Государственное Бюджетное

Образовательное Учреждение

Лицей №1523 г.Москвы

Геометрия

8 класс

Теоретический материал

© Хомутова Лариса Юрьевна

Крайко Мария Александровна

Тема 2: Четырехугольники.

Прямоугольник

Ромб

Квадрат

1. Прямоугольник

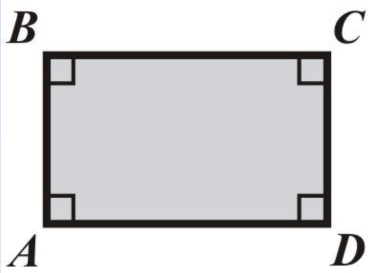


Рисунок 25

Прямоугольником называется параллелограмм, все углы которого прямые (рисунок 25).

<u>Замечание 1:</u> Если в параллелограмме есть хотя бы один прямой угол, то все остальные его углы тоже прямые, а значит, параллелограмм с прямым углом является прямоугольником.

<u>Замечание 2:</u> Поскольку прямоугольник является параллелограммом, он обладает всеми свойствами параллелограмма. В частности, противоположные стороны прямоугольника равны, а диагонали точкой пересечения делятся пополам.

Прямоугольник обладает также особым свойством:
<u>Свойство диагоналей прямоугольника:</u> Диагонали прямоугольника равны (рисунок 26).

Дано:

ABCD – прямоугольник.
Доказать: *AC*=*BD*.

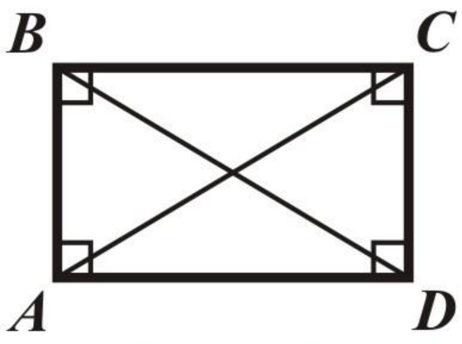


Рисунок 26

Доказательство:
$\Delta BAD = \Delta CDA$ по двум катетам
(*AD* – общий, *AB*=*CD* по свойству п/г), $\Rightarrow$
BD=*AC*.

<u>Признак прямоугольника:</u> Если диагонали параллелограмма равны, то он является прямоугольником (рисунок 27).

Дано:

$ABCD$ – п/г; $AC=BD$.

Доказать:

$ABCD$ - прямоугольник.

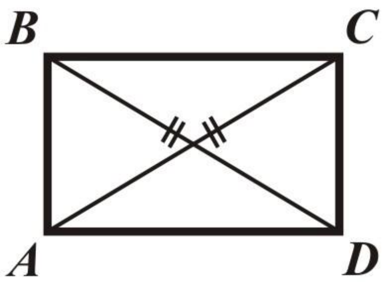


Рисунок 27

Доказательство:

1.$\Delta BAD=\Delta CDA$ по трем сторонам (AD – общая, $AB=CD$ по свойству п/г, $AC=BD$ по условию), $\Rightarrow$ $\angle A=\angle D$.

2.$\angle A+\angle D=180°$ как внутр. о/с при $AB||CD$ и секущей AD; $\Rightarrow$ $\angle A=\angle D=180°:2=90°$.

По свойству п/г $\angle C=\angle A=90°$, $\angle B=\angle D=90°$, $\Rightarrow$ $ABCD$ – прямоугольник по определению.

2.Ромб

Ромбом называется параллелограмм, все стороны которого равны (рисунок 28).

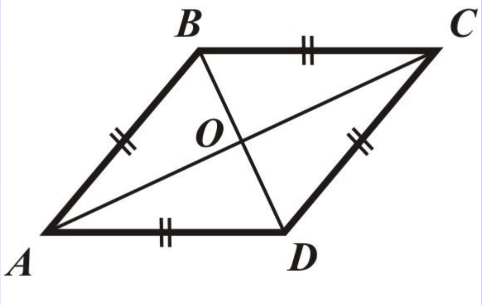


Рисунок 28

<u>Замечание 1:</u> Если у четырехугольника все стороны равны, то он является параллелограммом по признаку противоположных сторон, а значит, является параллелограммом, все стороны которого равны. Таким образом, ромбом можно назвать четырехугольник, все стороны которого равны.

<u>Замечание 2:</u> Поскольку ромб является параллелограммом, он обладает всеми свойствами параллелограмма. В частности, у ромба попарно равны противоположные углы, а диагонали точкой пересечения делятся пополам.

Особое свойство ромба:

<u>**Свойство ромба:**</u> Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и являются биссектрисами его углов (рисунок 28).

Дано:

ABCD – ромб.

Доказать: $AC \perp BD$;

AC – биссектриса углов *A* и *C*;

BD – биссектриса углов *B* и *D*.

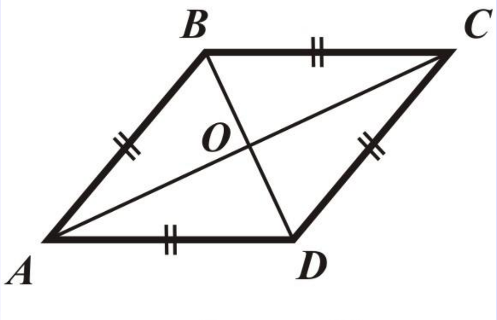


Рисунок 28

Доказательство:

1.Обозначим $O = AC \cap BD$.

2.По определению ромба $AB = AD$, $\Rightarrow \Delta ABD$ – р/б.

3.По свойству п/г $BO = OD$, $\Rightarrow$ *AO* – медиана ΔABD, $\Rightarrow$ по свойству медианы р/б Δ-ка *AO* – его биссектриса и высота. А значит, $AC \perp BD$, и *AC* – биссектриса угла *A*.

Аналогично доказывается, что *AC* – биссектриса угла *C*, а *BD* – биссектриса углов *B* и *D*.

Признак ромба по взаимно перпендикулярным диагоналям:

Если диагонали параллелограмма взаимно перпендикулярны, то этот параллелограмм – ромб (рисунок 29).

Дано:

$ABCD$ – п/г;

$AC \perp BD$.

Доказать:

$ABCD$ – ромб.

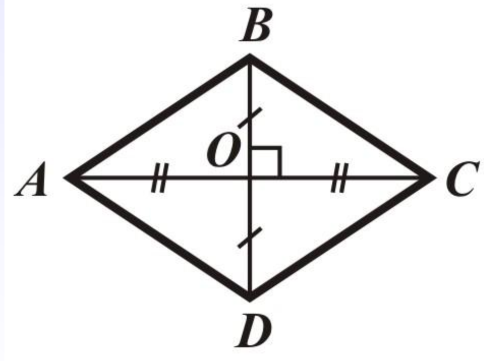


Рисунок 29

Доказательство:

1.Обозначим $O=AC \cap BD$.

2.Поскольку $ABCD$ – п/г, $AO=OC$ по свойству диагоналей п/г.

3.BO – высота и медиана ΔABC, $\Rightarrow$ ΔABC - р/б по признаку, $\Rightarrow$ $AB=BC$.

По свойству противоположных сторон п/г $AB=CD$, $BC=AD$. Таким образом, $CD=AB=BC=AD$, то есть все стороны п/г $ABCD$ равны, $\Rightarrow$ $ABCD$ – ромб.

Признак ромба по диагонали: Если диагональ параллелограмма является биссектрисой его угла, то этот параллелограмм – ромб (рисунок 30).

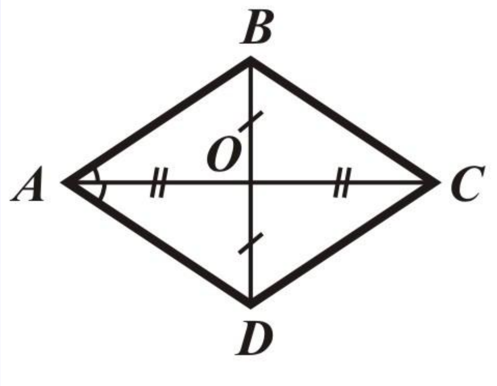


Рисунок 30

Дано:

$ABCD$ – п/г;

AC – биссектриса $\angle A$.

Доказать:

$ABCD$ – ромб.

Доказательство:

1.Обозначим $O=AC\cap BD$.

2.Поскольку $ABCD$ – п/г, $AO=OC$ по свойству диагоналей п/г.

3.AO – биссектриса и медиана ΔABD, $\Rightarrow$ ΔABD - р/б по признаку, $\Rightarrow$ $AB=AD$.

4.По свойству противоположных сторон п/г $AB=CD$, $BC=AD$. Таким образом, $CD=AB=AD=BC$, то есть все стороны п/г $ABCD$ равны, $\Rightarrow$ $ABCD$ – ромб. #

3. Квадрат

Квадратом называется прямоугольник, все стороны которого равны (рисунок 31).

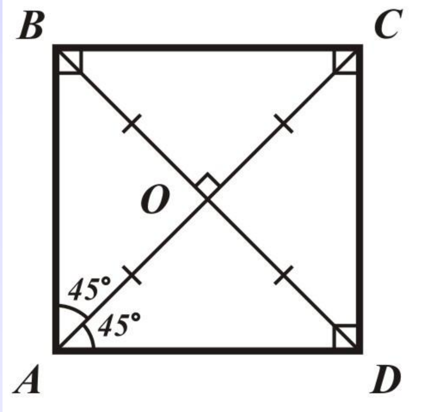


Рисунок 31

<u>Замечание:</u> Квадрат является и параллелограммом, и прямоугольником, и ромбом, поэтому сочетает в себе все их свойства. В частности, диагонали квадрата равны, точкой пересечения делятся пополам, взаимно перпендикулярны и являются биссектрисами его углов (рисунок 31).

4. Медиана прямоугольного треугольника

<u>Свойство медианы прямоугольного треугольника:</u> Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна ее половине (рисунок 32).

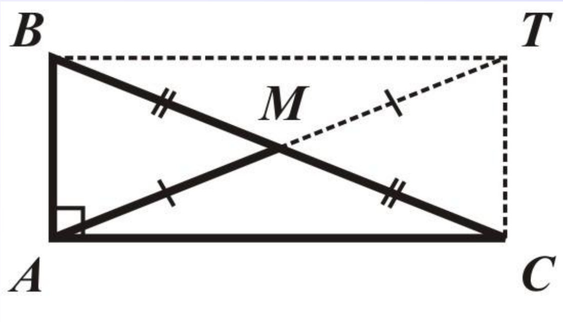


Рисунок 32

Дано:

ΔABC - п/у;

$\angle A=90°$;

AM – медиана ΔABC.

Доказать:

$AM=MB=MC$.

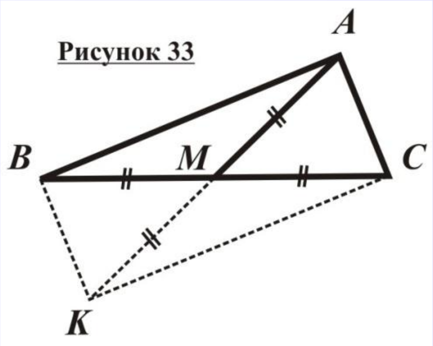
Доказательство:

1.Отложим на луче AM отрезок $MT=AM$ и соединим точки B, T и C (рисунок 32).

2.$BM=MC$ по условию, $AM=MT$ по построению, $\Rightarrow$ $ABTC$ - п/г по признаку. Но поскольку $\angle A=90°$, $ABTC$ – прямоугольник.

По св-ву прямоугольника $AT=BC$, $\Rightarrow$ $AM=AT:2=BC:2=BM=MC$.

Признак прямоугольного треугольника по медиане: Если медиана треугольника равна половине той стороны, к которой она проведена, то этот треугольник – прямоугольный, причем медиана проведена из вершины прямого угла (рисунок 33).



Дано:

ΔABC;

AM – медиана

ΔABC;

$AM=BC/2$.

Доказать:

$\angle A=90°$.

Доказательство:

1.Отложим на луче AM отрезок $MK=AM$ и соединим точки B, K и C (рисунок 33).

2.$BM=MC$ по условию, $AM=MK$ по построению, $\Rightarrow$ $ABKC$ - п/г по признаку.

$BM=MC=AM=MK$, $\Rightarrow$ $BC=AK$, $\Rightarrow$ $ACKB$ – прямоугольник по признаку. Тогда по определению прямоугольника $\angle A=90°$.