

«Барицентрический метод. Геометрия, которую я люблю»

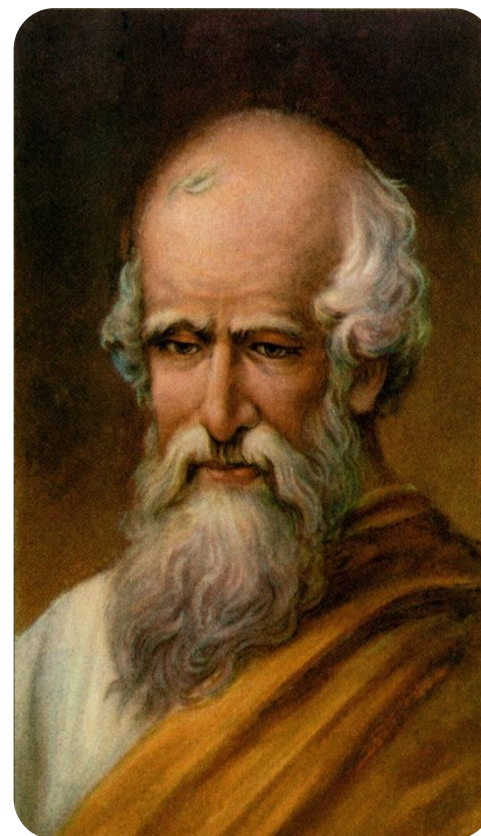
*Научный руководитель:
Красина Е.М*

*Выполнила:
Ученица 10А класса
Багаева Наталия*

Мудрость прошлого

«...Я счел нужным написать тебе и... изложить особый метод, при помощи которого ты получишь возможность находить некоторые математические теоремы. Я уверен, что этот метод будет тебе ничуть не менее полезен и для доказательства самих теорем».

Архимед



Актуальность проекта

Выбранная мной тема тесно связана с топологией. В свою очередь топология считается на данный момент самым актуальным и перспективным разделом высшей математики

Благодаря данному методу у учащихся формируется нестандартное мышление, понимание природы происходящих



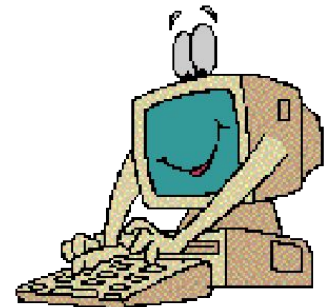
Цель

- *Рассмотреть барицентрический метод и возможность его применения при решении задач в различных научных дисциплинах.*



Задачи:

- *ознакомиться с историей открытия барицентрического метода;*
- *рассмотреть основные формулировки, свойства, теоремы, связанные с данным методом;*
- *изучить центроиды треугольника и тетраэдра;*
- *провести исследовательскую деятельность, направленную на определение области применения барицентрического метода;*
- *создать программу в среде Borland C++ Builder, с целью проверки задач.*

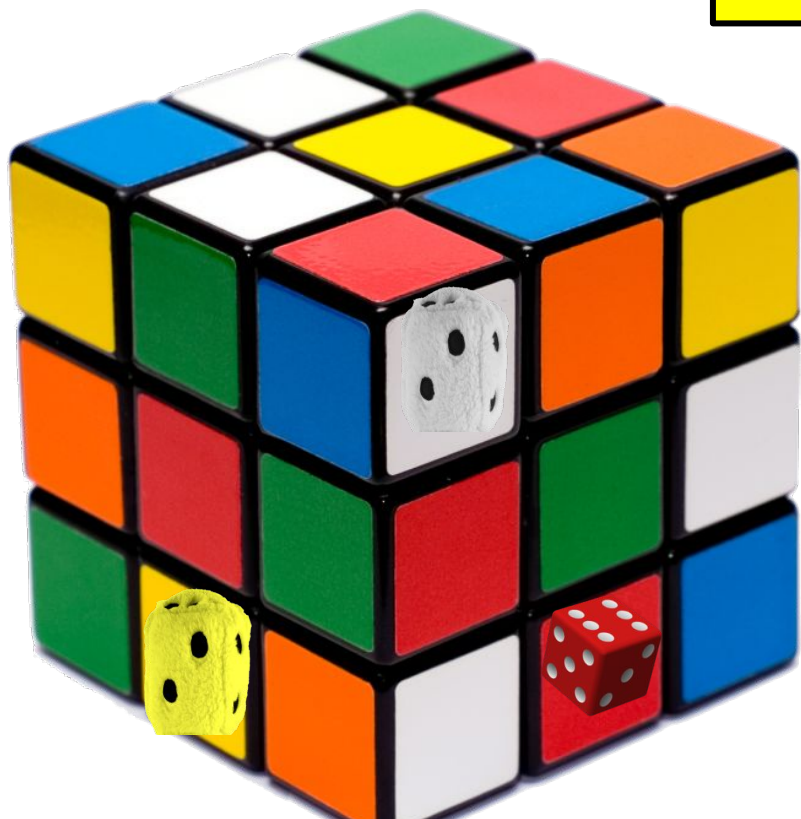


Этапы работы над проектом

Теоретический этап

Исторический этап

**Исследовательская
деятельность**



Работа на I-ом этапе

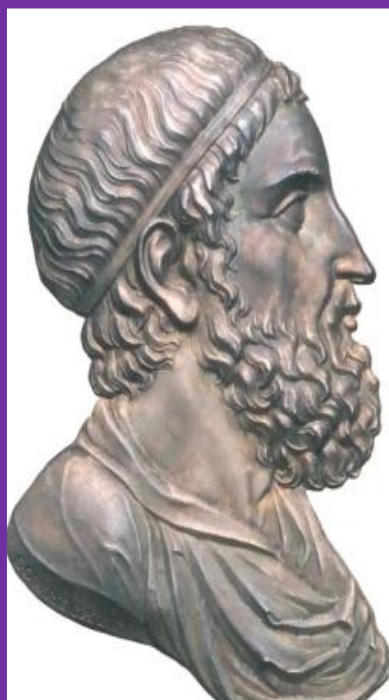
*Необходимость
метода*

*Физическое и математическое
определения центра масс*

Отрицательные массы

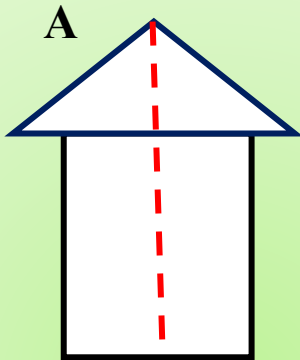
Идея барицентрических координат

Данный метод был использован и развит многими геометрами – *Чева, Папп, Гюльден, Люилье*



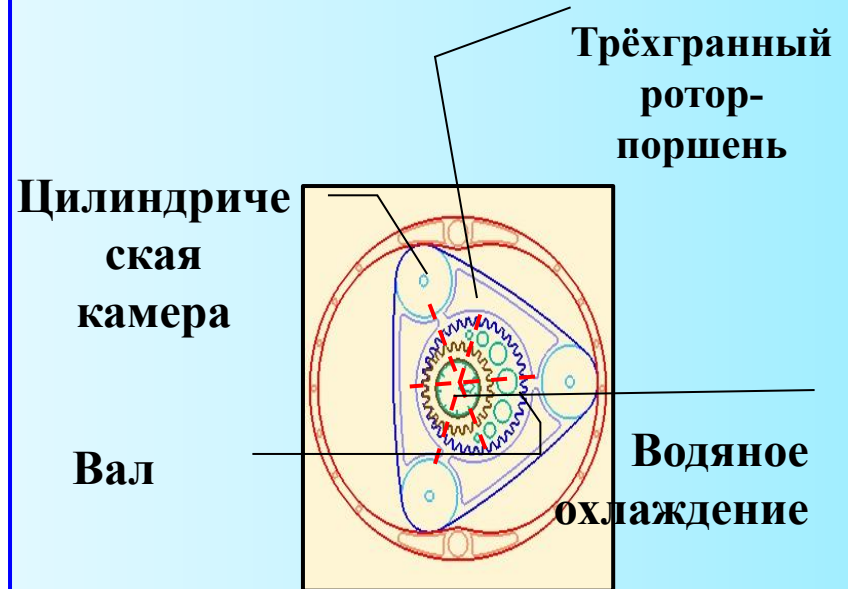
Применение свойств

В строительстве:



- 1) Здесь используется свойство жесткости треугольника.
- 2) Для того чтобы крыша располагалась ровно по центру, то есть чтобы дом был симметричен относительно **А**, необходимо определить барицентр

В автомобильных двигателях:



**Использование
треугольника Рело**

Химия

Генетика

Физика

**Проективная
геометрия**

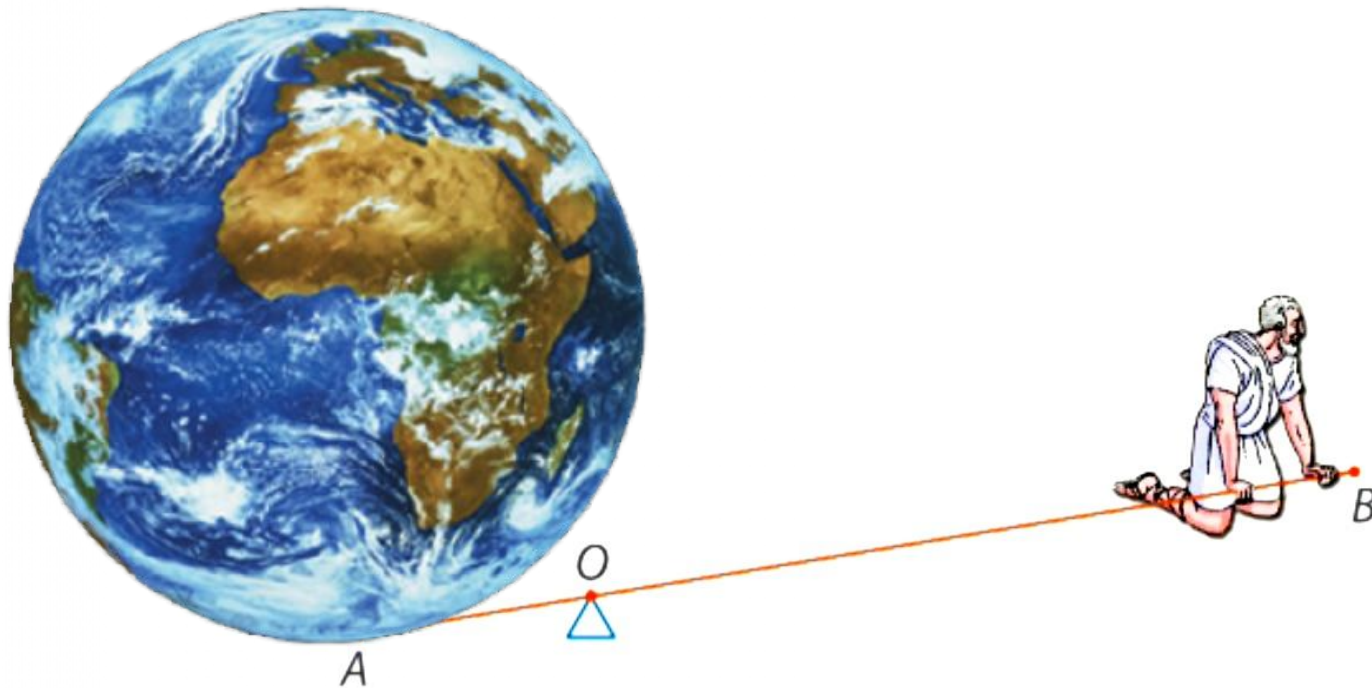
**Барицентрический
метод**

Колориметрия

Астрономия

Топология

Исследовательская деятельность



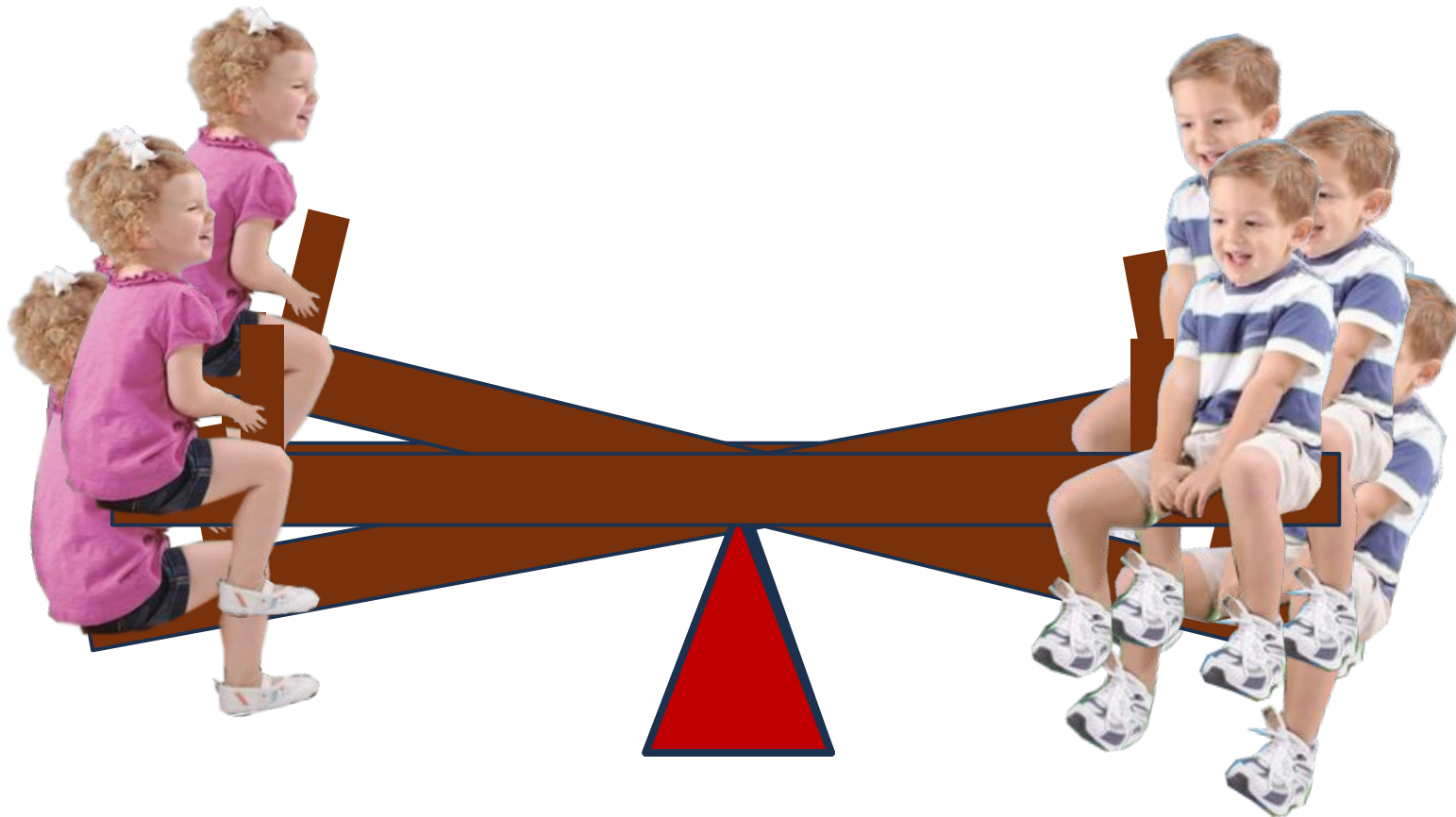
Цель

- ✓ Исследовать область практического применения барицентрического метода

Задачи

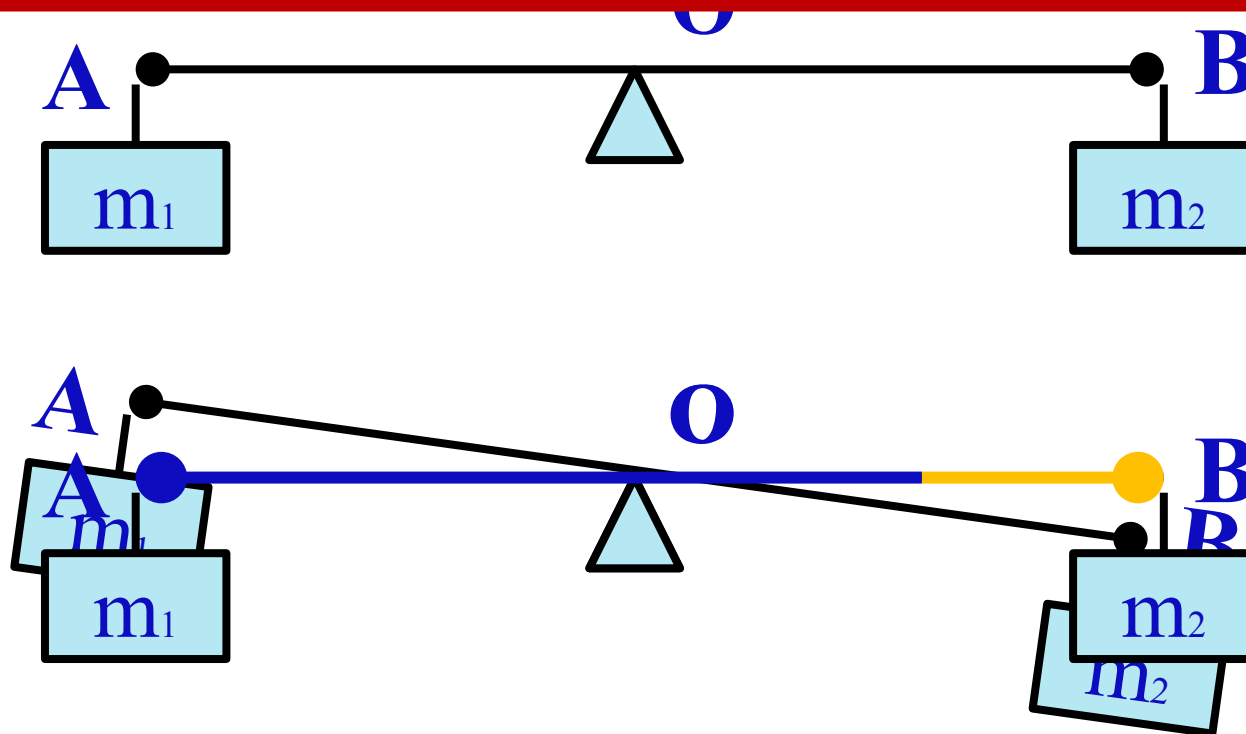
- Структурировать и классифицировать задачи, решаемые данным методом.
- ✓ Создать тематический сборник.
- ✓ Создать программу, позволяющую графически представить систему материальных точек, её центр масс и рассчитать его координаты.

А где же геометрия?



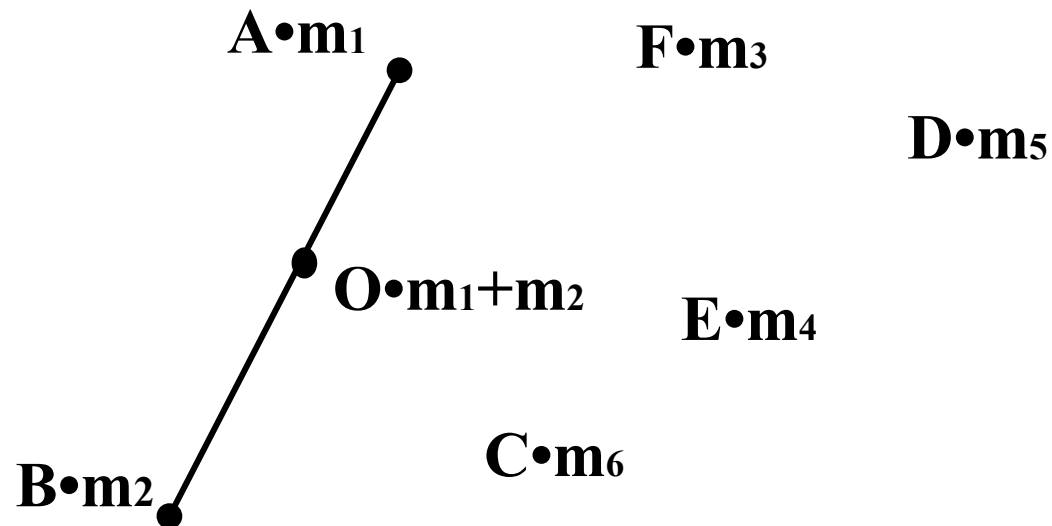
Центр масс

Центром масс данной системы двух точек будет такая точка O данного отрезка, что $AO \cdot m_1 = BO \cdot m_2$,
или $\frac{AO}{BO} = \frac{m_2}{m_1}$



Треугольник и теорема о перераспределении масс

Если нам дана система из нескольких точек с гирьками в каждой из них, то вместо любой пары точек мы можем рассмотреть их центр масс, в котором находится суммарная масса исходных двух точек



Тонкости при решении

При решении геометрической задачи барицентрическим

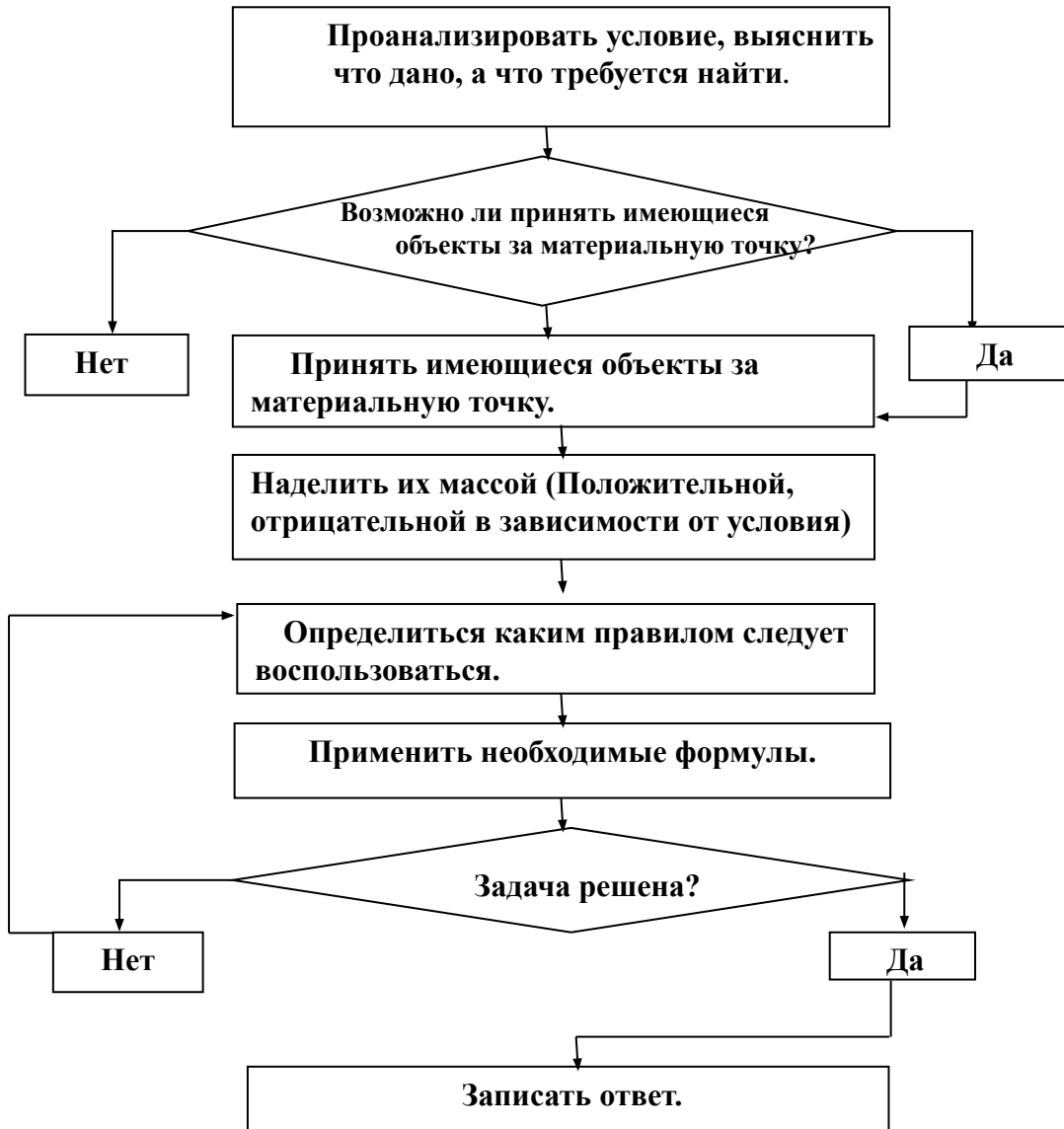
Искусство применения барицентрического метода состоит в том, чтобы по условию задачи осуществить такой выбор точек и помещаемых в эти точки масс, при котором задача легко и красиво решается.

1) наличие единственного центра масс любой системы материальных точек;

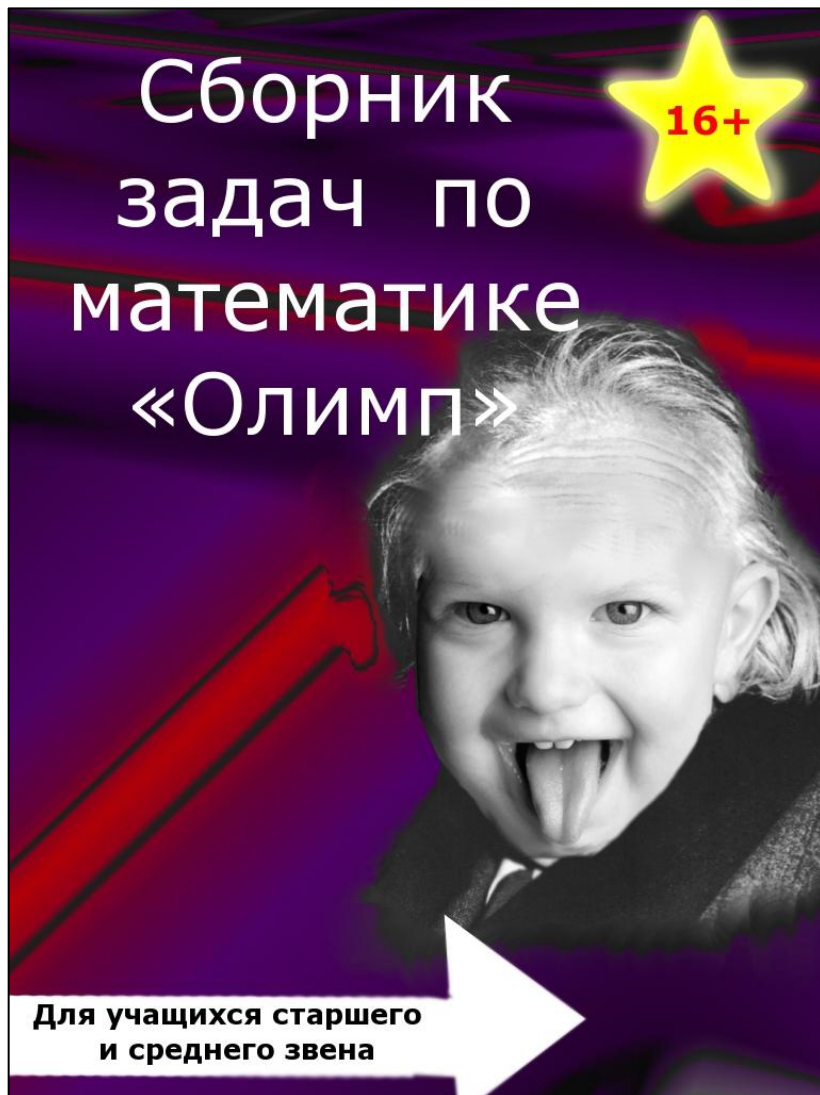


3) возможность регруппировки материальных точек системы в изменения положения центра масс всей системы

Алгоритм решения



Доверяй, но проверяй!



Решение математических задач

- Задачи на нахождение отношения элементов в треугольнике и других простейших геометрических фигурах;
- Задачи на нахождение объема и площади сферических тел, многогранников, их элементов и т.д.;
- Задачи с использованием векторных преобразований;
- Задачи, сводящиеся к доказательству алгебраических неравенств;

Решение химических задач

Задачи на нахождения процентного содержания вещества в сплаве, растворе;

- Задачи на нахождения массы и массовой доли;
- Задачи на расчет объемных отношений газов при химических реакциях;

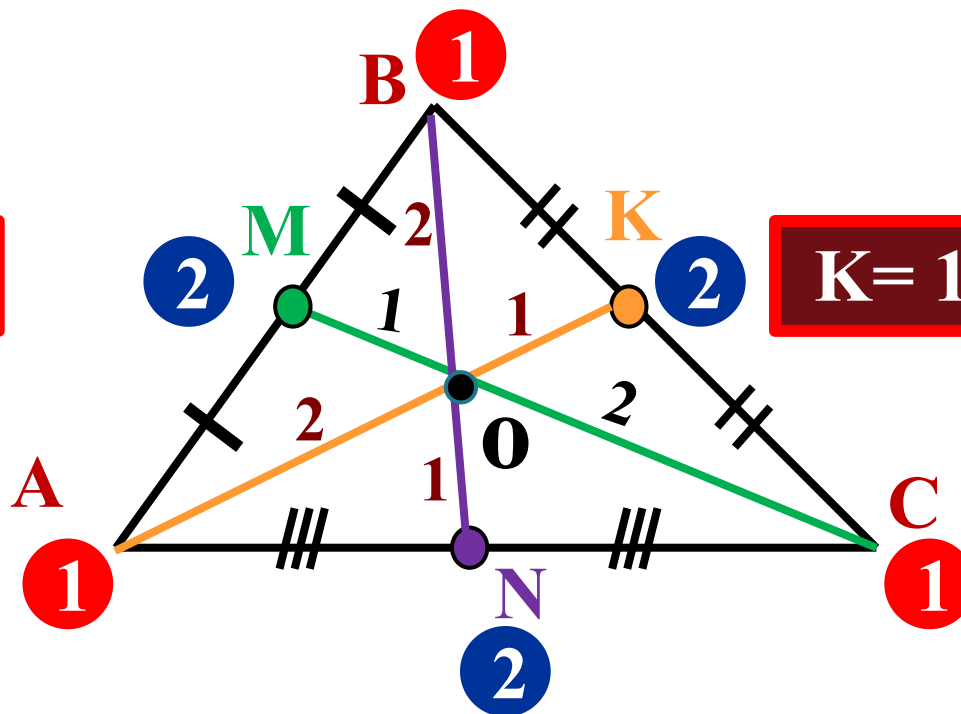
Решение задач естественно научного цикла

- Физические задачи:
 - а) задачи на нахождение моментов сил;
 - б) задачи на нахождение рычага;
- Расчетные задачи в колориметрии;
- Задачи в популяционной генетике.

Теорема о трех медианах

Докажем теорему Архимеда: *три медианы треугольника имеют общую точку и каждая из медиан делится этой точкой в отношении 2 : 1, считая от вершины.*

$$M = 1+1=(2);$$

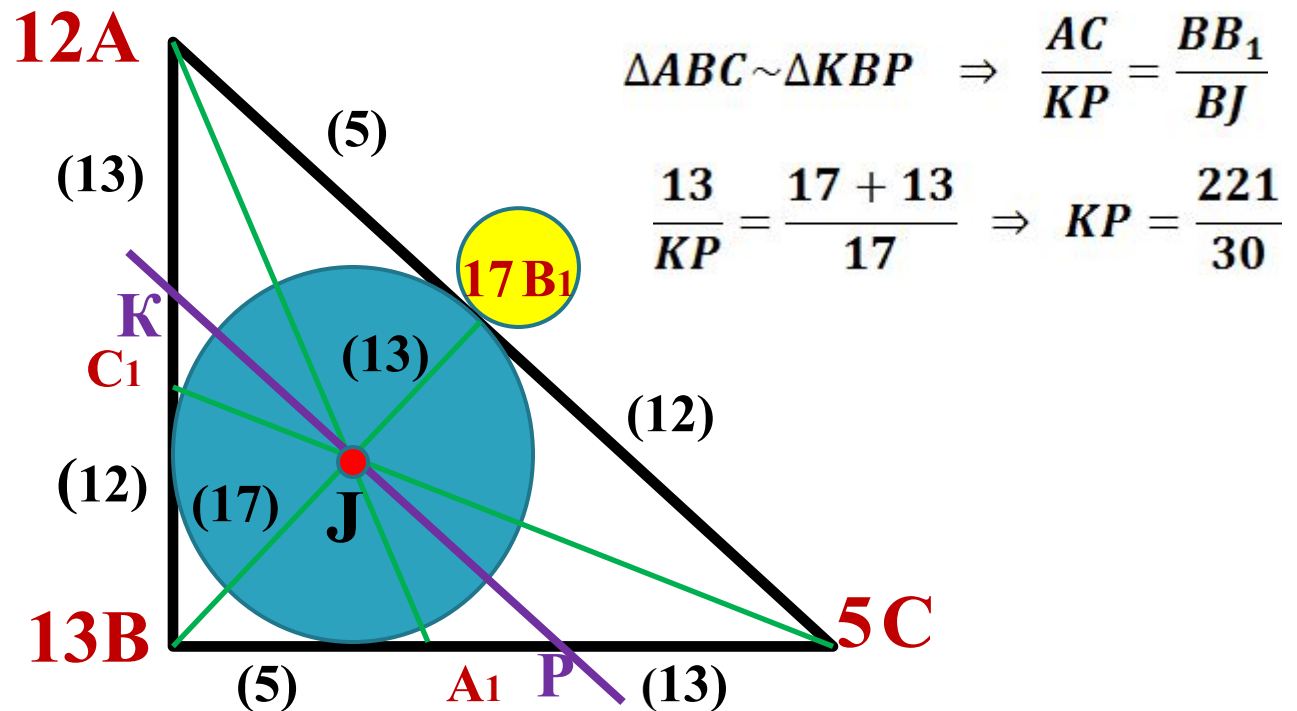


$$K = 1+1=(2);$$

$$N = 1+1=(2);$$

Планиметрическая задача, С4

Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами AB и BC ($AB=5$, $BC=12$). Пусть точка J - центр вписанной в треугольник ABC окружности. Прямая проходящая через J , параллельная одной из сторон ABC , пересекает две другие в точках K и P . Найдите длину отрезка KP .



Стереометрическая задача

Дано:

$ABCD$ – тетраэдр;

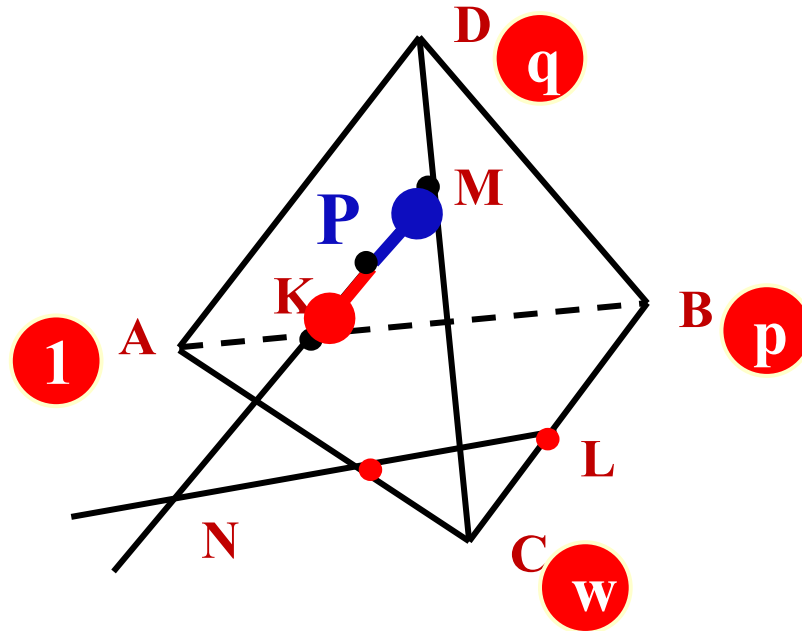
$K \in AB; L \in BC;$

$M \in CD; N \in DA;$

$AK : KB = DM : MC = p;$

$BL : LC = AN : ND = q;$

$$\left. \begin{array}{l} KO:MO=q \\ NO:OL=p \end{array} \right\} - ?$$



1) Поместим в точки **A, B, C** и **D** массы **1, p, w** и **q** соответственно и рассмотрим центр масс **p** этой системы точек.

2) Т.к **K** – центр масс точек **A** и **B**, **M** – центр масс точек **C** и **D**, то точка **P** лежит на отрезке **KM** (по правилу рычага), причем $KP:PM=(w+q):(1+p) = q$
 Аналогично точка **p** лежит на отрезке **LN**, при чем $NP : PL = p$

Из пункта 3 и 2 $\Rightarrow KO:MO = q$ и $NO:OL = p$

ч.т.д

Неравенство Коши - Буняковского

(1)

$$\left(a_1^2 + \dots + a_n^2 \right) \left(b_1^2 + \dots + b_n^2 \right) \geq \left(a_1 b_1 + \dots + a_n b_n \right)^2$$

The diagram shows a horizontal number line with an arrow pointing to the right. Two points are marked with blue dots. The first point is labeled a_1, \dots, a_n and the second point is labeled $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$. Above the first point, there is a red oval containing the text m_1 . Above the second point, there is a red oval containing the text m_2 . The entire diagram is enclosed in a green rectangular box. To the right of the box is a large curly brace followed by a question mark $\} - ?$.

Пусть $m_1, \dots, m_n > 0$. Выберем на числовой оси точки A_1, \dots, A_n с координатами x_1, \dots, x_n и поместим в них массы m_1, \dots, m_n . Координаты центра масс м.т $m_1 A_1, \dots, m_n A_n$ равна

$$x = \frac{m_1 x_1 + \dots + m_n x_n}{m_1 + \dots + m_n} \quad | \Rightarrow \text{(по свойству однородности)}$$

$$m_1 x_1^2 + \dots + m_n x_n^2 \geq \frac{1}{m_1 + \dots + m_n} (m_1 x_1 + \dots + m_n x_n)^2$$

Пусть $m_k = b_k^2, x_k = \frac{a_k}{b_k}, k = 1, \dots, n$ тогда (1) истинно.

ч.т.д


Химическая задача


3) Определим координаты данных точек. Для этого $p\%:100\%$, где p – содержание вещества в сплаве

Пример:

$$\text{Ag (I сплав)} = 20\%:100\% = 0,2;$$

$$\text{Cu (II сплав)} = 30\%:100\% = 0,3;$$

4) I сплав  представится в виде точки P (0,2; 0,5; 0,3);

II сплав  представится в виде точки Q (0,45; 0,3; 0,25);

$$5) mZ = m_1P + m_2Q \Rightarrow Z = \frac{m_1P + m_2Q}{m}$$

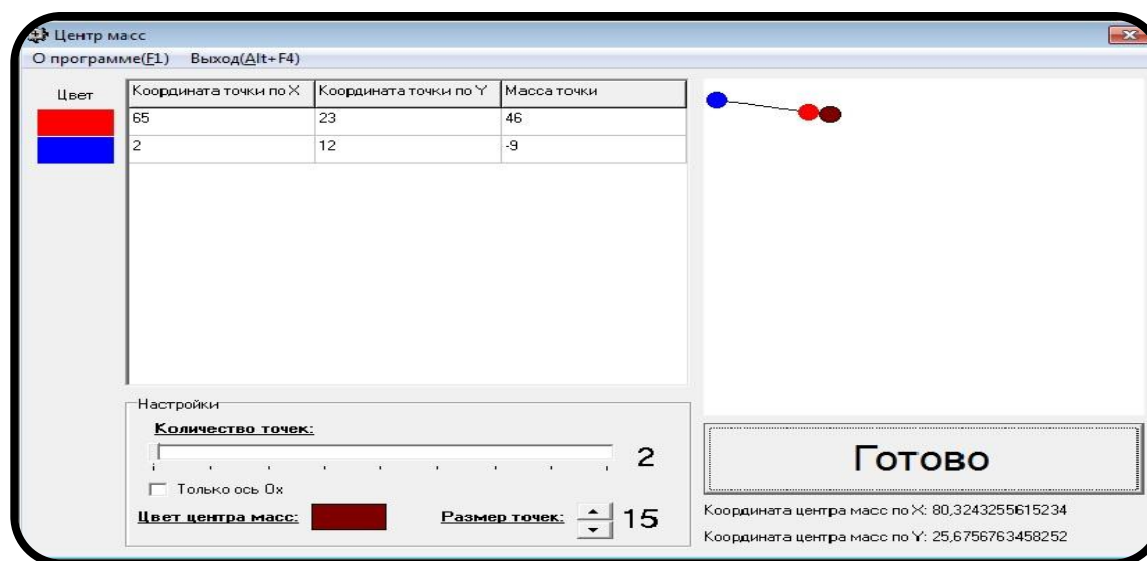
$$Z_1 = \frac{15 \cdot 0,2 + 10 \cdot 0,45}{15 + 10} = 0,3; \quad Z_2 = \frac{15 \cdot 0,5 + 10 \cdot 0,3}{15 + 10} = 0,42; \quad Z_3 = \frac{15 \cdot 0,3 + 10 \cdot 0,25}{15 + 10} = 0,28.$$

$$6) \text{Ag} = 0,3 \cdot 100\% = 30\% \quad \text{Cu} = 0,42 \cdot 100\% = 42\% \quad \text{Zn} = 0,28 \cdot 100\% = 28\%$$

Ответ: 30% Ag, 42% Cu, 28% Zn.



Для того, чтобы проверить задачи, предложенные в сборнике мной была создана программа, написанная в среде программирование Borland C++ Builder, определяет центр масс для n-ого количества точек. Также вычисляет координаты центра масс для данных точек и изображает их схематично. Масштаб, цвет и количество тел, материальных точек задается пользователем.



Заключение

- ✓ *В результате данной исследовательской работы было установлено, что барицентрический метод позволяет решать ряд задач, решение которых другим способом является затруднительным;*
- ✓ *Данный метод является универсальным. Границы применимости охватывают широкий спектр наук;*
- ✓ *И действительно, данный метод может быть предложен не только как дополнительный материал на факультативных занятиях в школе, но и как опорный материал при подготовке к экзаменам в вузах*

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!!!

1) Рассмотрите малую окружность Γ радиуса R и ΔOAB при этом Γ касается OA и OB .

2) Определите величину угла α при $\alpha = 90^\circ$.

3) Выразите α через R и r .

4) Выразите r через R и α .

5) Выразите R через r и α .

6) Выразите α через R и r .

7) Выразите r через R и α .

8) Выразите R через r и α .

2.1. Вывод формулы площади параллелограмма

Площадь параллелограмма равна произведению его стороны на высоту, опущенную на эту сторону.

$$S_{\text{параллелограмма}} = a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c = d \cdot h_d$$

где a, b, c, d — стороны, а h_a, h_b, h_c, h_d — высоты, опущенные на эти стороны.

Определение: Внутренний радиус r шара — это радиус сферы, касающейся внутренней поверхности шара и его внутренней поверхности.

Теорема: Внутренний радиус r шара равен половине радиуса шара.

Доказательство: Пусть O — центр шара, M — центр внутренней сферы, A — точка касания внутренней сферы с внутренней поверхностью шара. Тогда $OA = R$, $MA = r$, $OM = R - r$. По теореме Пифагора: $(R - r)^2 + r^2 = R^2$. Отсюда $R^2 - 2Rr + r^2 + r^2 = R^2$, $2r^2 - 2Rr = 0$, $r^2 - Rr = 0$, $r(r - R) = 0$. Так как $r \neq 0$, то $r = R/2$.

2.2. Вывод формулы площади треугольника

Площадь треугольника равна половине произведения его стороны на высоту, опущенную на эту сторону.

$$S_{\text{треугольника}} = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} c \cdot h_c$$

где a, b, c — стороны, а h_a, h_b, h_c — высоты, опущенные на эти стороны.

№ 1

№ 2

№ 3

№ 4

№ 5

№ 6

№ 7

№ 8

№ 9

№ 10

№ 11

№ 12

№ 13

№ 14

№ 15

№ 16

№ 17

№ 18

№ 19

№ 20

№ 21

№ 22

№ 23

№ 24

№ 25

№ 26

№ 27

№ 28

№ 29

№ 30

№ 31

№ 32

№ 33

№ 34

№ 35

№ 36

№ 37

№ 38

№ 39

№ 40

№ 41

№ 42

№ 43

№ 44

№ 45

№ 46

№ 47

№ 48

№ 49

№ 50

№ 51

№ 52

№ 53

№ 54

№ 55

№ 56

№ 57

№ 58

№ 59

№ 60

№ 61

№ 62

№ 63

№ 64

№ 65

№ 66

№ 67

№ 68

№ 69

№ 70

№ 71

№ 72

№ 73

№ 74

№ 75

№ 76

№ 77

№ 78

№ 79

№ 80

№ 81

№ 82

№ 83

№ 84

№ 85

№ 86

№ 87

№ 88

№ 89

№ 90

№ 91

№ 92

№ 93

№ 94

№ 95

№ 96

№ 97

№ 98

№ 99

№ 100

2.3. Вывод формулы площади трапеции

Площадь трапеции равна половине произведения суммы ее оснований на высоту.

$$S_{\text{трапеции}} = \frac{1}{2} (a + b) \cdot h$$

где a, b — основания, а h — высота.

2.4. Вывод формулы площади ромба

Площадь ромба равна произведению его стороны на высоту, опущенную на эту сторону.

$$S_{\text{ромба}} = a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c = d \cdot h_d$$

где a, b, c, d — стороны, а h_a, h_b, h_c, h_d — высоты, опущенные на эти стороны.

2.5. Вывод формулы площади параллелограмма

Площадь параллелограмма равна произведению его стороны на высоту, опущенную на эту сторону.

$$S_{\text{параллелограмма}} = a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c = d \cdot h_d$$

где a, b, c, d — стороны, а h_a, h_b, h_c, h_d — высоты, опущенные на эти стороны.

2.6. Вывод формулы площади треугольника

Площадь треугольника равна половине произведения его стороны на высоту, опущенную на эту сторону.

$$S_{\text{треугольника}} = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} c \cdot h_c$$

где a, b, c — стороны, а h_a, h_b, h_c — высоты, опущенные на эти стороны.

2.7. Вывод формулы площади трапеции

Площадь трапеции равна половине произведения суммы ее оснований на высоту.

$$S_{\text{трапеции}} = \frac{1}{2} (a + b) \cdot h$$

где a, b — основания, а h — высота.

2.8. Вывод формулы площади ромба

Площадь ромба равна произведению его стороны на высоту, опущенную на эту сторону.

$$S_{\text{ромба}} = a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c = d \cdot h_d$$

где a, b, c, d — стороны, а h_a, h_b, h_c, h_d — высоты, опущенные на эти стороны.