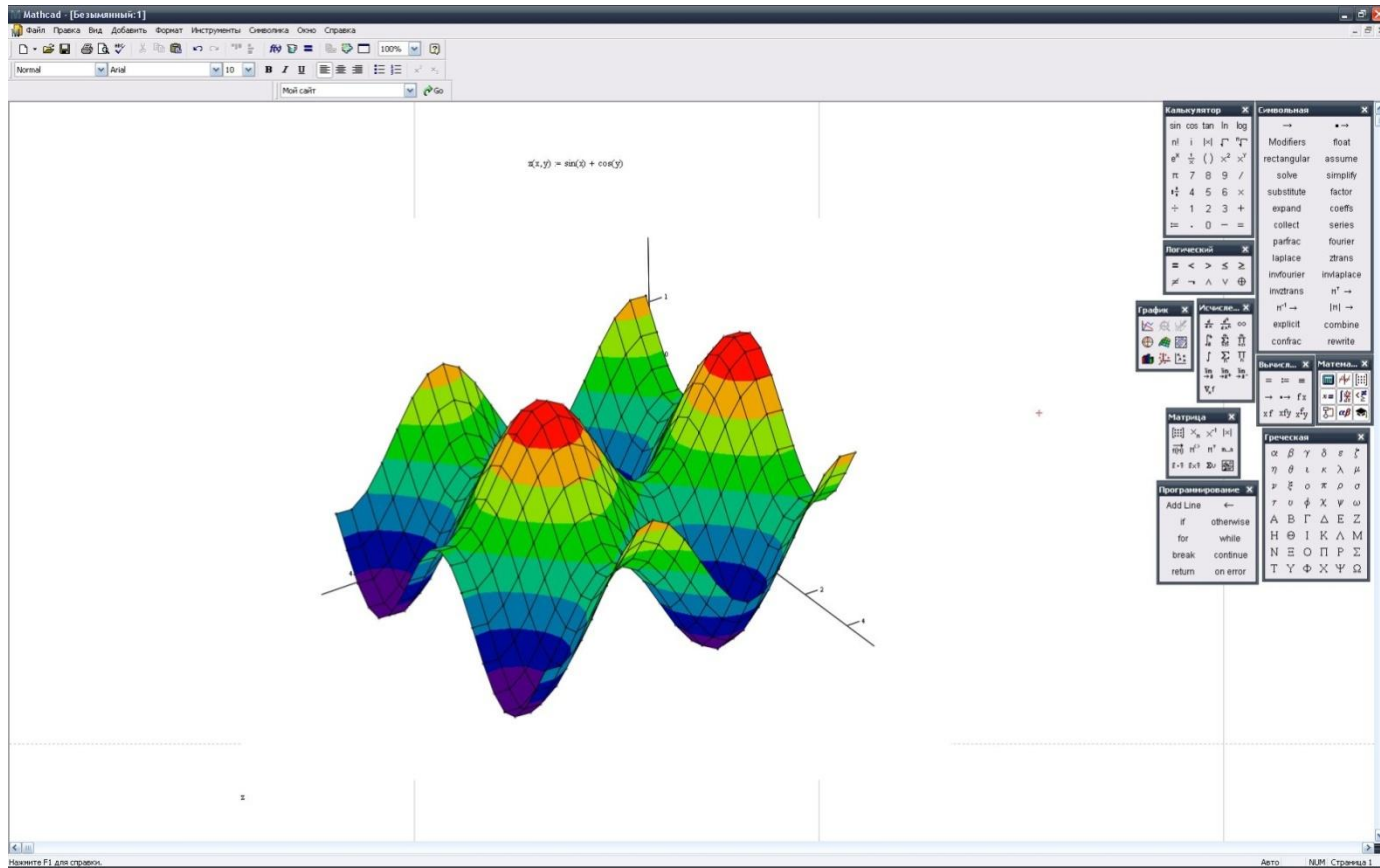
КАК РЕШАЮТСЯ ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ?

■ Язык Fortran

- задачи линейной алгебры, интегрирование, решение дифференциальных уравнений

■ Математические пакеты

- Mathematica
- Maple
- Matlab
- Mathcad



ПОЧЕМУ MATHCAD?

Пакет **MathCAD** популярен, пожалуй, более в инженерной, чем в научной среде.

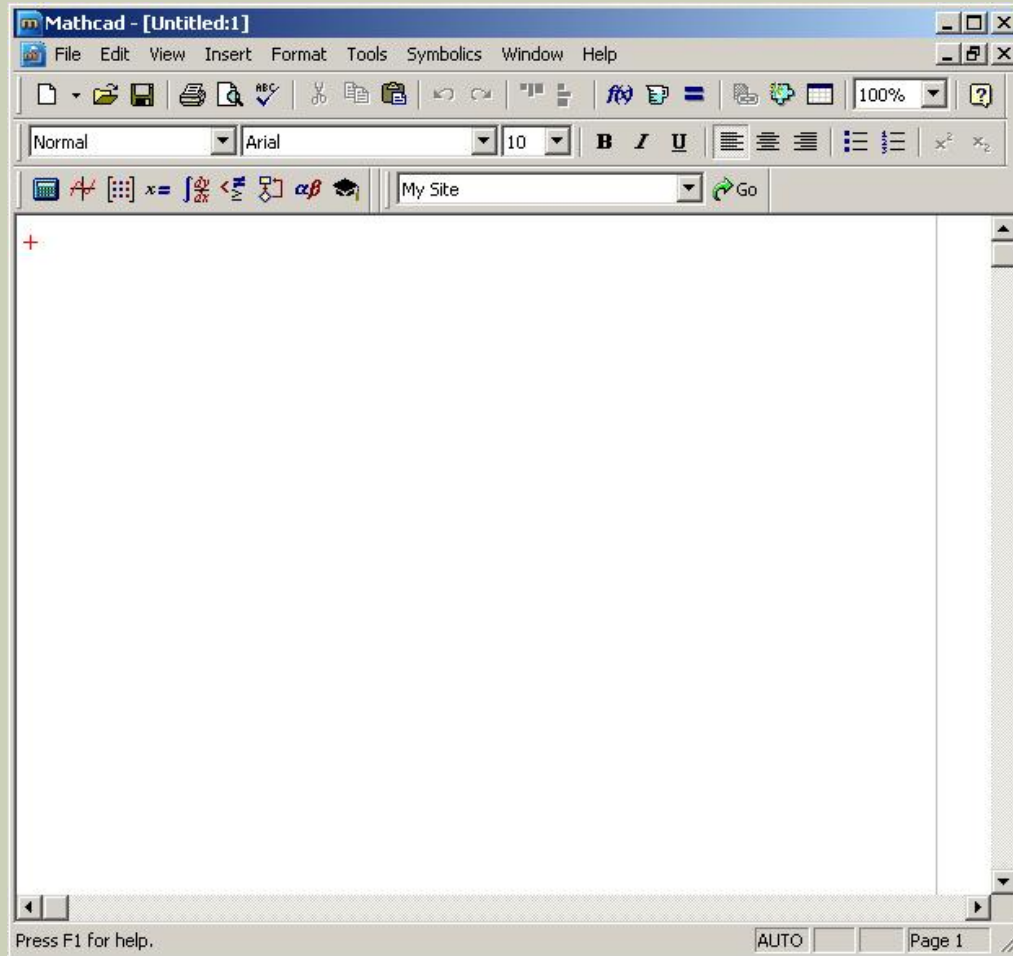
ПОЧЕМУ MATHCAD?

- Режим WYSIWYG
- Не требуется изучать какую-либо систему команд, как, например, в случае пакетов **Mathematica** или **Maple**
- Ориентирован на проведение численных расчетов
- Простота освоения
- Дружественный интерфейс

ЧТО УМЕЕТ MATHCAD?

- подготавливать научно-технические документы, содержащие текст, и формулы, записанные в привычной для специалистов форме;
- вычислять результаты математических операций, в которых участвуют числовые константы, переменные и размерные физические величины;
- операции с векторами и матрицами;
- решение уравнений и систем уравнений (неравенств);
- проводить статистические расчеты и анализ данных;
- строить двумерные и трехмерные графики;
- тождественные преобразования (в том числе упрощение), аналитическое решение уравнений и систем;
- дифференцирование и интегрирование, аналитическое и численное;
- решение дифференциальных уравнений;
- **И многое другое...**

ИНТЕРФЕЙС MATHCAD



ОСНОВНЫЕ КОМАНДЫ

The image displays a collection of mathematical command palettes from a software application. The palettes are arranged in a grid-like fashion, each with a title bar and a close button (X).

- Calculator:** Contains trigonometric functions (sin, cos, tan), logarithmic functions (ln, log), factorial (n!), absolute value (|x|), square root (√), nth root (ⁿ√), exponential (e^x), reciprocal (1/x), parentheses ((),), powers (x², x^y), pi (π), and digits (7, 8). It also includes basic arithmetic operators (9, /, %, 4, 5, 6, ×, ÷, 1, 2, 3, +, :=, ., 0, -) and an equals sign (=).
- Graph:** Features icons for plotting functions, 3D surfaces, and data series.
- Matrix:** Includes matrix operations like multiplication (×_n, ×⁻¹), absolute value (|x|), and matrix types (M^{m,n}, M^T, M^{m,n}).
- Evaluation:** Shows assignment (=), equality (:=, ≡), and mapping (→, ↦) operators, along with function evaluation (fx) and variable substitution (xf, xfy, x^fy).
- Calculus:** Contains differentiation (d/dx, dⁿ/dxⁿ), infinity (∞), integration (∫_a^b), summation (∑_{n=1}^m), product (∏_{n=1}^m), and limits (lim_{n→∞}, lim_{a→+}, lim_{a→-}).
- Boolean:** Lists logical operators: equality (=), less than (<), greater than (>), less than or equal to (≤), greater than or equal to (≥), not (≠), logical NOT (¬), logical AND (∧), logical OR (∨), and XOR (⊕).
- Programming:** Provides control flow statements: Add Line (←), if/otherwise, for/while, break/continue, and return/on error.
- Greek:** Lists Greek letters: α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ, ι, κ, λ, μ, ν, ξ, ο, π, ρ, σ, τ, υ, φ, χ, ψ, ω, Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ, Ι, Κ, Λ, Μ, Ν, Ξ, Ο, Π, Ρ, Σ, Τ, Υ, Φ, Χ, Ψ, Ω.
- Symbolic:** Includes operators for floating-point (float), complex numbers (complex), solving (solve), simplification (simplify), substitution (substitute), factoring (factor), expansion (expand), coefficient extraction (coeffs), collection (collect), series expansion (series), partial fractions (parfrac), Fourier transforms (fourier, invfourier), Laplace transforms (laplace, invlaplace), and z-transforms (ztrans, invztrans). It also includes matrix transpose (M^T →) and inverse (M⁻¹ →) operations.

ПРАВИЛА НАБОРА КОМАНД

$$5 \wedge 2 = 25$$

ПРАВИЛА НАБОРА КОМАНД

Êîä íàïèñàí íà **MathCAD** ùåëëéèòå äâà ðàçà íà ýòé íáëàñòè

$$5^2 = 25$$

$$5^3 = 125$$

$$5^4 = 625$$

$$5^5 = 3.125 \times 10^3$$

ПРАВИЛА НАБОРА КОМАНД

Íàïèøàì íáñêîüêî ïîðááëáèé

$x := 10$ $f(x) := \log(x)$ $i := 2..5$ - ïîðááëáèé

Íàéäàì çíà÷áèä ëîäðòòà

$f(x) = 1$ $f(100) = 2$ $i =$

2
3
4
5

ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ

Упростить выражение:

$$\frac{a^2 - b^2}{2a + 2b}$$

ПРАВИЛА НАБОРА КОМАНД

- Указатель мыши подводим к опции “Символы” в главном меню и щелкаем левой кнопкой мыши один раз (далее входим в “Символы”).
- В выпадающем меню указатель мыши подводим к опции “Упростить” и щелкаем на указанном пункте. На экране отображается наше выражение, но уже в выделенном виде.
- Повторяем наши действия: входим в “Символы” (подводим указатель мыши и щелкаем левой кнопкой мыши) и активизируем “Упростить”. На экране появляется ответ:

ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ

Получаем ответ:

$$\frac{1}{2} \cdot a - \frac{1}{2} \cdot b$$

ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ

Упростить выражение:

$$10x^2 - 5y^2, \text{ при } x = 1.5, y = -1.6$$

ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ

Набираем на клавиатуре:

$$X=1.5$$

$$Y=-1.6$$

$$10x^2-5y^2=$$

ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ

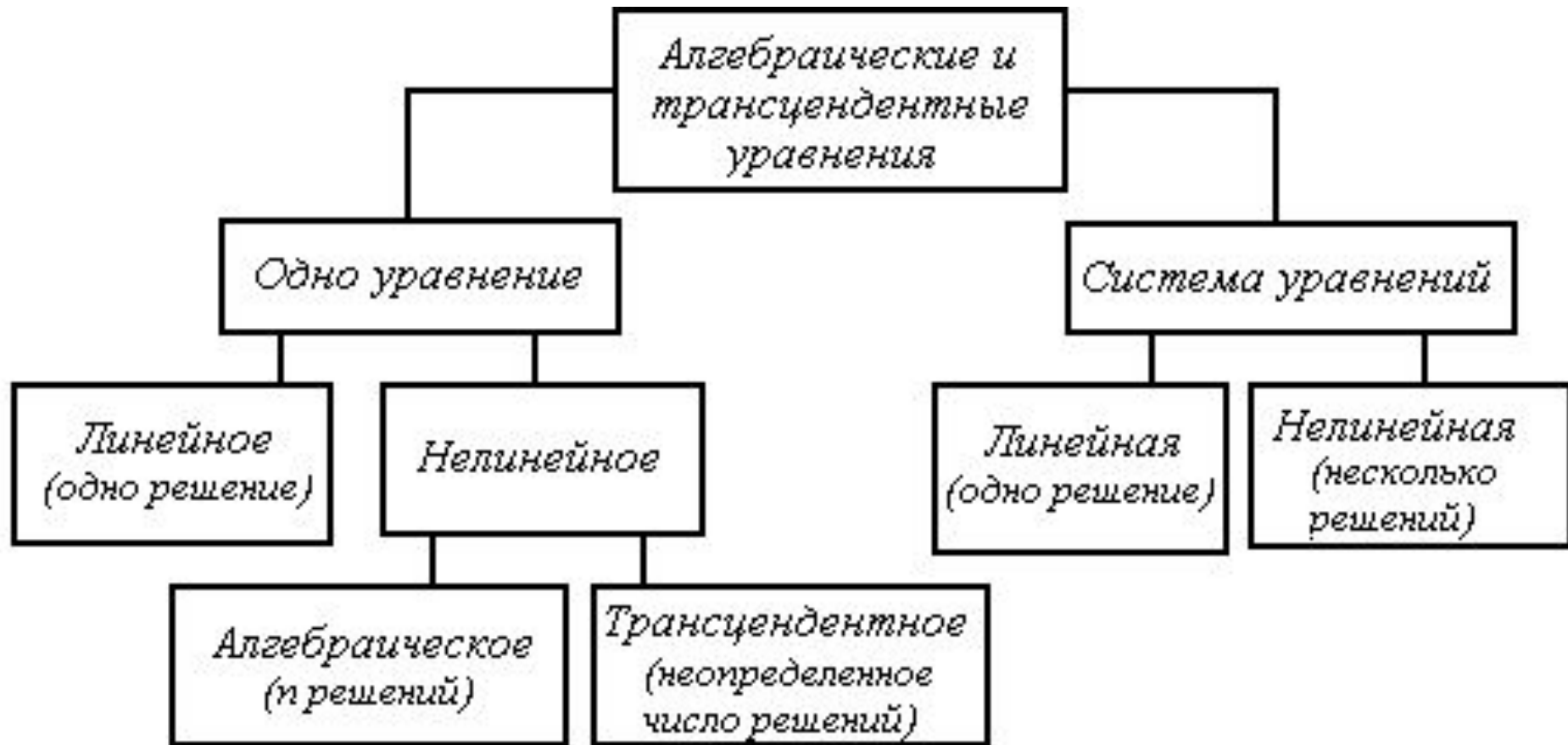
Получаем ответ:

$$x := 1.5$$

$$y := -1.6$$

$$10x^2 - 5y^2 = 9.7$$

РЕШЕНИЕ СЛАУ



СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ СЛАУ

Способы решения делятся на две группы:

1. *точные методы*, представляющие собой конечные алгоритмы для вычисления корней системы (решение систем с помощью обратной матрицы, правило **Крамера**, метод **Гаусса** и др.),
2. *итерационные методы*, позволяющие получить решение системы с заданной точностью путем сходящихся итерационных процессов (метод итерации, метод **Зейделя** и др.).

СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ СЛАУ

Точные методы

- Вследствие неизбежных округлений результаты являются приближенными

Итерационные методы

- Добавляется погрешность метода. Эффективное применение итерационных методов существенно зависит от удачного выбора начального приближения и быстроты сходимости процесса

РЕШЕНИЕ СЛАУ С ПОМОЩЬЮ БЛОКА GIVEN И ФУНКЦИИ FIND

- MathCAD дает возможность решать системы уравнений.

Максимальное число уравнений и переменных равно **50**. Результатом решения системы будет численное значение искомого корня.

РЕШЕНИЕ СЛАУ С ПОМОЩЬЮ БЛОКА GIVEN И ФУНКЦИИ FIND

- Системы линейных и нелинейных уравнений и неравенств позволяет решать блок *given* в сочетании с функцией *Find*. В блоке *given* записывается система уравнений и/или неравенств, подлежащих решению.

РЕШЕНИЕ СЛАУ С ПОМОЩЬЮ БЛОКА GIVEN И ФУНКЦИИ FIND

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 7, \\ x - 3y + 2z = 5, \\ x + y + z = 3. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ СЛАУ С ПОМОЩЬЮ БЛОКА GIVEN И ФУНКЦИИ FIND

- Воспользуемся MathCAD и запишем систему в терминах блока «given - find»:

given

$$x + 2y + 3z = 7$$

$$x - 3y + 2z = 5$$

$$x + y + z = 3$$

$$\text{find}(x, y, z) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

РЕШЕНИЕ СЛАУ МАТРИЧНЫМ СПОСОБОМ

- *Матричным уравнением* называется уравнение, коэффициенты и неизвестные которого – прямоугольные матрицы соответствующей размерности.

Матричные уравнения можно разрешать только, если система не вырождена, то есть ее определитель отличен от нуля. Матричный способ более изящен (хотя и не самый эффективный с точки зрения вычислительной математики).

РЕШЕНИЕ СЛАУ МАТРИЧНЫМ СПОСОБОМ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \square & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \square & a_{2n} \\ \square & \square & \square & \square \\ a_{n1} & a_{n2} & \square & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b,$$

$$x = A^{-1}b.$$

РЕШЕНИЕ СЛАУ МАТРИЧНЫМ СПОСОБОМ

■ Последовательность действий для решения с помощью Mathcad:

1. Установите режим автоматических вычислений.
2. Введите матрицу системы и матрицу-столбец правых частей.
3. Вычислите решение системы по формуле $x=A^{-1}b$.
4. Проверьте правильность решения умножением матрицы системы на вектор-столбец решения.
5. Найдите решение системы с помощью функции **Isolve** и сравните результаты.

РЕШЕНИЕ СЛАУ МАТРИЧНЫМ СПОСОБОМ

Напишем код решения СЛАУ матричным способом на MathCAD. Также Решим систему с помощью функции **lsolve** и сравним результат с решением $x=A^{-1}b$. С функцией **lsolve** мы сталкиваемся впервые, опишем ее:

lsolve(A,b) – возвращает вектор решения такой, что $Ax=b$.

Аргументы:

A - квадратная, не сингулярная матрица.

b - вектор, имеющий столько же рядов, сколько рядов в матрице **A**.

РЕШЕНИЕ СЛАУ МАТРИЧНЫМ СПОСОБОМ

Ծածրիւթ ճՅԱՕ լաճճիւթի ճիւղիւթը Ե ճիւղիւթը `lsolve`

Լաճճիւթը ճիւղիւթիւթ:

Լաճճիւթը ճիւղիւթիւթը Ե ճիւղիւթը

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Ճիւղիւթը Ե ճիւղիւթը ճիւղիւթիւթը

$$|A| = 5$$

Լաճճիւթը ճիւղիւթիւթը ճիւղիւթիւթը Ե ճիւղիւթը ճիւղիւթիւթը, ճիւղիւթիւթը Ե ճիւղիւթիւթը ճիւղիւթիւթը ճիւղիւթիւթը

$$x := A^{-1} \cdot b \quad x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{- ճիւղիւթիւթը}$$

$$A \cdot x - b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{- ճիւղիւթիւթը ճիւղիւթիւթը}$$

Ծածրիւթը ճիւղիւթիւթը ճիւղիւթիւթը ճիւղիւթիւթը **lsolve**

$$x := \text{lsolve}(A, b) \quad x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

РЕШЕНИЕ СЛАУ МЕТОДОМ ГАУССА

- Метод Гаусса, его еще называют методом Гауссовых исключений, состоит в том, что систему приводят последовательным исключением неизвестных к эквивалентной системе с треугольной матрицей.

РЕШЕНИЕ СЛАУ МЕТОДОМ ГАУССА

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + \alpha_{12}x_2 + \square + \alpha_{1n}x_n = \beta_1, \\ x_2 + \square + \alpha_{2n}x_n = \beta_2, \\ \square \square \square \square \square \square \square \\ x_n = \beta_n, \end{array} \right.$$

Решение которой находят по рекуррентным формулам:

$$x_n = \beta_n, \quad x_i = \beta_i - \sum_{j=i+1}^n \alpha_{ij}x_j, \quad (i = n-1, n-2, \square, 1)$$

РЕШЕНИЕ СЛАУ МЕТОДОМ ГАУССА

- Прямой ход метода Гаусса — элементарными операциями над строками приводят расширенную матрицу системы к ступенчатому виду:

$$A_p = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \square & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \square & a_{2n} & b_2 \\ \square & \square & \square & \square & \square \\ a_{n1} & a_{n2} & \square & a_{nn} & b_n \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \alpha_{12} & \square & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ 0 & 1 & \square & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ \square & \square & \square & \square & \square \\ 0 & 0 & \square & 1 & \beta_n \end{bmatrix},$$

РЕШЕНИЕ СЛАУ МЕТОДОМ ГАУССА

- Обратный ход метода Гаусса — ступенчатую матрицу преобразуют так, чтобы в первых n столбцах получилась единичная матрица:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \square & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & \square & 0 & x_2 \\ \square & \square & \square & \square & \square \\ 0 & 0 & \square & 1 & x_n \end{bmatrix}$$

Последний, $(n + 1)$ столбец этой матрицы содержит решение системы.

РЕШЕНИЕ СЛАУ МЕТОДОМ ГАУССА

- В MathCAD прямой и обратный ходы метода Гаусса выполняет функция **rref(A)**.

Далее показано решение системы линейных уравнений методом Гаусса, в котором используются следующие функции:

- **Rref(A)** - возвращается ступенчатая форма матрицы A.
- **Augment(A,B)** - Возвращается массив, сформированный расположением A и B бок о бок. Массивы A и B должны иметь одинаковое число строк

РЕШЕНИЕ СЛАУ МЕТОДОМ ГАУССА

■ Последовательность действий:

Функция **augment(A,b)** формирует расширенную матрицу системы добавлением к матрице системы справа столбца правых частей. Функция **rref** приводит расширенную матрицу системы к ступенчатому виду, выполняя прямой и обратный ходы гауссова исключения. Последний столбец содержит решение системы.

РЕШЕНИЕ СЛАУ МЕТОДОМ КРАМЕРА

■ Последовательность действий:

Вычисляем D определитель матрицы A .

Зададим матрицу $DX1$, заменой первого столбца матрицы A , матрицей b .

Вычисляем определитель матрицы $DX1$.

Зададим матрицу $DX2$, заменой второго столбца матрицы A , матрицей b .

Вычисляем определитель матрицы $DX2$.

Зададим матрицу $DX3$, заменой третьего столбца матрицы A , матрицей b .

Вычисляем определитель матрицы $DX3$.

Определяем решение системы линейных уравнений x_1, x_2, x_3 .

ВЫВОДЫ

- Пакет MathCAD чрезвычайно интуитивен, т.к. все формулы в его документах записываются в традиционной форме, и как таковой язык программирования не применяется, а богатый пакет встроенных функций позволяет решать многочисленные задачи: разрешать уравнения и системы, раскладывать многочлены и решать неравенства, строить графики и т.д.
- Данная работа позволит ученикам и учителям быстро освоить основные навыки работы с пакетом MathCAD, а последовательные примеры и методы решения помогут их закрепить для решения новых задач.