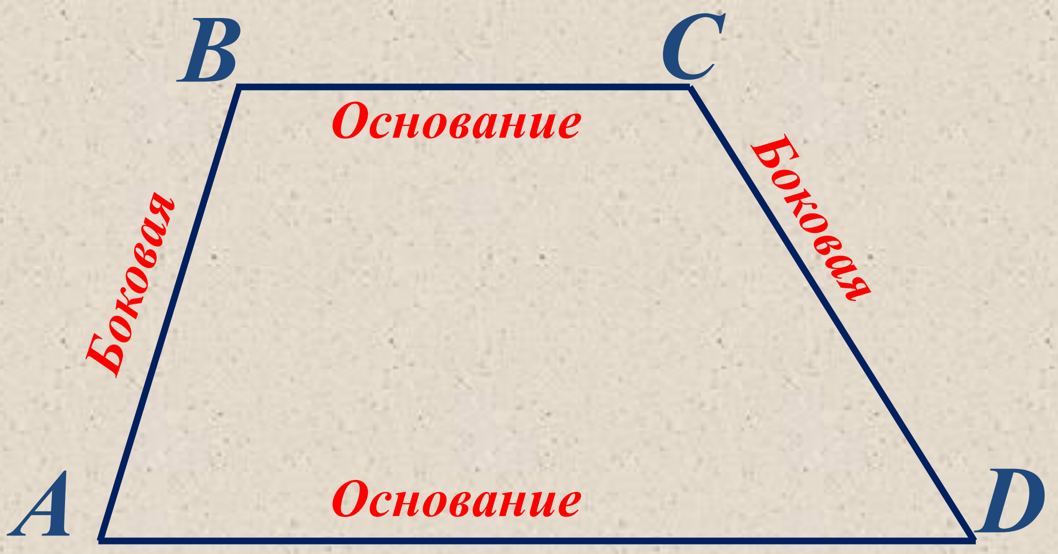
8 класс
Геометрия

Четырехугольники

Трапеция



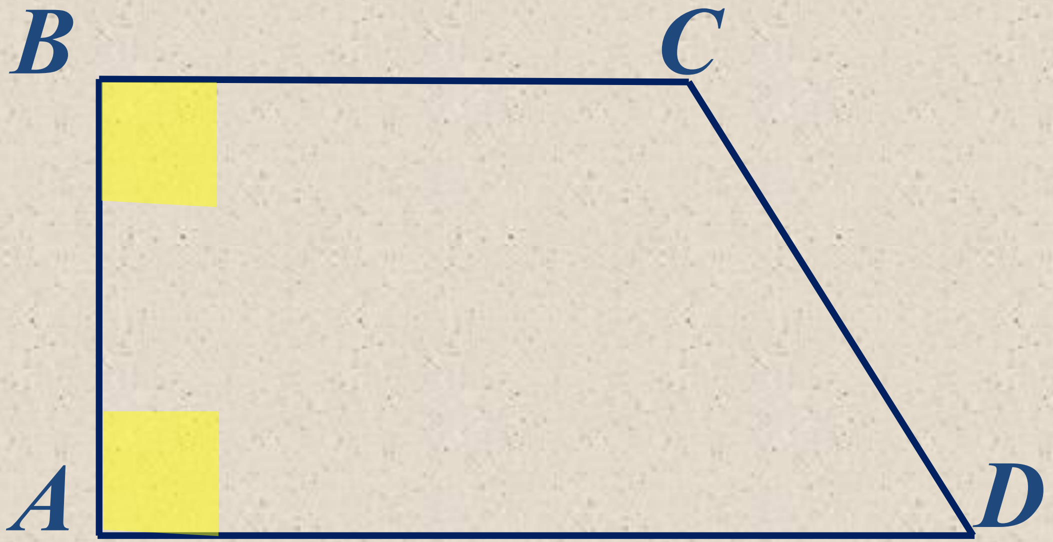
Трапецией называется четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие не параллельны.

ABCD – трапеция, если
BC ∥ AD,
AB и CD – боковые стороны,
BC и AD – основания.

Трапеция называется равнобедренной, если ее боковые стороны равны.

ABCD* – *равнобедренная трапеция, если BC ∥ AD,

AB = CD – боковые стороны.

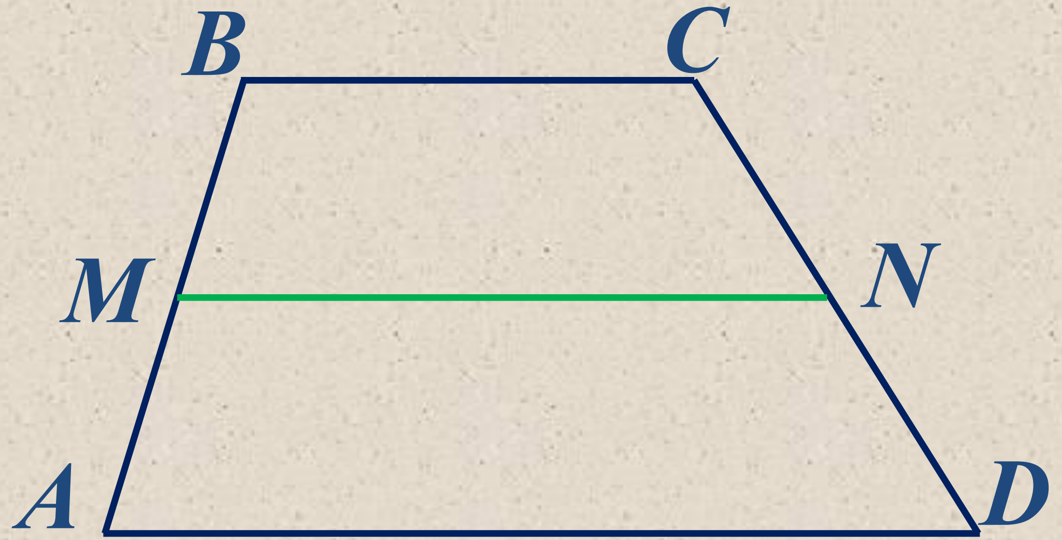


Трапеция называется прямоугольной, если один из углов прямой.

ABCD – прямоугольная трапеция, если

BC ∥ AD,

$\angle A = 90°$ или $\angle B = 90°$.



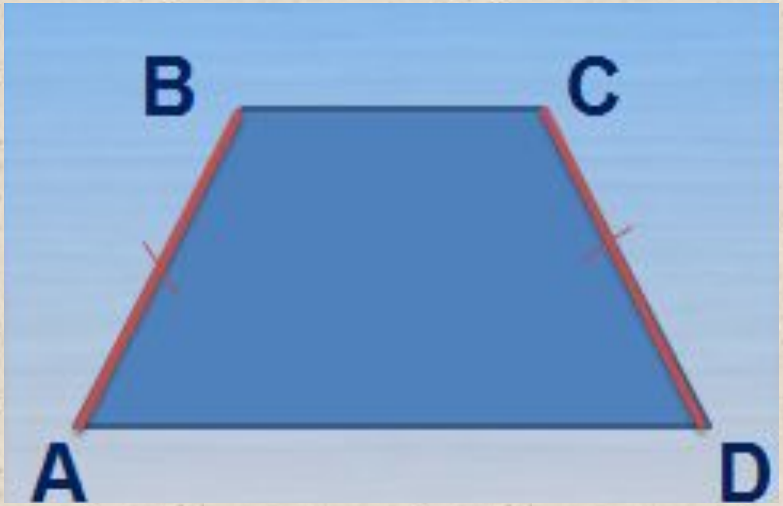
M – середина AB

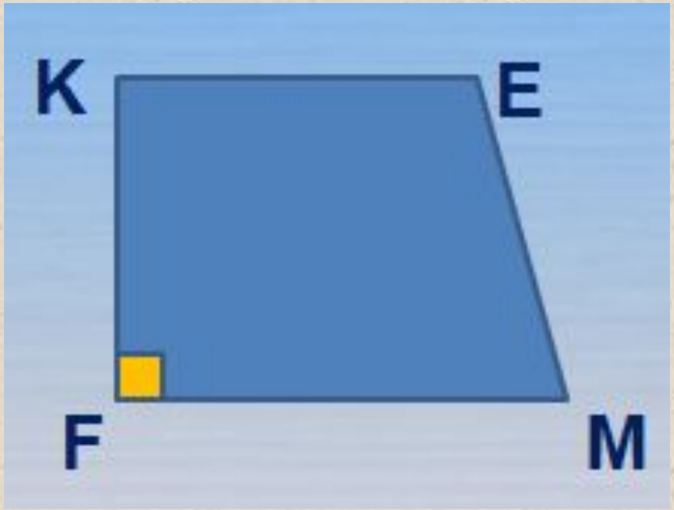
N – середина CD

MN – средняя линия трапеции

$$MN = \frac{BC + AD}{2}$$

Виды трапеции





Равнобокая трапеция
– трапеция
с равными боковыми сторонами.

AB = CD

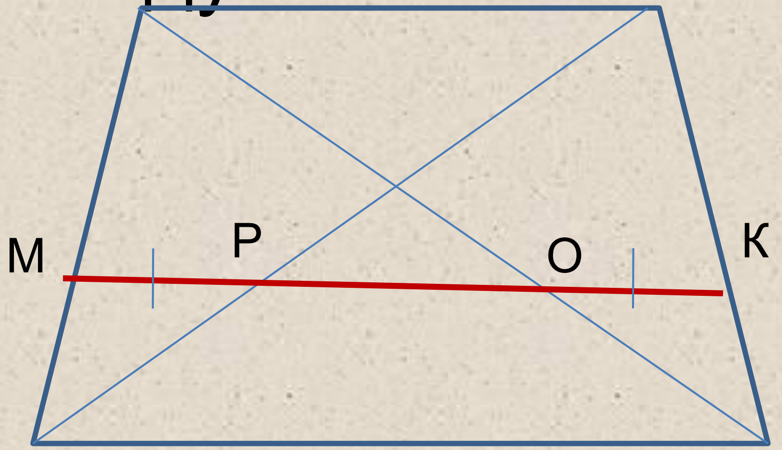
Прямоугольная трапеция
– трапеция,
один из углов которой прямой.

∟F = 90°

Свойства трапеции:

- Отрезок прямой, параллельный основаниям трапеции, заключенный внутри трапеции, разбивается ее диагоналями на три части. Тогда отрезки, прилегающие к боковым сторонам, равны между собой.

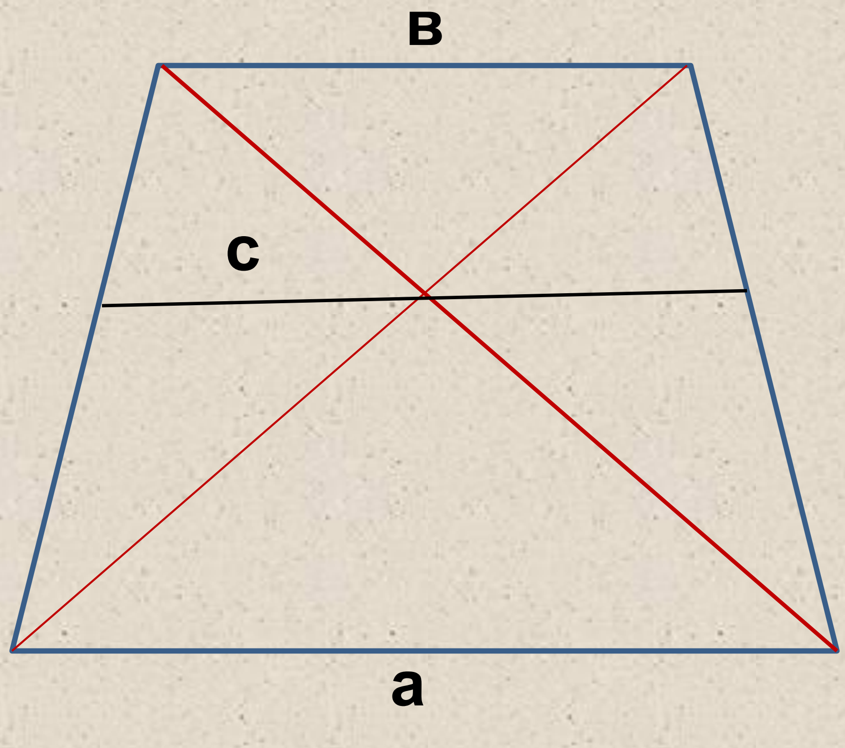
MP=OK



Свойство отрезка, проходящего через точку пересечения диагоналей трапеции.

- Отрезок, параллельный основаниям, проходящий через точку пересечения диагоналей равен:

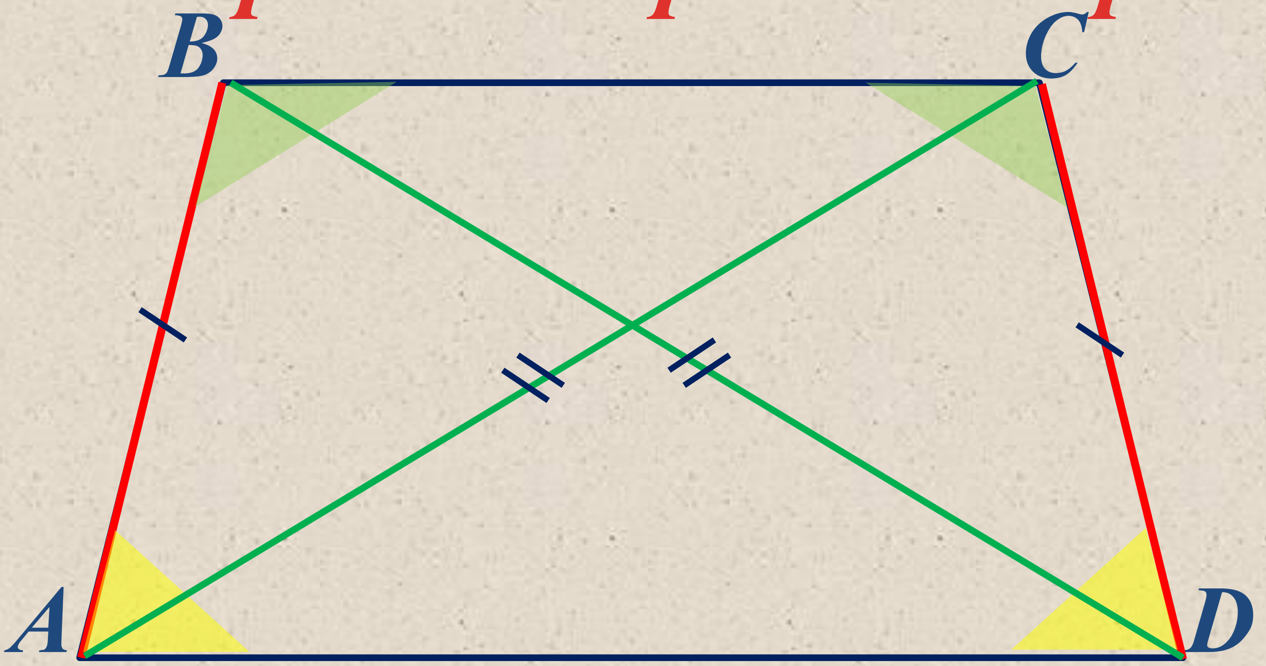
$$c = \frac{2ab}{a + b}$$



СВОЙСТВА БИССЕКТРИСС УГЛОВ ТРАПЕЦИИ

- Биссектрисы углов при боковой стороне трапеции пересекаются под углом 90º .
- Точка пересечения биссектрис трапеции, прилежащих к боковой стороне, лежит на средней линии трапеции.
- Если биссектрисы острых углов трапеции пересекаются в точке, принадлежащей меньшему основанию, то меньшее основание равно сумме боковых сторон трапеции.
- Если биссектрисы тупых углов трапеции пересекаются в точке, принадлежащей большему основанию, то большее основание равно сумме боковых сторон трапеции.

Свойства равнобедренной трапеции



1. В равнобедренной трапеции диагонали равны.

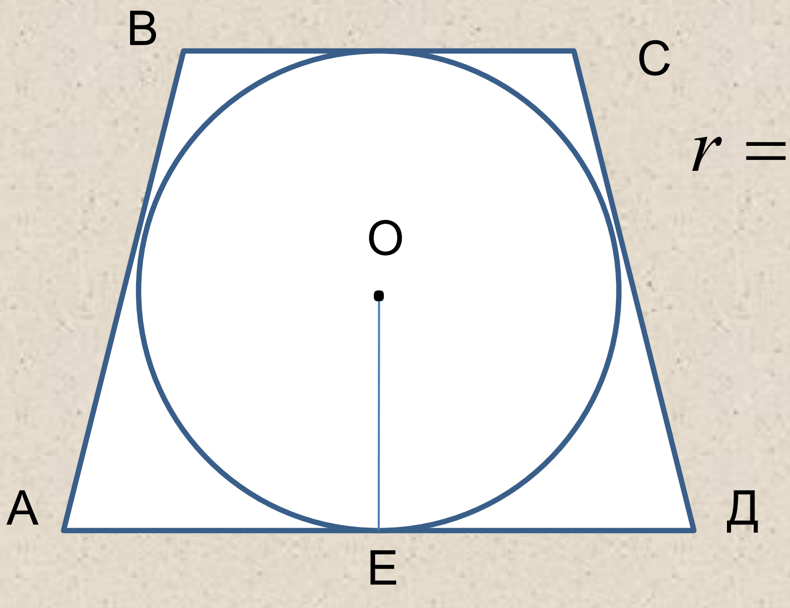
2. В равнобедренной трапеции углы при каждом основании равны.

BD = AC – *диагонали трапеции*

$\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle C$ – *углы при основаниях*

Свойства равнобедренной трапеции:

- Если в трапецию можно вписать окружность, то радиус окружности есть среднее пропорциональное отрезков, на которые точка касания делит боковую сторону.

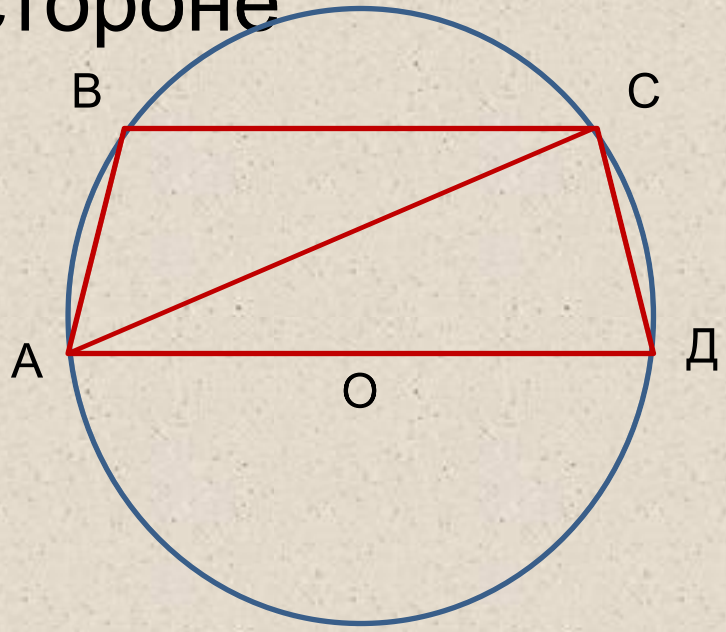


$$r = OE = \sqrt{AE \cdot EД}$$

Свойства равнобедренной трапеции:

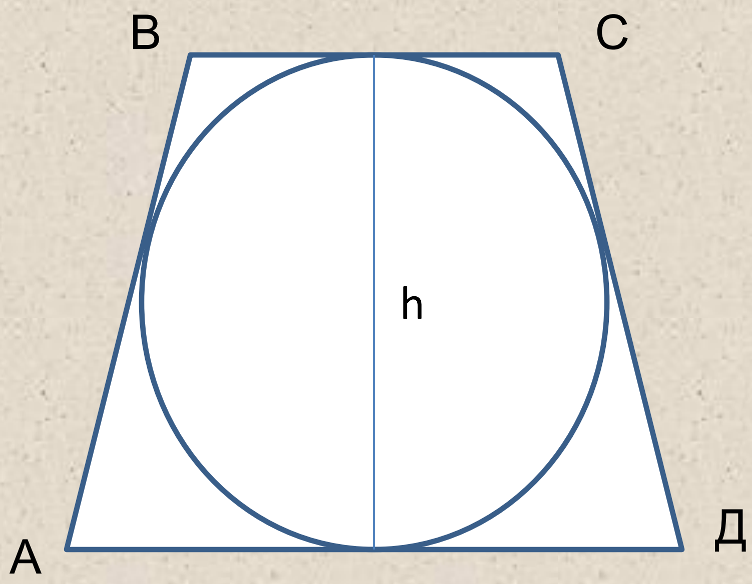
- Если центр описанной окружности лежит на основании трапеции, то её диагональ перпендикулярна боковой стороне

$$AC \perp CД$$



Свойства равнобедренной трапеции:

- В равнобедренную трапецию можно вписать окружность, если боковая сторона равна её средней линии.

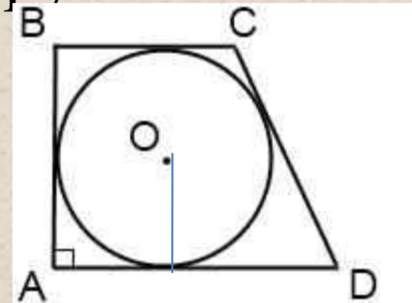


$$AB = \frac{BC + AД}{2}\ ; h = 2r$$

1)Если в условии задачи сказано, что в прямоугольную трапецию вписана окружность, можно использовать следующие свойства:

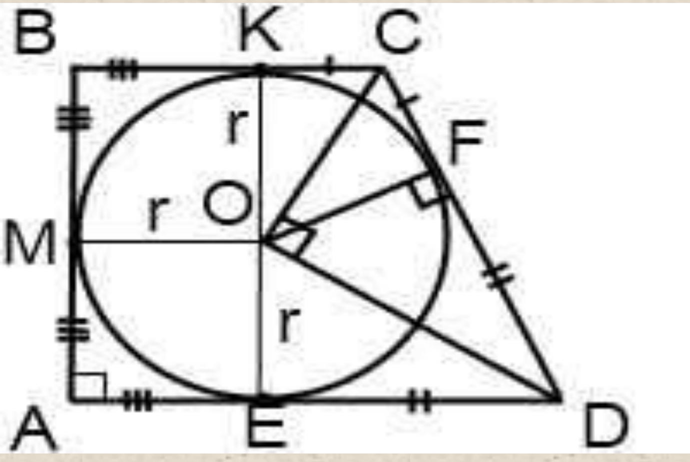
- 1. Сумма оснований трапеции равна сумме боковых сторон.
- 2. Расстояния от вершины трапеции до точек касания вписанной окружности равны.
- 3. Высота прямоугольной трапеции равна ее меньшей боковой стороне и равна диаметру вписанной окружности.
- 4. Центр вписанной окружности является точкой пересечения биссектрис углов трапеции.
- 5. Если точка касания делит боковую сторону на отрезки m и n, то радиус вписанной окружности равен

$$r = \sqrt{mn}$$



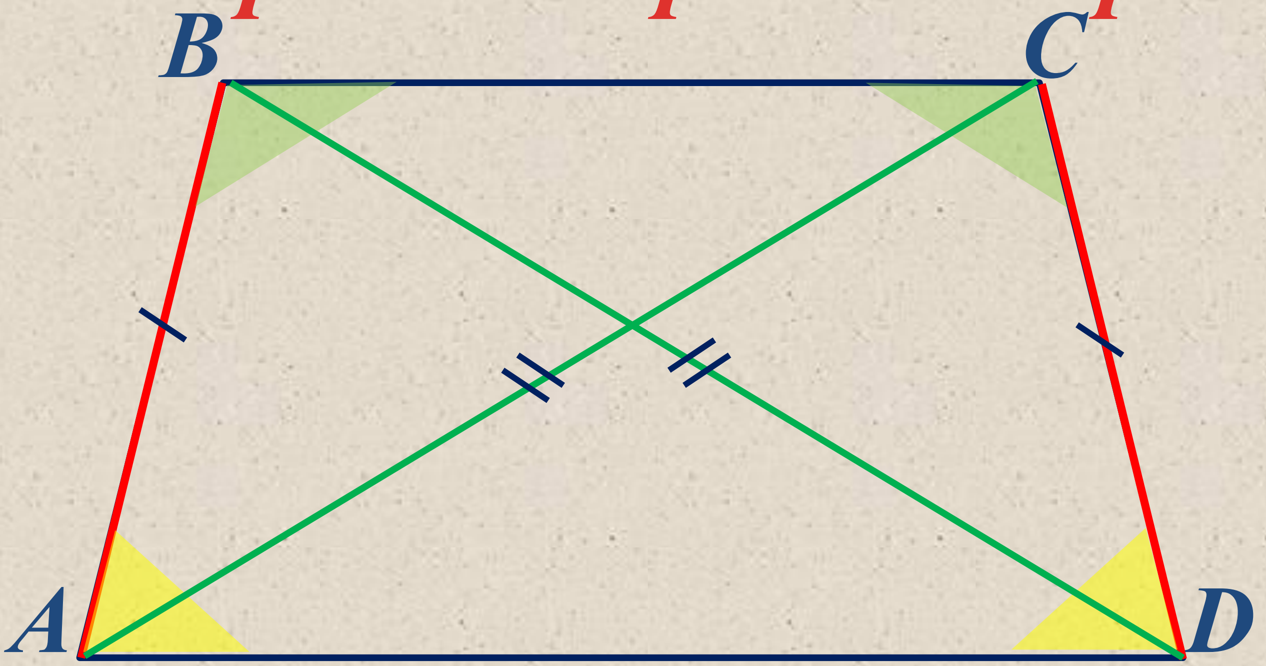
Свойства прямоугольной трапеции, в которую вписана окружность:

- 1) Четырехугольник, образованный центром вписанной окружности, точками касания и вершиной трапеции — квадрат, сторона которого равна радиусу. (AMOE и BKOM — квадраты со стороной r).



- 2) Если в прямоугольную трапецию вписана окружность, то площадь трапеции равна произведению ее оснований: S=AD*BC

Признаки равнобедренной трапеции



1. Если диагонали трапеции равны, то она равнобедренная.

2. Если углы при основании трапеции равны, то она равнобедренная.

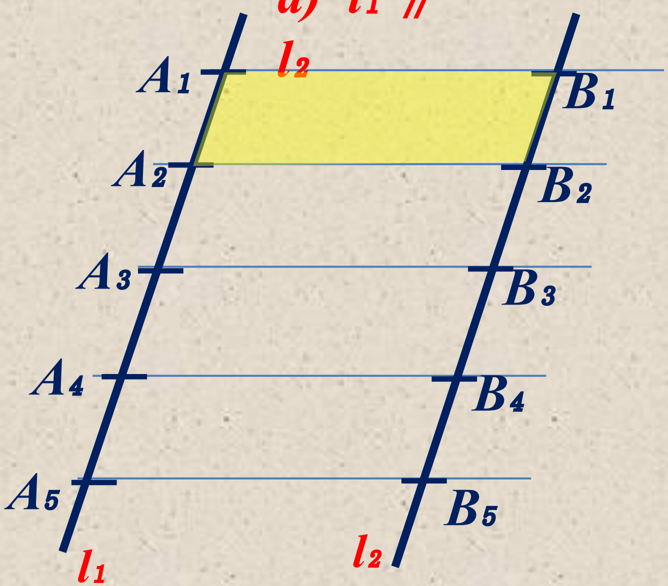
$BD = AC$ – диагонали трапеции

$\angle A = \angle D, \angle B = \angle C$ – углы при основаниях

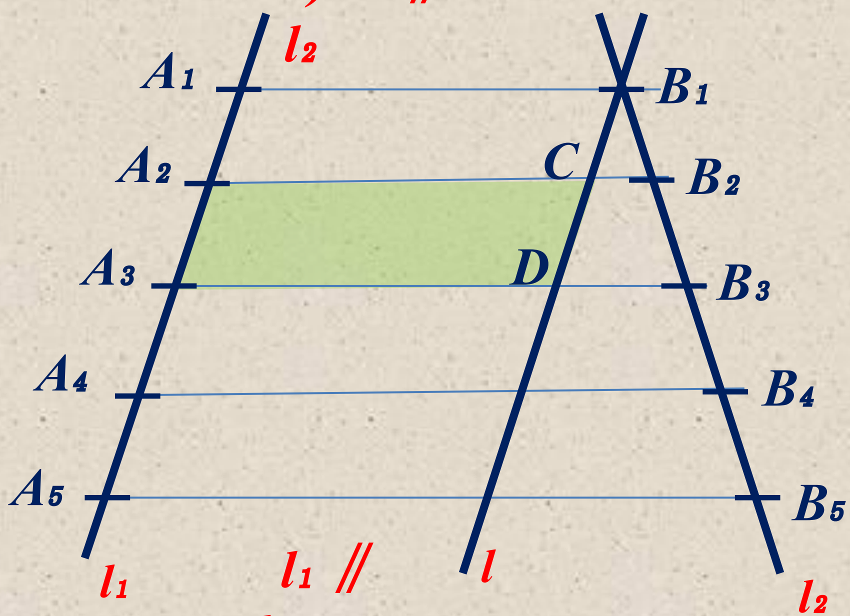
Теорема Фалеса

Если на одной из двух прямых отложить последовательно равных несколько отрезков и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую прямую, то они отсекут на второй прямой равные между собой отрезки.

а) $l_1 \parallel l_2$



б) $l_1 \nparallel l_2$



$A_1A_2B_2B_1$ - параллелограмм

A_2A_3DC - параллелограмм

$A_1A_2 = B_1B_2$

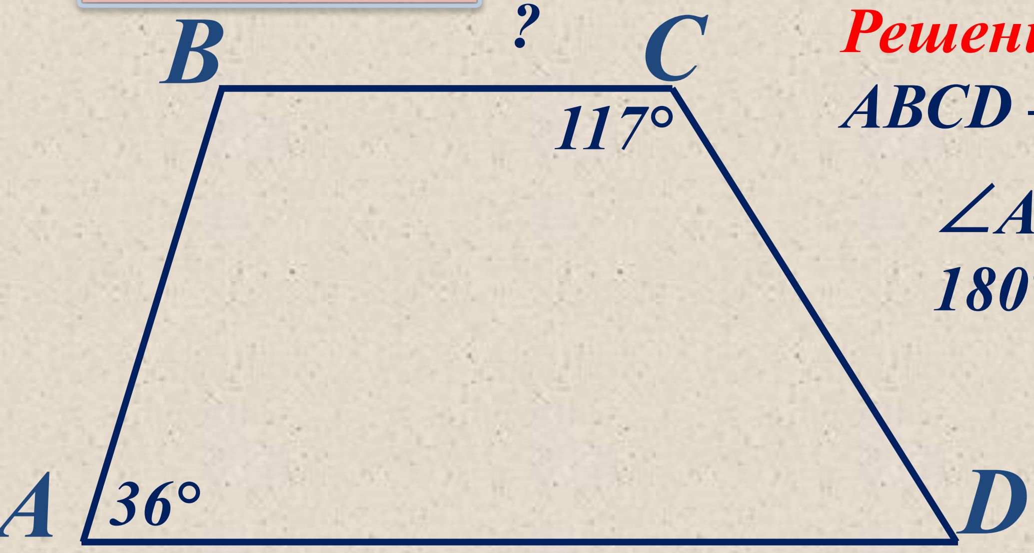
$A_2A_3 = CD$ $\quad$ $A_2A_3 = B_2B_3$

2

Задача

Дано: *ABCD – трапеция, ∠A = 36°, ∠C = 117°*

Найти: *∠B = ?, ∠D = ?*



Решение

ABCD – трапеция, то BC ∥ AD.

∠A + ∠B = 180°

36° + ∠B = 180°

∠B = 180° - 36°

∠B = 144°

∠C + ∠D = 180°

∠117° + ∠D = 180°

∠D = 180° - ∠117°

∠D = 63°

Ответ: *∠B = 144°, ∠D = 63°*

3

Задача

Дано: *ABCD – равнобокая трапеция,* $\angle A = 68°$,

Найти: $\angle B = ?$, $\angle C$ -?, $\angle D = ?$

Решение

Если ABCD – равнобокая трапеция, то $\angle A = \angle D = 68°$,

$\angle 68° + \angle B = 180°$

$\angle B = 180° - \angle 68°$

$\angle B = 112°$

$\angle B = \angle C = 112°$,

Ответ: $\angle D = 68°$, $\angle B = 112°$, $\angle C = 112°$.

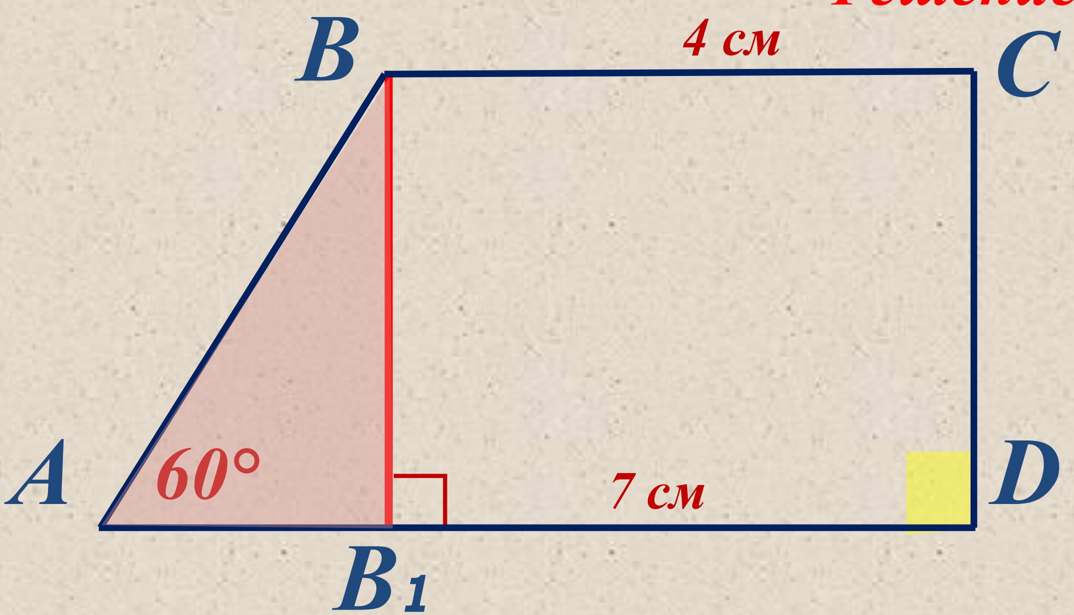
4

Задача

Дано: *ABCD – прямоугольная трапеция,* $\angle D = 90°$, $BC = 4$ *см,* $AD = 7$ *см,* $\angle A = 60°$

Найти: AB - ?

Решение



Проведем $BB_1 \perp AD$

$AB_1 = AD - B_1D$

$AB_1 = 7 - 4 = 3$ *(см)*

Рассмотрим ΔABB_1:

$\angle A = 60°$ *- по условию,*

$\angle B_1 = 90°$ *так как* $BB_1 \perp AD$*, то* $\angle B = 30°$

$AB_1 = \frac{1}{2}AB$ *– по свойству прямоугольного треугольника,*

$AB = 3 \cdot 2 = 6$ *(см).*

Ответ: 6 *(см).*