

**Государственное Бюджетное
Образовательное Учреждение
Лицей №1523 г.Москвы**

Геометрия

8 класс

Теоретический материал

**© Хомутова Лариса Юрьевна
Крайко Мария Александровна**

Тема 2: Четырехугольники.

Прямоугольник

Ромб

Квадрат

1. Прямоугольник

Прямоугольником называется параллелограмм, все углы которого прямые (рисунок 25).

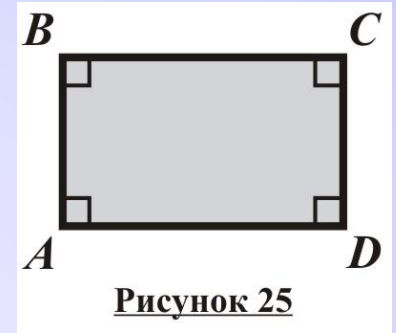


Рисунок 25

Замечание 1: Если в параллелограмме есть хотя бы один прямой угол, то все остальные его углы тоже прямые, а значит, параллелограмм с прямым углом является прямоугольником.

Замечание 2: Поскольку прямоугольник является параллелограммом, он обладает всеми свойствами параллелограмма. В частности, противоположные стороны прямоугольника равны, а диагонали точкой пересечения делятся пополам.

Прямоугольник обладает также особым свойством:

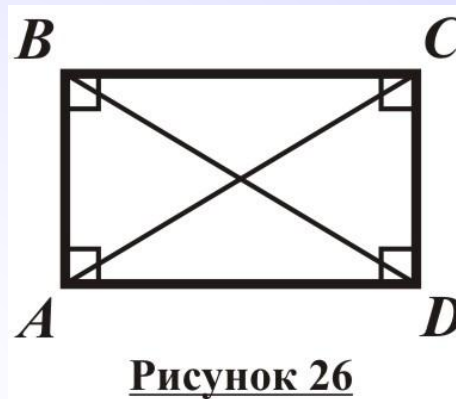
Свойство диагоналей прямоугольника: Диагонали
прямоугольника равны (рисунок 26).

Дано:

$ABCD$ –

прямоугольник.

Доказать: $AC=BD$.



Доказательство:

$\triangle BAD = \triangle CDA$ по двум катетам

(AD – общий, $AB=CD$ по свойству п/г), \Rightarrow

$BD=AC$.

Признак прямоугольника: Если диагонали параллелограмма равны, то он является прямоугольником (рисунок 27).

Дано:

$ABCD$ – п/г; $AC=BD$.

Доказать:

$ABCD$ - прямоугольник.

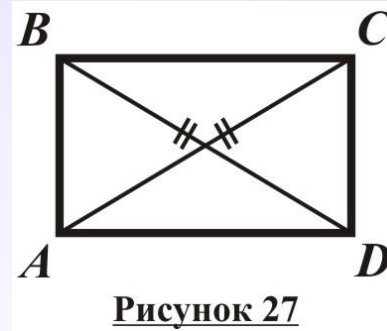


Рисунок 27

Доказательство:

1. $\triangle BAD = \triangle CDA$ по трем сторонам (AD – общая, $AB=CD$ по свойству п/г, $AC=BD$ по условию), $\Rightarrow \angle A = \angle D$.

2. $\angle A + \angle D = 180^\circ$ как внутр. о/с при $AB \parallel CD$ и секущей AD ; $\Rightarrow \angle A = \angle D = 180^\circ : 2 = 90^\circ$.

По свойству п/г $\angle C = \angle A = 90^\circ$,
 $\angle B = \angle D = 90^\circ$, $\Rightarrow ABCD$ – прямоугольник по определению.

2.Ромб

Ромбом называется параллелограмм, все стороны которого равны (рисунок 28).

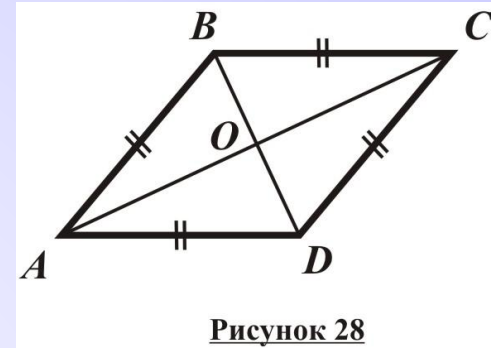


Рисунок 28

Замечание 1: Если у четырехугольника все стороны равны, то он является параллелограммом по признаку противоположных сторон, а значит, является параллелограммом, все стороны которого равны. Таким образом, ромбом можно назвать четырехугольник, все стороны которого равны.

Замечание 2: Поскольку ромб является параллелограммом, он обладает всеми свойствами параллелограмма. В частности, у ромба попарно равны противоположные углы, а диагонали точкой пересечения делятся пополам.

Особое свойство ромба:

Свойство ромба: Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и являются биссектрисами его углов (рисунок 28).

Дано:

$ABCD$ – ромб.

Доказать: $AC \perp BD$;

AC – биссектриса углов A и C ;

BD – биссектриса углов B и D .

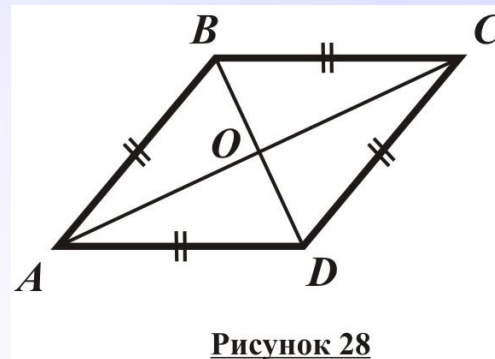


Рисунок 28

Доказательство:

1. Обозначим $O = AC \cap BD$.

2. По определению ромба $AB = AD$, $\Rightarrow \triangle ABD$ – р/б.

3. По свойству п/г $BO = OD$, $\Rightarrow AO$ – медиана $\triangle ABD$,
 \Rightarrow по свойству медианы р/б \triangle -ка AO – его
биссектриса и высота. А значит, $AC \perp BD$, и AC –
биссектриса угла A .

Аналогично доказывается, что AC – биссектриса угла C , а BD – биссектриса углов B и D .

Признак ромба по взаимно перпендикулярным диагоналям:

Если диагонали параллелограмма взаимно перпендикулярны, то этот параллелограмм – ромб (рисунок 29).

Дано:

$ABCD$ – п/г;

$AC \perp BD$.

Доказать:

$ABCD$ – ромб.

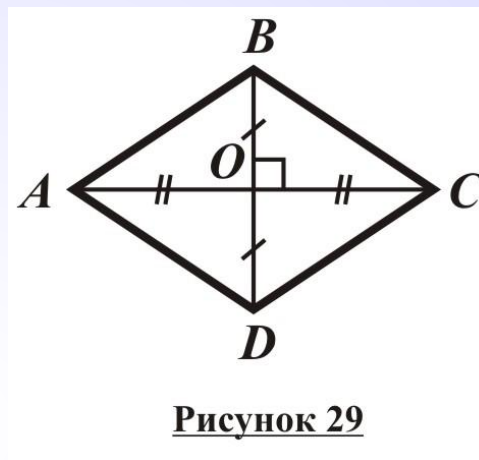


Рисунок 29

Доказательство:

1. Обозначим $O = AC \cap BD$.

2. Поскольку $ABCD$ – п/г, $AO = OC$ по свойству диагоналей п/г.

3. BO – высота и медиана $\triangle ABC$, $\Rightarrow \triangle ABC$ – р/б по признаку, $\Rightarrow AB = BC$.

По свойству противоположных сторон п/г $AB = CD$, $BC = AD$. Таким образом, $CD = AB = BC = AD$, то есть все стороны п/г $ABCD$ равны, $\Rightarrow ABCD$ – ромб.

Признак ромба по диагонали: Если диагональ параллелограмма является биссектрисой его угла, то этот параллелограмм – ромб (рисунок 30).

Дано:

$ABCD$ – п/г;
 AC – биссектриса

$\angle A$.

Доказать:

$ABCD$ – ромб.

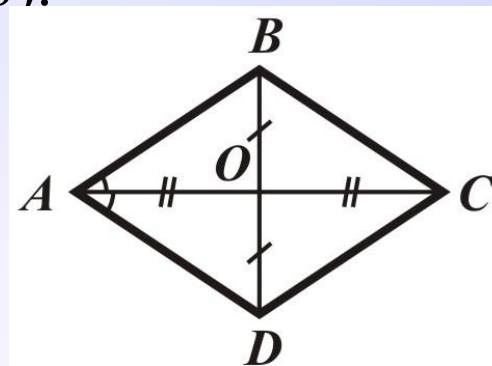


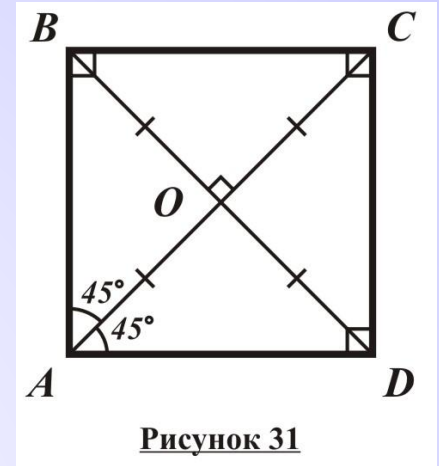
Рисунок 30

Доказательство:

1. Обозначим $O = AC \cap BD$.
2. Поскольку $ABCD$ – п/г, $AO = OC$ по свойству диагоналей п/г.
3. AO – биссектриса и медиана $\triangle ABD$, $\Rightarrow \triangle ABD$ – р/б по признаку, $\Rightarrow AB = AD$.
4. По свойству противоположных сторон п/г $AB = CD$, $BC = AD$. Таким образом, $CD = AB = AD = BC$, то есть все стороны п/г $ABCD$ равны, $\Rightarrow ABCD$ – ромб. #

3. Квадрат

Квадратом называется прямоугольник, все стороны которого равны (рисунок 31).



Замечание: Квадрат является и параллелограммом, и прямоугольником, и ромбом, поэтому сочетает в себе все их свойства. В частности, диагонали квадрата равны, точкой пересечения делятся пополам, взаимно перпендикулярны и являются биссектрисами его углов (рисунок 31).

4. Медиана прямоугольного треугольника

Свойство медианы прямоугольного треугольника: Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна ее половине (рисунок 32).

Дано:

$\triangle ABC$ - п/у;

$\angle A = 90^\circ$;

AM – медиана $\triangle ABC$.

Доказать:

$AM = MB = MC$.

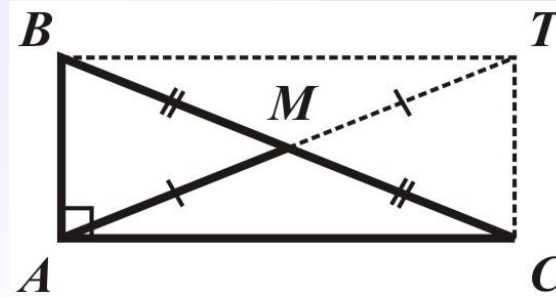


Рисунок 32

Доказательство:

1. Отложим на луче AM отрезок $MT = AM$ и соединим точки B , T и C (рисунок 32).

2. $BM = MC$ по условию, $AM = MT$ по построению, $\Rightarrow ABTC$ - п/г по признаку. Но поскольку $\angle A = 90^\circ$, $ABTC$ – прямоугольник.

По св-ву прямоугольника $AT = BC$, $\Rightarrow AM = AT : 2 = BC : 2 = BM = MC$.

Признак прямоугольного треугольника по медиане: Если медиана треугольника равна половине той стороны, к которой она проведена, то этот треугольник – прямоугольный, причем медиана проведена из вершины прямого угла (рисунок 33).

Дано:

$\triangle ABC$;

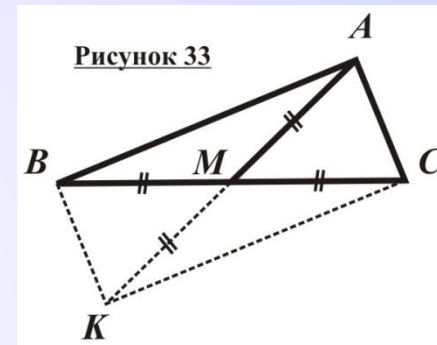
AM – медиана

$\triangle ABC$;

$AM = BC/2$.

Доказать:

$\angle A = 90^\circ$.



Доказательство:

1. Отложим на луче AM отрезок $MK = AM$ и соединим точки B , K и C (рисунок 33).

2. $BM = MC$ по условию, $AM = MK$ по построению, \Rightarrow $ABKC$ - п/г по признаку.

$BM = MC = AM = MK$, $\Rightarrow BC = AK$, $\Rightarrow AСКВ$ –

прямоугольник по признаку. Тогда по определению прямоугольника $\angle A = 90^\circ$.