

# **Биквадратное уравнение**

Уравнение вида  $ax^4 + bx^2 + c = 0$  , где

$a, b, c$  – данные числа и  $a$  отлично от нуля, а  $x$  – неизвестное, называют **биквадратным уравнением**.

Чтобы решить биквадратное уравнение, вводят новое неизвестное при помощи равенства  $t = x^2$

Тогда исходное уравнение превращается в квадратное  $at^2 + bt + c = 0$  относительно неизвестного  $t$ .

Представьте выражение в виде квадрата:

а)  $x^4$ ;   б)  $a^6$ ;   в)  $y^8$ ;   г)  $m^{10}$ .

Какую подстановку необходимо выполнить, чтобы уравнение стало квадратным:

а)  $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$ ;   б)  $m^4 - 3 + 2m^2 = 0$ ;

в)  $4y^2 - 7y^4 = 0$ ;   г)  $15 - x^4 + 2x^2 = 0$ ;

д)  $x^6 - 3x^3 + 2 = 0$ ;   е)  $y^8 - 4 = 0$ .

**Пример**

**Решить уравнение**  $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$ .

**Решение**

$$x^4 - 4x^2 + 3 = 0$$

введем новую переменную  $t = x^2$   $\geq 0$   
где  $t \geq 0$   
исходное уравнение примет вид:

$$t^2 - 4t + 3 = 0$$

так как  
корня.

$$D > 0$$

то оно имеет два

$$t_1 = 3;$$

$$t_2 = 1.$$

**Обратная подстановка дает:**

$$x^2 = 1;$$
$$x^2 = 3.$$

**Решив их получим:**

$$x^2 = 1$$

$$x_1 = \sqrt{1} = 1;$$

$$x_2 = -\sqrt{1} = -1;$$

$$x^2 = 3$$

$$x_3 = \sqrt{3};$$

$$x_4 = -\sqrt{3}.$$

**Ответ:**

$$x_1 = 1;$$

$$x_2 = -1;$$

$$x_3 = \sqrt{3};$$

$$x_4 = -\sqrt{3}.$$

**Пример**

**Решить уравнение**  $x^4 - 2x^2 - 2 = 0$ .

**Решение**

$$x^4 - 2x^2 - 2 = 0$$

**введем новую переменную**  $t = x^2$   $\geq 0$

**где**  $t \geq 0$   
**исходное уравнение примет вид:**

$$t^2 - 2t - 2 = 0$$

**так как**

$$D > 0$$

**то оно имеет два корня.**

$$t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{1} = 1 \pm \sqrt{3}$$

$$t_1 = 1 + \sqrt{3} > 0;$$

$$t_2 = 1 - \sqrt{3} < 0 -$$

**ИСКЛЮЧАЕТ  
СЯ**

$$x^2 = 1 + \sqrt{3};$$

$$x_1 = \sqrt{1 + \sqrt{3}};$$

$$x_2 = -\sqrt{1 + \sqrt{3}}.$$

**Ответ:**  $x_{1,2} = \pm\sqrt{1 + \sqrt{3}}.$

**Пример**

**Решить уравнение  $2x^4 - 3x^2 + 5 = 0$ .**

**Решение**

$$2x^4 - 3x^2 + 5 = 0$$

**введем новую переменную  $t = x^2$   $\geq 0$**

**где  $t \geq 0$   
исходное уравнение примет вид:**

$$2t^2 - 3t + 5 = 0$$

**Его дискриминант**

$$D = b^2 - 4ac = 9 - 4 \cdot 2 \cdot 5 < 0$$

**следовательно оно не имеет корней. Тогда и исходное уравнение тоже не имеет корней.**

**Ответ: корней нет.**

**Пример**

**Решить уравнение**  $9x^4 - 6x^2 + 1 = 0$ .

**Решение**

$$9x^4 - 6x^2 + 1 = 0$$

**введем новую переменную**  $t = x^2$   $\geq 0$   
**где**  $t \geq 0$   
**исходное уравнение примет вид:**

$$9t^2 - 6t + 1 = 0$$

**Его дискриминант**

$$D = b^2 - 4ac = 36 - 4 \cdot 9 \cdot 1 = 36 - 36 = 0$$

**следовательно оно имеет единственный корень.**

$$t = \frac{6 \pm 0}{18} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3} > 0.$$

**Обратная  
подстановка  
дает:**

$$x^2 = \frac{1}{3};$$

$$x_1 = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$x_2 = -\sqrt{\frac{1}{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

**Ответ:**

$$x_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

**Пример**

**Решить уравнение**  $x^4 + 10x^2 + 25 = 0$ .

**Решение**

$$x^4 + 10x^2 + 25 = 0$$

**введем новую переменную**  $t = x^2$   $\geq 0$

**где  $t \geq 0$**   
**исходное уравнение примет вид:**

$$t^2 + 10t + 25 = 0$$

**для которого**

$$D=0$$

**таким образом оно имеет единственный корень**

$$t = \frac{-5 \pm 0}{1} = -5 < 0$$

**Значит исходное уравнение не имеет корней.**

**Ответ: корней**

**НЕТ**

## Замечани

е 1

Решить  
уравнение  $x^4 = 0$

Имеет один  
корень  $x = 0$ .

**Ответ:**  $x = 0$ .

Решить  
уравнение  $x^4 - x^2 = 0$

**Решение:**

$$x^4 - x^2 = 0$$

$$x^2(x^2 - 1) = 0$$

$$x^2(x - 1)(x + 1) = 0$$

$$x_1 = 0; x_2 = 1; x_3 = -1.$$

**Ответ:**  $-1; 0;$

$1.$

## Замечани

е 2

Из рассмотренных примеров видно, что биквадратное уравнение может иметь четыре, три, два, один действительный корень, но может и не иметь корней.