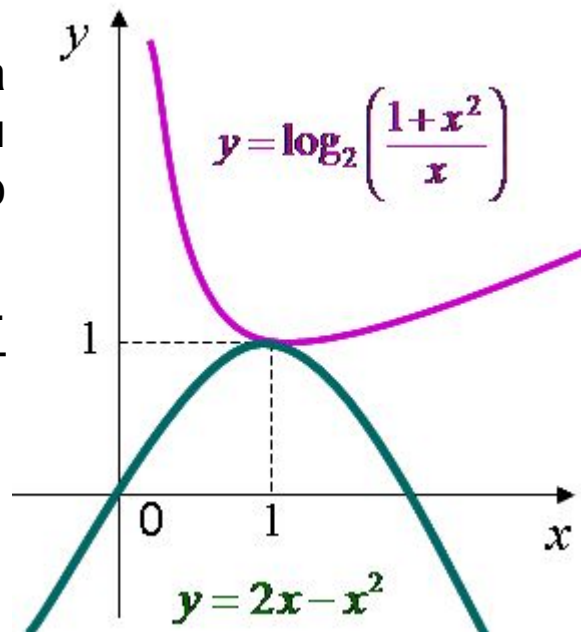


C1 метод мажорант

# МЕТОД МАЖОРАНТ

Применим для задач в которых множества значений левой и правой частей уравнения или неравенства имеют единственную общую точку, являющуюся наибольшим значением для одной части и наименьшим для другой. Эту ситуацию хорошо иллюстрирует график.



Как начинать решать такие задачи?

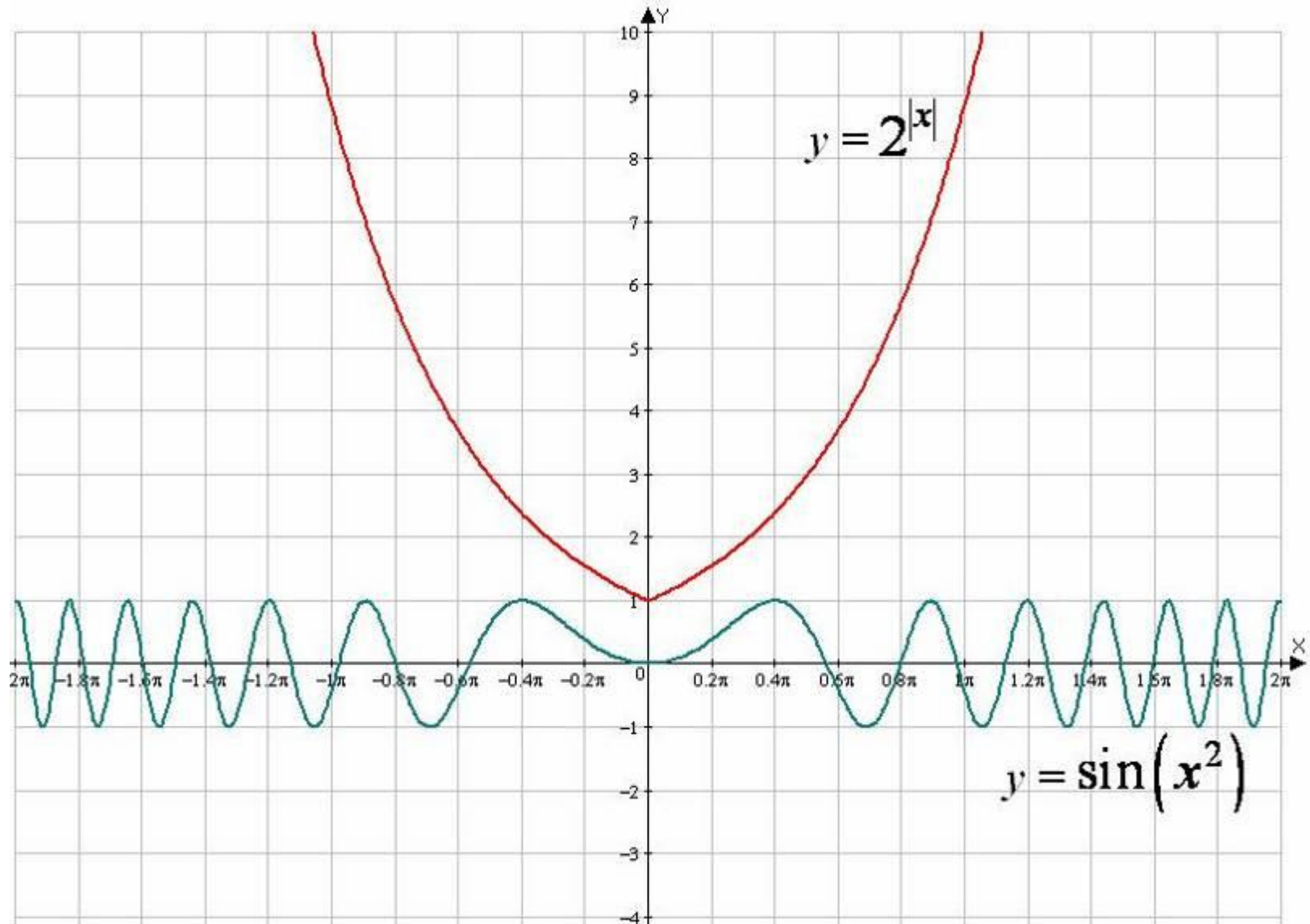
Привести уравнение или неравенство к виду  $f(x) = g(x)$

Сделать оценку обеих частей. Пусть существует такое число  $M$ , из области определения такое что  $f(x) \leq M(x) \leq g(x)$

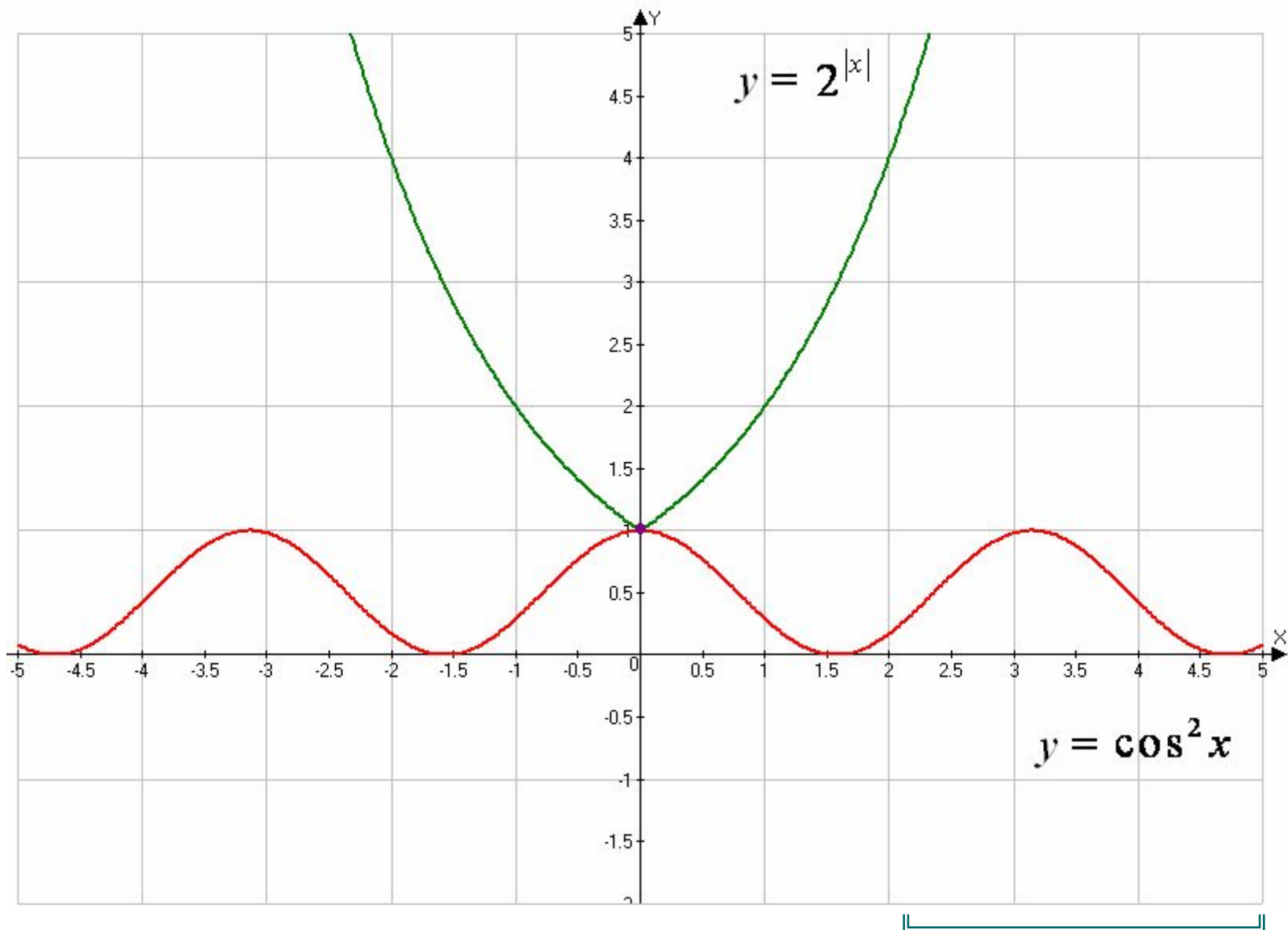
Решить систему уравнений: 
$$\begin{cases} M(x) = \dots, \\ g(x) = \dots. \end{cases}$$

**Пример 1.**  
**уравнение**

**Решите**  $2^{|x|} = \sin(x^2)$ .

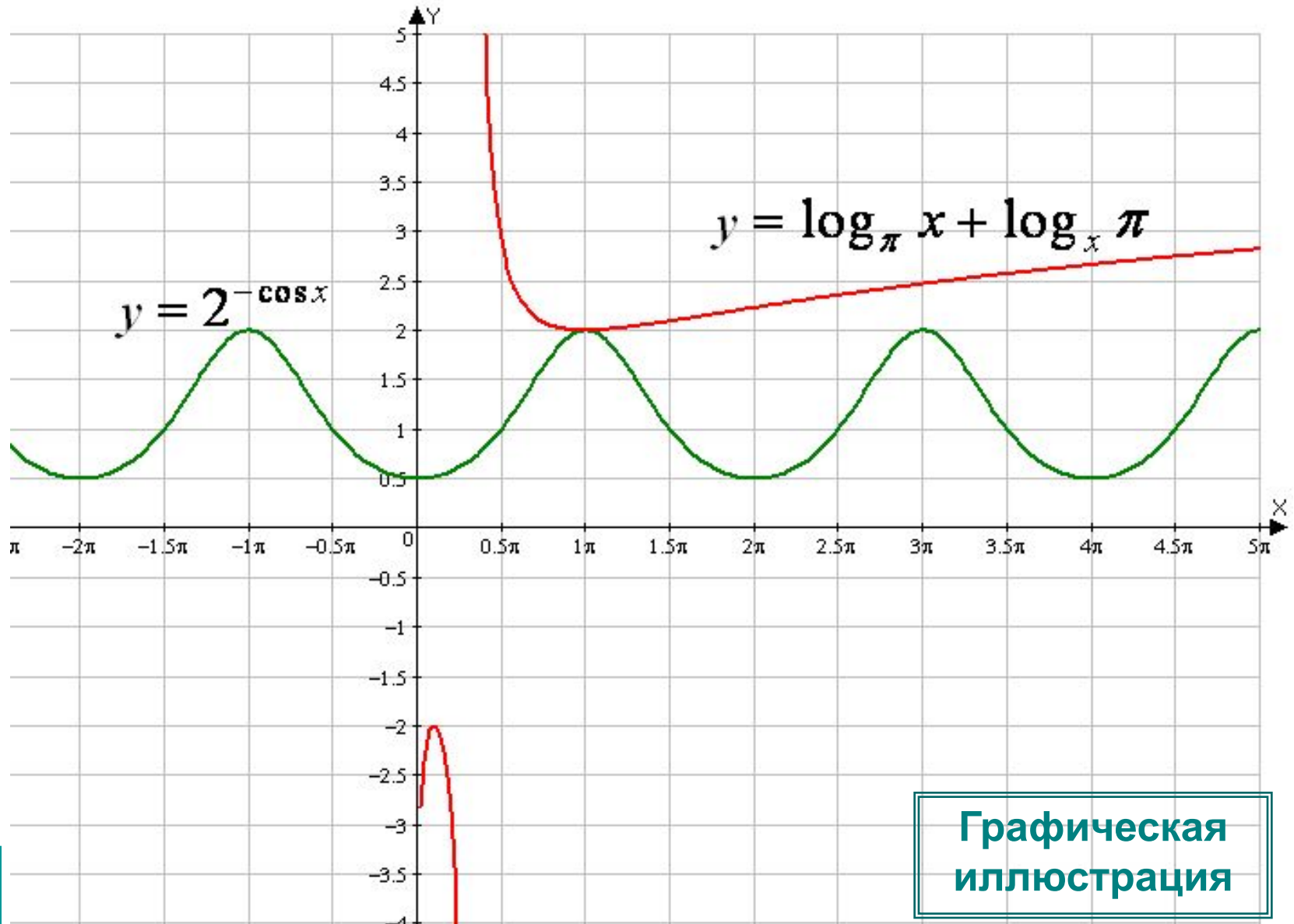


**Пример 2. Решить уравнение  $2^{|x|} = \cos^2 x$ .**



**Пример 4.**  
**уравнение**

**Решить**  $2^{-\cos x} = \log_{\pi} x + \log_x \pi.$



**Графическая  
иллюстрация**

**Пример 5. Решить уравнение  $\sin x + \sin 9x = 2$ .**

**Решение.** Оценим обе части уравнения.

Поскольку  $\sin x \leq 1$  и  $\sin 9x \leq 1$ , равенств  
выполняется тогда и только тогда, когда  
когда  $\begin{cases} \sin x = 1, \\ \sin 9x = 1 \end{cases}$

Решением первого уравнения системы являются значения

$$\tilde{\alpha} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z.$$

При этих  $x$  найдем  $\sin 9x = \sin\left(9 \cdot \frac{\pi}{2} + 18\pi n\right) = 1$ .

Следовательно,  $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$  решение системы.

Ответ:  $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$

**Пример 6.**  
**уравнение**

**Решить**  $\cos 3x + \cos \frac{5}{2}x = 2.$

**Решение.**

Так как  $|\cos 3x| \leq 1$  и  $|\cos \frac{5}{2}x| \leq 1$ , то  $\cos 3x + \cos \frac{5}{2}x = 2$

в том случае, когда оба слагаемых одновременно равны 1.

Следовательно, данное уравнение равносильно

системе уравнений

$$\begin{cases} \cos 3x = 1 \\ \cos \frac{5}{2}x = 1 \end{cases}$$

решая  
имеем

которые  $x = 4\pi k, k \in Z.$

**Ответ:**  $x = 4\pi k, k \in Z.$

**Пример 7.** Решить

уравнение

$$\left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right) \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 2y) \cdot (3 + \sin 3z) = 4.$$

**Решение.** Очевидно, что  $\left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right) \geq 2,$

$(1 + \operatorname{tg}^2 2y) \geq 1$   $(3 + \sin 3z) \geq 2.$  Заметим, что перемножив почленно эти неравенства, получаем:

$$\left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right) \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 2y) \cdot (3 + \sin 3z) \geq 4.$$

Следовательно, левая часть равна правой, лишь при условии:

$$\cos^2 x = 1, \operatorname{tg}^2 2y = 0, \sin 3z = -1$$

Значит, данное

уравнение

равносильно системе

уравнений:

$$\begin{cases} \cos^2 x = 1 \\ \operatorname{tg}^2 2y = 0 \\ \sin 3z = -1 \end{cases}$$

Решая систему уравнений, получаем корни:

$$\text{Ответ: } x = \pi m, m \in Z; \quad y = \frac{\pi}{2} k, k \in Z; \quad z = -\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3} \pi l, l \in Z$$



**Пример 8.** Решите уравнение

$$\cos^2(x \cdot \sin x) = 1 + \log_5^2 \sqrt{x^2 + x + 1}.$$

**Решение.** Для решения уравнения оценим его части:

$$\cos^2(x \cdot \sin x) \leq 1, \quad 1 + \log_5^2 \sqrt{x^2 + x + 1} \geq 1.$$

Поэтому равенство возможно только при условии

Сначала решим второе уравнение:

$$\begin{cases} \cos^2(x \cdot \sin x) = 1 \\ 1 + \log_5^2 \sqrt{x^2 + x + 1} = 1 \end{cases}$$

$$\log_5^2 \sqrt{x^2 + x + 1} = 0, \quad \sqrt{x^2 + x + 1} = 1, \quad x^2 + x + 1 = 1, \quad x^2 + x = 0.$$

Корни этого уравнения  $x_1 = 0$  и  $x_2 = -1$ .

Проверим справедливость первого равенства, подставив эти корни.

При  $x = 0$  получаем:  $\cos^2(0 \cdot \sin 0) = \cos^2 0 = 1$  (верное равенство).

При  $x = -1$  имеем:  $\cos^2(-1 \cdot \sin(-1)) = \cos^2(\sin 1) \neq 1$  (неверное равенство).

Итак, данное уравнение имеет единственный корень  $x = 0$ .

**Ответ: 0.**

**Пример 9.** Найти все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $4^{49x^2-70x+26} = \cos 14\pi x - 81a^2 - 72a - 13$  имеет решения. Найдите эти решения.

**Решение.** Перепишем уравнение в виде

$$4^{(7x-5)^2+1} = 3 + \cos(14\pi x) - (9a+4)^2.$$

При всех значениях  $x$   $(7x-5)^2+1 \geq 1 \Rightarrow 4^{(7x-5)^2+1} \geq 4.$

При всех значениях  $x$   $\cos 14\pi x \leq 1 \quad (9a+4)^2 \geq 0.$

выражения

Поэтому  $3 + \cos 14\pi x - (9a+4)^2 \leq 3+1=4.$

Следовательно, левая часть уравнения не меньше 4, а правая часть – не больше 4. Получаем систему:

$$\begin{cases} 4^{(7x-5)^2+1} = 4, \\ 3 + \cos 14\pi x - (9a+4)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (7x-5)^2 = 0, \\ \cos 14\pi x = 1, \\ (9a+4)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{7}, \\ a = -\frac{4}{9}. \end{cases}$$

**Ответ:**  $x = \frac{5}{7}$  при  $a = -\frac{4}{9}.$