

15. Биномиальное распределение

Случайная величина X называется распределенной по биномиальному закону с параметрами $n, p > 0$, если X принимает значения: $0, 1, 2, \dots, n$ и вероятность того, что случайная величина примет значение $X=t$ находится по формуле Бернулли:

$$p(X = t) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$$

где $q=1-p$.

Случайную величину X , распределенную по биномиальному закону, можно трактовать следующим образом:

Рассмотрим событие A , которое происходит в опыте с вероятностью p и не происходит с вероятностью $q=1-p$. Производится серия из n опытов в одинаковых условиях и независимо друг от друга. Случайная величина X - сколько раз событие A произошло в данной серии опытов.

ПРИМЕР.

Составить ряд распределения величины, распределенной по биномиальному закону с параметрами $n=4$, $p=1/3$.

Решение:

Производится серия из $n=4$ опытов. Случайная величина X - число опытов, в которых может произойти событие A , может принимать значения $0, 1, 2, 3, 4$.

Соответствующие вероятности находятся по формуле Бернулли при $n=4$, $p=1/3$, $q=1-1/3=2/3$.

$$p(X = m) = C_4^m \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^m \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{4-m}$$

Вероятность того, что событие A не произойдет ни в одном опыте ($m=0$):

$$p(X = 0) = C_4^0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$$

Вероятность того, что событие А произойдет в одном опыте (m=1):

$$p(X = 1) = C_4^1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{32}{81}$$

Аналогично находим вероятности того, что это событие произойдет в двух (m=2), в трех (m=3) и в четырех (m=4) опытах:

$$p(X = 2) = C_4^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{24}{81}$$

$$p(X = 3) = C_4^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{8}{81}$$

$$p(X = 4) = C_4^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{1}{81}$$

Таким образом, ряд распределения случайной величины X будет выглядеть так:

X_m	0	1	2	3	4
P_m	16/81	32/81	24/81	8/81	1/81

Можно убедиться, что суммарная вероятность действительно равна 1.

Найдем математическое ожидание случайной величины, распределенной по биномиальному закону.

X - число опытов в серии из n , в которых произошло событие A .

Введем для каждого $i=1,2,\dots,n$ случайную величину Z_i .

Пусть Z_i принимает всего два значения: 1 - если событие A произойдет в i -ом опыте и 0 - если событие A не произойдет в i -ом опыте.

Тогда событие X выразится через сумму событий Z_i :

$$X = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$$

Тогда математическое ожидание случайной величины X :

$$M[X] = M[Z_1] + M[Z_2] + \dots + M[Z_n]$$

Найдем математическое ожидание Z_i

Ряд распределения Z_i имеет вид:

Z_i	0	1
P_i	q	p

Тогда $M[Z_i] = p$ и $M[X] = np$.

Найдем дисперсию случайной величины Z_i

$$D[Z_i] = (0 - p)^2 \cdot q + (1 - p)^2 \cdot p = pq$$

Так как случайные величины Z_i независимы, то

$$\begin{aligned} D[X] &= D[Z_1] + D[Z_2] + \dots + D[Z_n] = \\ &= n \cdot D[Z_n] = n \cdot p \cdot q \end{aligned}$$

Таким образом, для случайной величины, распределенной по биномиальному закону,

$$M[X] = n \cdot p$$

$$D[X] = n \cdot p \cdot q$$