

# Занимательная математика АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА, 11 КЛАСС.

**УРОК НА ТЕМУ:  
ТРЕУГОЛЬНИК ПАСКАЛЯ.  
БИНОМ НЬЮТОНА.**

$$\begin{array}{cccccccc} & & & & C_0^0 & = & 1 & & & & \\ & & & & C_1^0 & = & 1 & & C_1^1 & = & 1 \\ & & & C_2^0 & = & 1 & & C_2^1 & = & 2 & & C_2^2 & = & 1 \\ & & C_3^0 & = & 1 & & C_3^1 & = & 3 & & C_3^2 & = & 3 & & C_3^3 & = & 1 \\ & C_4^0 & = & 1 & & C_4^1 & = & 4 & & C_4^2 & = & 6 & & C_4^3 & = & 4 & & C_4^4 & = & 1 \\ C_n^0 & & \dots & & C_n^1 & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & C_n^{n-1} & & \dots & & C_n^n \end{array}$$

# Треугольник Паскаля.

Числа  $C_n^k$  имеют очень красивую и знаменитую запись, которая имеет большое значение.

Такая запись называется **треугольником Паскаля**:

A diagram of Pascal's triangle showing the first five rows of binomial coefficients  $C_n^k$ . The rows are arranged in a triangular shape, with each row starting further to the left than the previous one. The coefficients are arranged as follows:

- Row 0:  $C_0^0 = 1$
- Row 1:  $C_1^0 = 1$ ,  $C_1^1 = 1$
- Row 2:  $C_2^0 = 1$ ,  $C_2^1 = 2$ ,  $C_2^2 = 1$
- Row 3:  $C_3^0 = 1$ ,  $C_3^1 = 3$ ,  $C_3^2 = 3$ ,  $C_3^3 = 1$
- Row 4:  $C_4^0 = 1$ ,  $C_4^1 = 4$ ,  $C_4^2 = 6$ ,  $C_4^3 = 4$ ,  $C_4^4 = 1$

Below the triangle, there are three dots ( $\dots$ ) between each pair of adjacent  $C_n^k$  terms, indicating the continuation of the triangle. At the bottom left, the general term  $C_n^0$  is shown, followed by three dots, then  $C_n^1$ , followed by three dots, then three dots, then three dots, then three dots, then three dots, then  $C_n^{n-1}$ , followed by three dots, and finally  $C_n^n$ .

# Треугольник Паскаля.

Правило записи треугольника легко запомнить:

Каждое число в треугольнике паскаля равно сумме двух чисел, стоящих над ними в предыдущей строке.

Давайте распишем несколько строк:

					1					
					1		1			
				1	2	1				
			1	3	3	1				
		1	4	6	4	1				
	1	5	10	10	5	1				
	1	6	15	20	15	6	1			
1	7	21	35	35	21	7	1			
1	8	28	56	70	56	28	8	1		
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Математическое свойство подсчета числа сочетаний без повторений можно записать еще вот так:

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}.$$

# Бином Ньютона.

Как оказалось треугольника Паскаля находит свое применение и в другой математической задаче. Давайте вспомним несколько правил возведения в квадрат суммы.

Самое первое правило, которое мы с вами выучили это квадрат суммы:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Довольно таки легко найти выражение и для следующей степени, используя правила перемножения многочленов:

$$(a + b)^3 = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Проделаем эту же операцию и для четвертой степени:

$$(a + b)^4 = (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)(a + b) = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

# Бином Ньютона.

Выпишем для наглядности все наши формулы:

$$(a + b)^1 = a + b;$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Давайте проведем небольшой анализ полученных формул.

Первое на что стоит обратить внимание, **показатель степени в левой части равен сумме показателей степеней в правой части**, для любого слагаемого. Для четвертой степени, очевидно слева показатель равен четырем. В правой части показатель степени, при первом слагаемом, для  $a$  равен 4, для  $b$  равен 0, в сумме 4. Для второго слагаемого сумма показателей равна  $3+1=4$ , для следующего  $2+2=4$ , и так до самого конца сумма показателей равна 4.

Ребята, **посмотрите внимательно на коэффициенты в правой части**, ни чего не напоминает? Правильно, **коэффициенты образуют треугольник Паскаля**.

# Бином Ньютона.

Эти два замечательных свойства, замеченных выше, позволяют вычислять сумму двух одночленов в  $n$ -ой степени:

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + C_n^3 a^{n-3} b^3 + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$$

Давайте попробуем доказать нашу формулу:

Рассмотрим слагаемое, стоящее на месте под номером  $k+1$ . По написанной выше формуле получаем, вот такое слагаемое:

$$C_n^k a^{n-k} b^k$$

Нам нужно доказать, что коэффициент при данном одночлене как раз и равен

$$C_n^k$$

Для того, чтобы двучлен возвести в  $n$ -ую степень, нам нужно этот двучлен умножить на себя  $n$  раз, то есть:  $(a + b)^n = \underbrace{(a + b)(a + b)(a + b) \cdot \dots \cdot (a + b)}_{n \text{ штук}}$

Чтобы получить требуемое слагаемое, нам надо выбрать  $k$  - штук множителей для  $b$ , и получается  $n-k$  - множителей для  $a$ , в каком порядке будем выбирать данные множители не важно, а это задача есть ни что иное как - число сочетаний из  $n$  элементов по  $k$ , без повторений, то есть  $C_n^k$ . Наша формула доказана.

# Бином Ньютона.

Полученная нами формула:

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + C_n^3 a^{n-3} b^3 + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$$

**коэффициенты.**

# Бином Ньютона.

**Пример.** Раскрыть скобки: а)  $(y + 1)^7$   $(z^2 - 3t)^5$

**Решение.** Применим нашу формулу:

$$\text{а) } (y + 1)^7 = C_7^0 y^7 + C_7^1 \cdot y^6 \cdot 1 + C_7^2 \cdot y^5 \cdot 1^2 + C_7^3 \cdot y^4 \cdot 1^3 + C_7^4 \cdot y^3 \cdot 1^4 + \\ + C_7^5 \cdot y^2 \cdot 1^5 + C_7^6 \cdot y \cdot 1^6 + C_7^7 \cdot 1^7$$

Вычислим все коэффициенты:

$$C_7^0 = 1; C_7^1 = 7; C_7^2 = \frac{7!}{2!5!} = 21; C_7^3 = 35; C_7^4 = 35; C_7^5 = 21; C_7^6 = 7; C_7^7 = 1$$

В итоге получаем:

$$(y + 1)^7 = y^7 + 7 \cdot y^6 + 21 \cdot y^5 + 35 \cdot y^4 + 35 \cdot y^3 + 21 \cdot y^2 + 7 \cdot y + 1$$

$$\text{б) } (z^2 - 3t)^5 = C_5^0 \cdot (z^2)^5 + C_5^1 \cdot (z^2)^4 \cdot (-3t)^1 + C_5^2 \cdot (z^2)^3 \cdot (-3t)^2 + \\ + C_5^3 \cdot (z^2)^2 \cdot (-3t)^3 + C_5^4 \cdot (z^2)^1 \cdot (-3t)^4 + C_5^5 \cdot (z^2)^0 \cdot (-3t)^5 = \\ = z^{10} + 5 \cdot z^8 \cdot (-3t) + 10 \cdot z^6 \cdot (9t^2) + 10 \cdot z^4 \cdot (-27t^3) + 5 \cdot z^2 \cdot (81t^4) - 243t^5 \\ = z^{10} - 15z^8t + 90z^6t^2 - 270z^4t^3 + 405z^2t^4 - 243t^5$$



# Бином Ньютона.

Обратим внимание на еще одно удивительное свойство.  
Рассмотрим двучлен:

Используя Бином Ньютона  $(x + 1)^n$ :

$$\text{При } (x + 1)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} + C_n^3 x^{n-3} + \dots + C_n^{n-2} x^2 + C_n^{n-1} x + C_n^n$$

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^{n-2} + C_n^{n-1} + C_n^n$$

# Бином Ньютона

**Задачи для самостоятельного решения.**

Избавиться от скобок:

а)  $(x + 2)^6$

б)  $(3x + 2y)^4$

в)  $(2z - 2t)^8$

г)  $(x - 4y)^5$