

Биквадратное уравнение

Уравнение вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$, где

a, b, c – данные числа и a отлично от нуля, а x – неизвестное, называют **биквадратным уравнением**.

Чтобы решить биквадратное уравнение, вводят новое неизвестное при помощи равенства $t = x^2$

Тогда исходное уравнение превращается в квадратное $at^2 + bt + c = 0$ относительно неизвестного t .

Представьте выражение в виде квадрата:

а) x^4 ; б) a^6 ; в) y^8 ; г) m^{10} .

Какую подстановку необходимо выполнить, чтобы уравнение стало квадратным:

а) $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$; б) $m^4 - 3 + 2m^2 = 0$;

в) $4y^2 - 7y^4 = 0$; г) $15 - x^4 + 2x^2 = 0$;

д) $x^6 - 3x^3 + 2 = 0$; е) $y^8 - 4 = 0$.

Пример

Решить уравнение $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$.

Решение

$$x^4 - 4x^2 + 3 = 0$$

введем новую переменную $t = x^2$ ≥ 0
где $t \geq 0$
исходное уравнение примет вид:

$$t^2 - 4t + 3 = 0$$

так как $D > 0$ то оно имеет два
корня.

$$t_1 = 3;$$

$$t_2 = 1.$$

Обратная подстановка дает:

$$x^2 = 1;$$
$$x^2 = 3.$$

Решив их получим:

$$x^2 = 1$$

$$x_1 = \sqrt{1} = 1;$$

$$x_2 = -\sqrt{1} = -1;$$

$$x^2 = 3$$

$$x_3 = \sqrt{3};$$

$$x_4 = -\sqrt{3}.$$

Ответ:

$$x_1 = 1;$$

$$x_2 = -1;$$

$$x_3 = \sqrt{3};$$

$$x_4 = -\sqrt{3}.$$

Пример

Решить уравнение $x^4 - 2x^2 - 2 = 0$.

Решение

$$x^4 - 2x^2 - 2 = 0$$

введем новую переменную $t = x^2$ ≥ 0
где $t \geq 0$
исходное уравнение примет вид:

$$t^2 - 2t - 2 = 0$$

так как

$$D > 0$$

то оно имеет два корня.

$$t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{1} = 1 \pm \sqrt{3}$$

$$t_1 = 1 + \sqrt{3} > 0;$$

$$t_2 = 1 - \sqrt{3} < 0 -$$

**ИСКЛЮЧАЕТ
СЯ**

$$x^2 = 1 + \sqrt{3};$$

$$x_1 = \sqrt{1 + \sqrt{3}};$$

$$x_2 = -\sqrt{1 + \sqrt{3}}.$$

Ответ: $x_{1,2} = \pm\sqrt{1 + \sqrt{3}}.$

Пример

Решить уравнение $2x^4 - 3x^2 + 5 = 0$.

Решение

$$2x^4 - 3x^2 + 5 = 0$$

введем новую переменную $t = x^2$ ≥ 0

**где $t \geq 0$
исходное уравнение примет вид:**

$$2t^2 - 3t + 5 = 0$$

Его дискриминант

$$D = b^2 - 4ac = 9 - 4 \cdot 2 \cdot 5 < 0$$

следовательно оно не имеет корней. Тогда и исходное уравнение тоже не имеет корней.

Ответ: корней нет.

Пример

Решить уравнение $9x^4 - 6x^2 + 1 = 0$.

Решение

$$9x^4 - 6x^2 + 1 = 0$$

введем новую переменную $t = x^2$ ≥ 0

где $t \geq 0$
исходное уравнение примет вид:

$$9t^2 - 6t + 1 = 0$$

Его дискриминант

$$D = b^2 - 4ac = 36 - 4 \cdot 9 \cdot 1 = 36 - 36 = 0$$

следовательно оно имеет единственный корень.

$$t = \frac{6 \pm 0}{18} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3} > 0.$$

**Обратная
подстановка
дает:**

$$x^2 = \frac{1}{3};$$

$$x_1 = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$x_2 = -\sqrt{\frac{1}{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ответ:

$$x_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Пример

Решить уравнение $x^4 + 10x^2 + 25 = 0$.

Решение

$$x^4 + 10x^2 + 25 = 0$$

введем новую переменную $t = x^2$ ≥ 0

где $t \geq 0$
исходное уравнение примет вид:

$$t^2 + 10t + 25 = 0$$

для которого

$$D=0$$

таким образом оно имеет единственный корень

$$t = \frac{-5 \pm 0}{1} = -5 < 0$$

Значит исходное уравнение не имеет корней.

Ответ: корней

нет

Замечани

е 1

Решить
уравнение $x^4 = 0$

Имеет один
корень $x = 0$.

Ответ: $x = 0$.

Решить
уравнение $x^4 - x^2 = 0$

Решение:

$$x^4 - x^2 = 0$$

$$x^2(x^2 - 1) = 0$$

$$x^2(x - 1)(x + 1) = 0$$

$$x_1 = 0; x_2 = 1; x_3 = -1.$$

Ответ: $-1; 0;$

$1.$

Замечани

е 2

Из рассмотренных примеров видно, что биквадратное уравнение может иметь четыре, три, два, один действительный корень, но может и не иметь корней.