# Биквадратное уравнение

**Уравнение вида** $ax^4 + bx^2 + c = 0$, **где**

**a, b, c – данные числа и *a* отлично от нуля, а x –неизвестное, называют биквадратным уравнением.**

Чтобы решить биквадратное уравнение, вводят новое неизвестное при помощи равенства $t = x^2$

Тогда исходное уравнение превращается в квадратное $at^2 + bt + c = 0$ относительно неизвестного t.

**Представьте выражение в виде квадрата:**

а) $x^4$; б) $a^6$; в) $y^8$; г) $m^{10}$.

**Какую подстановку необходимо выполнить, чтобы уравнение стало квадратным:**

а) $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$; б) $m^4 - 3 + 2m^2 = 0$;

в) $4y^2 - 7y^4 = 0$; г) $15 - x^4 + 2x^2 = 0$;

д) $x^6 - 3x^3 + 2 = 0$; е) $y^8 - 4 = 0$.

Пример 1

Решить уравнение $x^4 - 4x^2 + 3 = 0.$

Решение

$$x^4 - 4x^2 + 3 = 0$$

введем новую переменную $\boxed{t = x^2}$ где $t \geq 0$

исходное уравнение примет вид:

$$t^2 - 4t + 3 = 0$$

так как $D > 0$ то оно имеет два корня.

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = 3; \\ t_2 = 1. \end{array}\right.$$

**Обратная подстановка дает:**

$$x^2 = 1;$$
$$x^2 = 3.$$

**Решив их получим:**

$$x^2 = 1 \qquad\qquad x^2 = 3$$
$$x_1 = \sqrt{1} = 1; \qquad x_3 = \sqrt{3};$$
$$x_2 = -\sqrt{1} = -1; \qquad x_4 = -\sqrt{3}.$$

**Ответ:**

$$x_1 = 1;$$
$$x_2 = -1;$$
$$x_3 = \sqrt{3};$$
$$x_4 = -\sqrt{3}.$$

Пример 3 | Решить уравнение $x^4 - 2x^2 - 2 = 0.$

Решение

$$x^4 - 2x^2 - 2 = 0$$

введем новую переменную $\boxed{t = x^2}$ где $t \geq 0$

исходное уравнение примет вид:

$$t^2 - 2t - 2 = 0$$

так как $D > 0$

то оно имеет два корня.

$$t_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{3}}{1}=1\pm\sqrt{3}$$

$$t_1=1+\sqrt{3}>0;$$

$$t_2=1-\sqrt{3}<0$$ - исключается

$$x^2 = 1 + \sqrt{3};$$

$$x_1 = \sqrt{1 + \sqrt{3}};$$

$$x_2 = -\sqrt{1 + \sqrt{3}}.$$

**Ответ:** $x_{1,2} = \pm\sqrt{1 + \sqrt{3}}.$

**Пример 2**

**Решить уравнение** $2x^4 - 3x^2 + 5 = 0.$

***Решение***

$$2x^4 - 3x^2 + 5 = 0$$

**введем новую переменную** $\boxed{t = x^2}$ **где** $t \geq 0$

**исходное уравнение примет вид:**

$$2t^2 - 3t + 5 = 0$$

**Его дискриминант**

$$D = b^2 - 4ac = 9 - 4 \cdot 2 \cdot 5 < 0$$

**следовательно оно не имеет корней. Тогда и исходное уравнение тоже не имеет корней.**

**Ответ: корней нет.**

Пример 4

Решить уравнение $9x^4 - 6x^2 + 1 = 0.$

Решение

$$9x^4 - 6x^2 + 1 = 0$$

введем новую переменную $t = x^2$, где $t \geq 0$

исходное уравнение примет вид:

$$9t^2 - 6t + 1 = 0$$

Его дискриминант

$$D = b^2 - 4ac = 36 - 4 \cdot 9 \cdot 1 = 36 - 36 = 0$$

следовательно оно имеет единственный корень.

$$t = \frac{6 \pm 0}{18} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3} > 0.$$

**Обратная подстановка дает:**

$$x^2 = \frac{1}{3};$$

$$x_1 = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$x_2 = -\sqrt{\frac{1}{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

**Ответ:** $$x_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

**Пример 5** **Решить уравнение** $x^4 + 10x^2 + 25 = 0.$

***Решение***

$$x^4 + 10x^2 + 25 = 0$$

**введем новую переменную** $\boxed{t = x^2}$ **где** $t \geq 0$

**исходное уравнение примет вид:**

$$t^2 + 10t + 25 = 0$$

**для которого** D=0

**таким образом оно имеет единственный корень**

$$t = \frac{-5 \pm 0}{1} = -5 < 0$$

**Значит исходное уравнение не имеет корней.**

**Ответ: корней нет**

## Замечание *1*

Решить уравнение $x^4 = 0$

Имеет один корень $x = 0.$

Ответ: $x = 0.$

Решить уравнение $x^4 - x^2 = 0$

Решение:

$$x^4 - x^2 = 0$$

$$x^2(x^2 - 1) = 0$$

$$x^2(x - 1)(x + 1) = 0$$

$$x_1 = 0; x_2 = 1; x_3 = -1.$$

Ответ: *-1; 0; 1.*

**Замечание 2**

Из рассмотренных примеров видно, что биквадратное уравнение может иметь четыре, три, два, один действи-тельный корень, но может и не иметь корней.