

АВТОМАТИЗАЦИЯ ТРУДА
УЧИТЕЛЯ НА ПРИМЕРЕ
РЕШЕНИЯ СИСТЕМ
АЛГЕБРАИЧЕСКИХ
УРАВНЕНИЙ
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ
ПРОГРАММНОГО ПАКЕТА
MATHCAD

Автор
Лагутина Марина
Андреевна

Руководитель
проекта
Учитель
математики
ГБОУ СОШ
№237

Белкина
Елена
Геннадьевна

ЦЕЛИ РАБОТЫ

- Ознакомить учителей математики с возможностями продукта MathCAD
- Обеспечить автоматизацию работы учителей с использованием MathCAD
- Рассмотреть решение систем алгебраических уравнений с помощью MathCAD

ДЛЯ КОГО ЭТА РАБОТА

- Работа может применяться на факультативных занятиях и математических кружках
- Работа ориентирована на **школьных учителей математики**, в том числе проводящих факультативные занятия и математические кружки.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

- Работа разделена на две части:
 1. Предоставляет базовые знания работы с программой MathCAD
 2. Как они могут быть применены для решения СЛАУ и других типовых математических задач, часто встречаемых в ходе преподавания школьных дисциплин

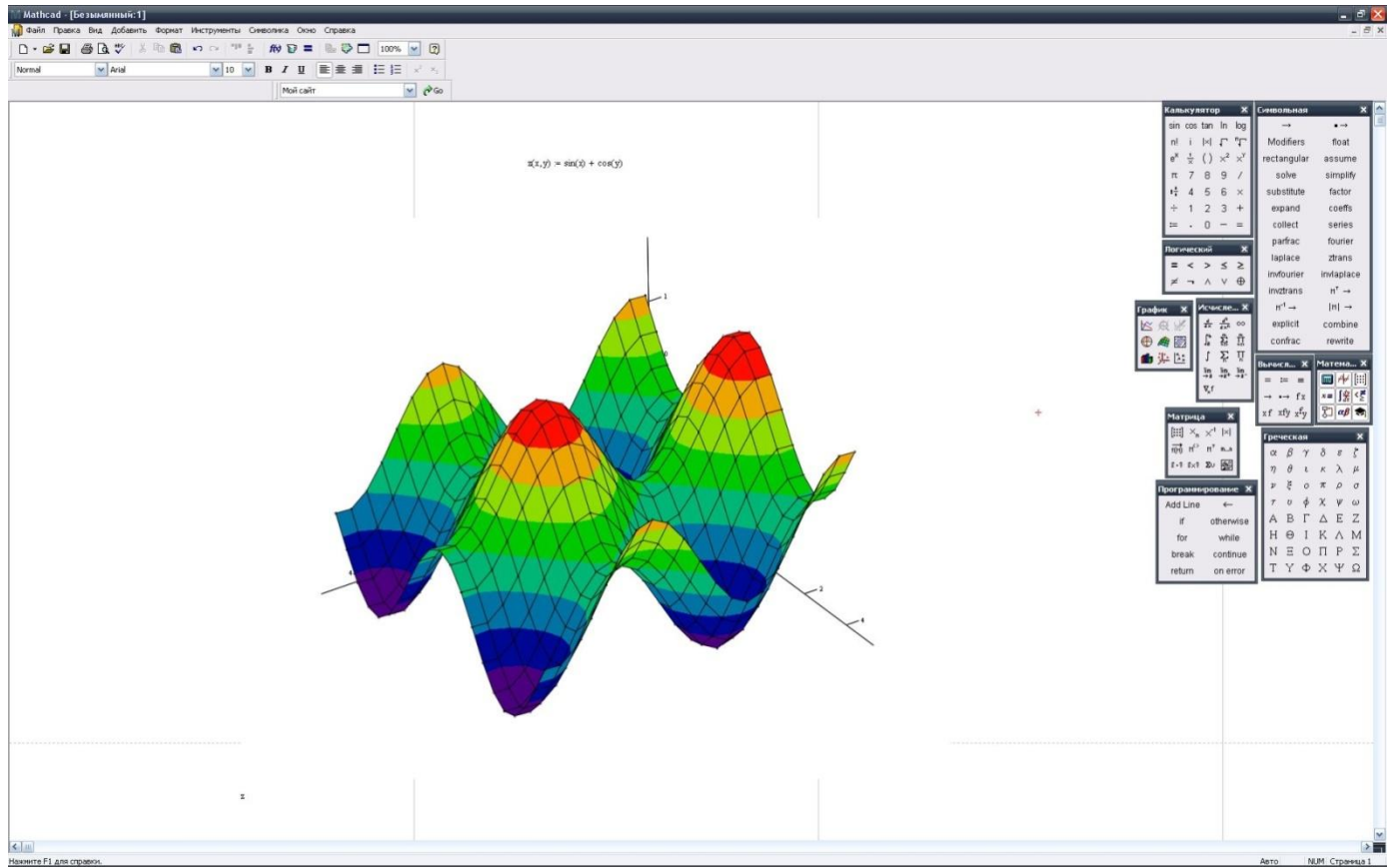
КАК РЕШАЮТСЯ ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ?

■ Язык Fortran

- задачи линейной алгебры, интегрирование, решение дифференциальных уравнений

■ Математические пакеты

- Mathematica
- Maple
- Matlab
- Mathcad



ПОЧЕМУ MATHCAD?

Пакет **MathCAD**
популярен,
пожалуй, более в
инженерной, чем
в научной среде.

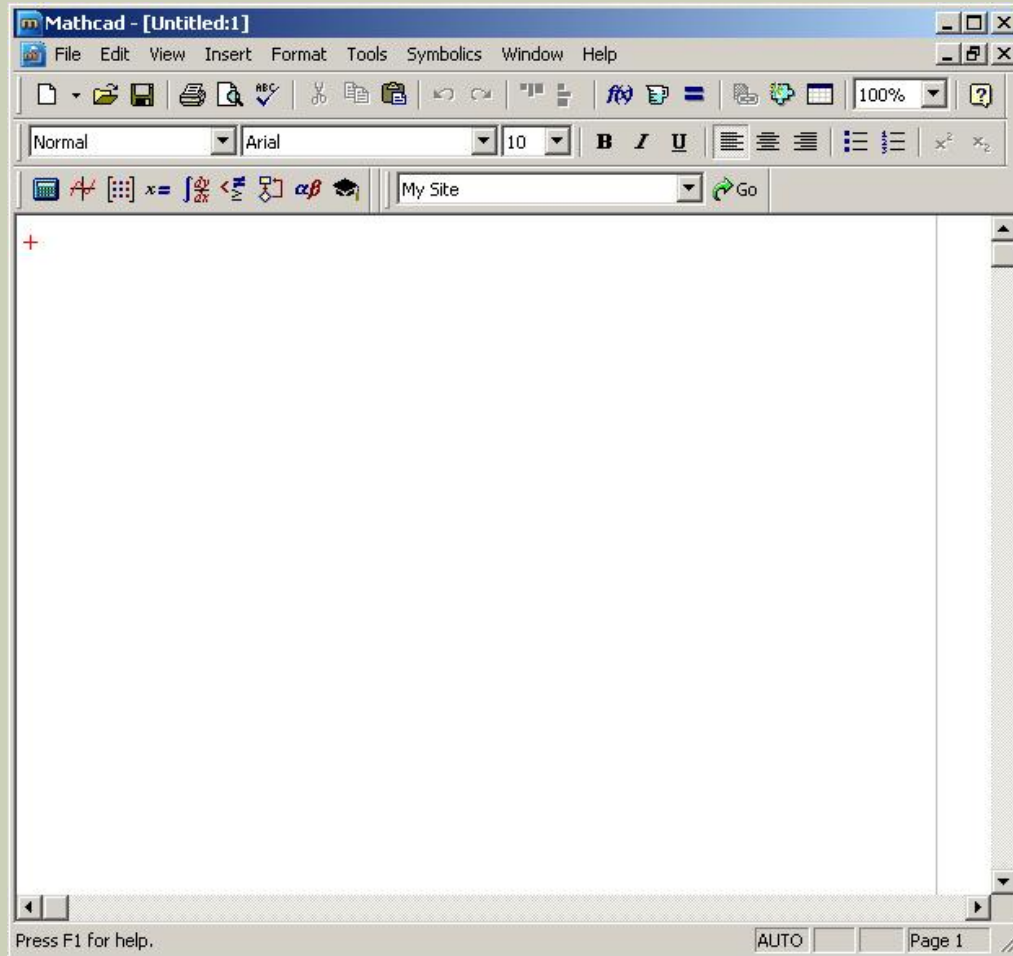
ПОЧЕМУ MATHCAD?

- Режим WYSIWYG
- Не требуется изучать какую-либо систему команд, как, например, в случае пакетов **Mathematica** или **Maple**
- Ориентирован на проведение численных расчетов
- Простота освоения
- Дружественный интерфейс

ЧТО УМЕЕТ MATHCAD?

- подготавливать научно-технические документы, содержащие текст, и формулы, записанные в привычной для специалистов форме;
- вычислять результаты математических операций, в которых участвуют числовые константы, переменные и размерные физические величины;
- операции с векторами и матрицами;
- решение уравнений и систем уравнений (неравенств);
- проводить статистические расчеты и анализ данных;
- строить двумерные и трехмерные графики;
- тождественные преобразования (в том числе упрощение), аналитическое решение уравнений и систем;
- дифференцирование и интегрирование, аналитическое и численное;
- решение дифференциальных уравнений;
- **И многое другое...**

ИНТЕРФЕЙС MATHCAD



ОСНОВНЫЕ КОМАНДЫ

The image displays a collection of mathematical command palettes from a software application. The palettes are arranged in a grid-like fashion, each with a title bar and a set of icons or text-based commands.

- Calculator:** Contains trigonometric functions (sin, cos, tan), logarithmic functions (ln, log), factorial (n!), absolute value (|x|), square root (√), nth root (ⁿ√), exponential (e^x), reciprocal (1/x), parentheses, powers (x², x^y), pi (π), and digits (7, 8). It also includes basic arithmetic operators (9, /, %, 4, 5, 6, ×, ÷, 1, 2, 3, +, :=, ., 0, -) and an equals sign (=).
- Graph:** Features icons for plotting 2D and 3D graphs, and a zoom tool.
- Matrix:** Includes matrix creation (grid icon), matrix inverse (x_n⁻¹), determinant (|x|), matrix multiplication (f(M)), matrix transpose (M^T), matrix dimensions (m...n), and matrix operations like scalar multiplication (a·v) and dot product (a×v).
- Evaluation:** Shows assignment (=), equality (:=), and equivalence (≡) symbols, as well as mapping (→) and function application (f x) symbols. It also includes function composition (x f) and exponentiation (x^fy).
- Calculus:** Contains differentiation (d/dx, dⁿ/dxⁿ), infinity (∞), integration (∫_a^b), summation (∑_{n=1}^m), product (∏_{n=1}^m), and limits (lim_n, lim_{n→a}, lim_{n→a+}, lim_{n→a-}).
- Boolean:** Lists logical symbols: equality (=), less than (<), greater than (>), less than or equal to (≤), greater than or equal to (≥), not (≠), logical NOT (¬), logical AND (∧), logical OR (∨), and symmetric difference (⊕).
- Programming:** Provides code snippets for control flow: Add Line (←), if-otherwise, for-while, break-continue, and return-on error.
- Greek:** Lists Greek letters: α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ, ι, κ, λ, μ, ν, ξ, ο, π, ρ, σ, τ, υ, φ, χ, ψ, ω, and their uppercase counterparts Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ, Ι, Κ, Λ, Μ, Ν, Ξ, Ο, Π, Ρ, Σ, Τ, Υ, Φ, Χ, Ψ, Ω.
- Symbolic:** Lists symbolic manipulation commands: →, ↦, Modifiers, float, complex, assume, solve, simplify, substitute, factor, expand, coeffs, collect, series, parfrac, fourier, laplace, ztrans, invfourier, invlaplace, invztrans, and matrix operations (M^T →, M⁻¹ →, |M| →).

ПРАВИЛА НАБОРА КОМАНД

$$5 \wedge 2 = 25$$

ПРАВИЛА НАБОРА КОМАНД

Êîä íàïèñàí íà **MathCAD** ùåëéèèòå äâà ðàçà íà ýòé íáëàñòè

$$5^2 = 25$$

$$5^3 = 125$$

$$5^4 = 625$$

$$5^5 = 3.125 \times 10^3$$

ПРАВИЛА НАБОРА КОМАНД

Íàïèøàì íáñêîüêî ïîðááëáíèé

$x := 10$ $f(x) := \log(x)$ $i := 2..5$ - ïîðááëáíèü

Íàéäàì çíà÷áíèå ëîãàðèìà

$f(x) = 1$ $f(100) = 2$ $i =$

2
3
4
5

ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ

Упростить выражение:

$$\frac{a^2 - b^2}{2a + 2b}$$

ПРАВИЛА НАБОРА КОМАНД

- Указатель мыши подводим к опции “Символы” в главном меню и щелкаем левой кнопкой мыши один раз (далее входим в “Символы”).
- В выпадающем меню указатель мыши подводим к опции “Упростить” и щелкаем на указанном пункте. На экране отображается наше выражение, но уже в выделенном виде.
- Повторяем наши действия: входим в “Символы” (подводим указатель мыши и щелкаем левой кнопкой мыши) и активизируем “Упростить”. На экране появляется ответ:

ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ

Получаем ответ:

$$\frac{1}{2} \cdot a - \frac{1}{2} \cdot b$$

ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ

Упростить выражение:

$$10x^2 - 5y^2, \text{ при } x = 1.5, y = -1.6$$

ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ

Набираем на клавиатуре:

$$X=1.5$$

$$Y=-1.6$$

$$10x^2-5y^2=$$

ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ

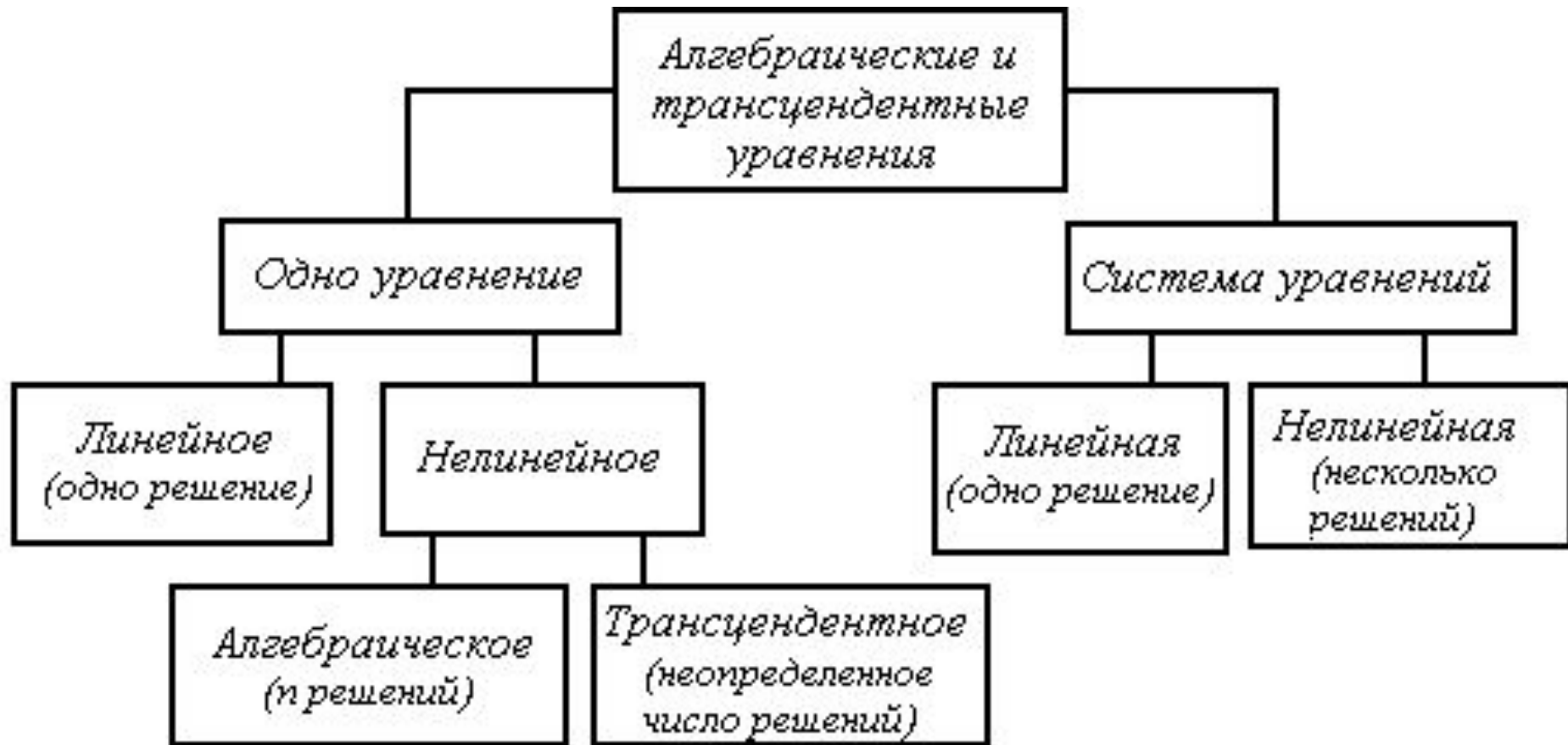
Получаем ответ:

$$x := 1.5$$

$$y := -1.6$$

$$10x^2 - 5y^2 = 9.7$$

РЕШЕНИЕ СЛАУ



СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ СЛАУ

Способы решения делятся на две группы:

1. *точные методы*, представляющие собой конечные алгоритмы для вычисления корней системы (решение систем с помощью обратной матрицы, правило **Крамера**, метод **Гаусса** и др.),
2. *итерационные методы*, позволяющие получить решение системы с заданной точностью путем сходящихся итерационных процессов (метод итерации, метод **Зейделя** и др.).

СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ СЛАУ

Точные методы

- Вследствие неизбежных округлений результаты являются приближенными

Итерационные методы

- Добавляется погрешность метода. Эффективное применение итерационных методов существенно зависит от удачного выбора начального приближения и быстроты сходимости процесса

РЕШЕНИЕ СЛАУ С ПОМОЩЬЮ БЛОКА GIVEN И ФУНКЦИИ FIND

- MathCAD дает возможность решать системы уравнений.

Максимальное число уравнений и переменных равно **50**. Результатом решения системы будет численное значение искомого корня.

РЕШЕНИЕ СЛАУ С ПОМОЩЬЮ БЛОКА GIVEN И ФУНКЦИИ FIND

- Системы линейных и нелинейных уравнений и неравенств позволяет решать блок *given* в сочетании с функцией *Find*. В блоке *given* записывается система уравнений и/или неравенств, подлежащих решению.

РЕШЕНИЕ СЛАУ С ПОМОЩЬЮ БЛОКА GIVEN И ФУНКЦИИ FIND

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 7, \\ x - 3y + 2z = 5, \\ x + y + z = 3. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ СЛАУ С ПОМОЩЬЮ БЛОКА GIVEN И ФУНКЦИИ FIND

- Воспользуемся MathCAD и запишем систему в терминах блока «given - find»:

given

$$x + 2y + 3z = 7$$

$$x - 3y + 2z = 5$$

$$x + y + z = 3$$

$$\text{find}(x, y, z) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

РЕШЕНИЕ СЛАУ МАТРИЧНЫМ СПОСОБОМ

- *Матричным уравнением* называется уравнение, коэффициенты и неизвестные которого – прямоугольные матрицы соответствующей размерности.

Матричные уравнения можно разрешать только, если система не вырождена, то есть ее определитель отличен от нуля. Матричный способ более изящен (хотя и не самый эффективный с точки зрения вычислительной математики).

РЕШЕНИЕ СЛАУ МАТРИЧНЫМ СПОСОБОМ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \square & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \square & a_{2n} \\ \square & \square & \square & \square \\ a_{n1} & a_{n2} & \square & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b,$$

$$x = A^{-1}b.$$

РЕШЕНИЕ СЛАУ МАТРИЧНЫМ СПОСОБОМ

■ Последовательность действий для решения с помощью Mathcad:

1. Установите режим автоматических вычислений.
2. Введите матрицу системы и матрицу-столбец правых частей.
3. Вычислите решение системы по формуле $x=A^{-1}b$.
4. Проверьте правильность решения умножением матрицы системы на вектор-столбец решения.
5. Найдите решение системы с помощью функции **Isolve** и сравните результаты.

РЕШЕНИЕ СЛАУ МАТРИЧНЫМ СПОСОБОМ

Напишем код решения СЛАУ матричным способом на MathCAD. Также Решим систему с помощью функции **lsolve** и сравним результат с решением $x=A^{-1}b$. С функцией **lsolve** мы сталкиваемся впервые, опишем ее:

lsolve(A,b) – возвращает вектор решения такой, что $Ax=b$.

Аргументы:

A - квадратная, не сингулярная матрица.

b - вектор, имеющий столько же рядов, сколько рядов в матрице **A**.

РЕШЕНИЕ СЛАУ МАТРИЧНЫМ СПОСОБОМ

Ծածարե՞նք ՆԵՂՈՒՆՆԵՐԻՆԻ թույլատրելի `Isolve`

Ինչպե՞ս կարգավորել:

Ինչպե՞ս կարգավորել `+` արժեքը

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Վերադարձվե՞նք ինչպե՞ս

$$|A| = 5$$

Ինչպե՞ս կարգավորել `+` արժեքը `+` արժեքը, կարգավորել
նշանակումը `+` արժեքը `+` արժեքը

$$x := A^{-1} \cdot b \quad x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{- ինչպե՞ս}$$

$$A \cdot x - b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{- ինչպե՞ս կարգավորել}$$

Ծածարե՞նք կարգավորել `+` արժեքը `+` արժեքը **Isolve**

$$x := \text{Isolve}(A, b) \quad x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

РЕШЕНИЕ СЛАУ МЕТОДОМ ГАУССА

- Метод Гаусса, его еще называют методом Гауссовых исключений, состоит в том, что систему приводят последовательным исключением неизвестных к эквивалентной системе с треугольной матрицей.

РЕШЕНИЕ СЛАУ МЕТОДОМ ГАУССА

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + \alpha_{12}x_2 + \square + \alpha_{1n}x_n = \beta_1, \\ x_2 + \square + \alpha_{2n}x_n = \beta_2, \\ \square \square \square \square \square \square \square \\ x_n = \beta_n, \end{array} \right.$$

Решение которой находят по рекуррентным формулам:

$$x_n = \beta_n, \quad x_i = \beta_i - \sum_{j=i+1}^n \alpha_{ij}x_j, \quad (i = n-1, n-2, \square, 1)$$

РЕШЕНИЕ СЛАУ МЕТОДОМ ГАУССА

- Прямой ход метода Гаусса — элементарными операциями над строками приводят расширенную матрицу системы к ступенчатому виду:

$$A_p = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \square & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \square & a_{2n} & b_2 \\ \square & \square & \square & \square & \square \\ a_{n1} & a_{n2} & \square & a_{nn} & b_n \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \alpha_{12} & \square & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ 0 & 1 & \square & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ \square & \square & \square & \square & \square \\ 0 & 0 & \square & 1 & \beta_n \end{bmatrix},$$

РЕШЕНИЕ СЛАУ МЕТОДОМ ГАУССА

- Обратный ход метода Гаусса — ступенчатую матрицу преобразуют так, чтобы в первых n столбцах получилась единичная матрица:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \square & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & \square & 0 & x_2 \\ \square & \square & \square & \square & \square \\ 0 & 0 & \square & 1 & x_n \end{bmatrix}$$

Последний, $(n + 1)$ столбец этой матрицы содержит решение системы.

РЕШЕНИЕ СЛАУ МЕТОДОМ ГАУССА

- В MathCAD прямой и обратный ходы метода Гаусса выполняет функция **rref(A)**.

Далее показано решение системы линейных уравнений методом Гаусса, в котором используются следующие функции:

- **Rref(A)** - возвращается ступенчатая форма матрицы A.
- **Augment(A,B)** - Возвращается массив, сформированный расположением A и B бок о бок. Массивы A и B должны иметь одинаковое число строк

РЕШЕНИЕ СЛАУ МЕТОДОМ ГАУССА

■ Последовательность действий:

Функция **augment(A,b)** формирует расширенную матрицу системы добавлением к матрице системы справа столбца правых частей. Функция **rref** приводит расширенную матрицу системы к ступенчатому виду, выполняя прямой и обратный ходы гауссова исключения. Последний столбец содержит решение системы.

РЕШЕНИЕ СЛАУ МЕТОДОМ ГАУССА

ᐃᐃᐃᐃᐃ ᐃᐃᐃᐃᐃ ᐃᐃᐃᐃᐃ

ᐃᐃᐃᐃᐃ ᐃᐃᐃᐃᐃ:

ᐃᐃᐃᐃᐃ ᐃᐃᐃᐃᐃ ÷ ᐃᐃᐃᐃ

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$b := \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}$$

ORIGIN:= 1

ᐃᐃᐃᐃᐃᐃᐃᐃ ᐃᐃᐃᐃᐃᐃᐃᐃ ᐃᐃᐃᐃᐃᐃ ᐃᐃᐃᐃᐃᐃ:

$$Ab := \text{augment}(A, b) \quad Ab = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 15 \end{pmatrix}$$

ᐃᐃᐃᐃᐃᐃᐃᐃ ᐃᐃᐃᐃᐃᐃᐃᐃ ᐃᐃᐃᐃᐃᐃ ᐃᐃᐃᐃᐃᐃ ᐃᐃᐃᐃᐃᐃ ÷ ᐃᐃᐃᐃᐃᐃ ᐃᐃᐃᐃᐃᐃ (ᐃᐃᐃᐃᐃᐃ ᐃᐃᐃᐃᐃᐃᐃ ᐃᐃᐃᐃᐃᐃ ᐃᐃᐃᐃᐃᐃ ᐃᐃᐃᐃᐃᐃᐃ):

$$Ag := \text{rref}(Ab) \quad Ag = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

ᐃᐃᐃᐃᐃᐃᐃᐃᐃ ᐃᐃᐃᐃᐃᐃᐃ ᐃᐃᐃᐃᐃᐃᐃ ᐃᐃᐃᐃᐃᐃ:

ᐃᐃᐃᐃᐃᐃᐃᐃ ᐃᐃᐃᐃᐃᐃᐃᐃᐃᐃᐃᐃᐃ

$$x := \text{submatrix}(Ag, 1, 3, 4, 4) \quad x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot x - b = \begin{pmatrix} 1.776 \times 10^{-15} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

РЕШЕНИЕ СЛАУ МЕТОДОМ КРАМЕРА

■ Последовательность действий:

Вычисляем D определитель матрицы A .

Зададим матрицу $DX1$, заменой первого столбца матрицы A , матрицей b .

Вычисляем определитель матрицы $DX1$.

Зададим матрицу $DX2$, заменой второго столбца матрицы A , матрицей b .

Вычисляем определитель матрицы $DX2$.

Зададим матрицу $DX3$, заменой третьего столбца матрицы A , матрицей b .

Вычисляем определитель матрицы $DX3$.

Определяем решение системы линейных уравнений x_1, x_2, x_3 .

РЕШЕНИЕ СЛАУ МЕТОДОМ КРАМЕРА

Δαράτεια ΝΕΑΟ τὰοιάν Εδαίαδα

τὰοδεοά ηεήοαίυ:

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$DX1 := \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 15 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$DX2 := \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 15 & 4 \end{pmatrix}$$

$$DX3 := \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 15 \end{pmatrix}$$

$$x := \frac{DX1}{DX} \quad x = 2$$

$$y := \frac{DX2}{DX} \quad y = 1$$

$$z := \frac{DX3}{DX} \quad z = 3$$

τὰοδεοά τδααίε ÷αήοε

$$b := \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$DX := |A| \quad DX = 5$$

$$DX1 := |DX1| \quad DX1 = 10$$

$$DX2 := |DX2| \quad DX2 = 5$$

$$DX3 := |DX3| \quad DX3 = 15$$

ВЫВОДЫ

- Пакет MathCAD чрезвычайно интуитивен, т.к. все формулы в его документах записываются в традиционной форме, и как таковой язык программирования не применяется, а богатый пакет встроенных функций позволяет решать многочисленные задачи: разрешать уравнения и системы, раскладывать многочлены и решать неравенства, строить графики и т.д.
- Данная работа позволит ученикам и учителям быстро освоить основные навыки работы с пакетом MathCAD, а последовательные примеры и методы решения помогут их закрепить для решения новых задач.