Числа Бернулли

$$B_0 = 1$$

$$B_2 = \frac{1}{6}$$

$$B_4 = -\frac{1}{30}$$

$$B_8 = -\frac{1}{30}$$

$$B_7 = 0$$

$$B_{10} = \frac{5}{66}$$

$$B_6 = \frac{1}{42}$$

$$B_3 = 0$$

$$B_1 = \frac{1}{2}$$

$$B_5 = 0$$

«Прогресс науки определяется трудами ее ученых и ценностью ее открытий»

Л.Пастер

Числа Бернулли.

«Прогресс науки определяется трудами ее ученых и ценностью их открытий»
Л.Пастер

Теория чисел — раздел математики, занимающийся изучением чисел как таковых так и их свойств и поведения в различных ситуациях.

Как сказал великий математик Пифагор "Все есть число!“

Изучая числа мы изучаем окружающий нас мир и себя в том числе. С древних времен математики пытались постичь тайны удивительного мира чисел. Этот мир привлекает своим многообразием, строгостью и совершенством законов.

Здесь есть «великаны» и есть «карлики», обычные «трудяги» и такие «знаменитости», как π и e.

Но еще более многообразен мир числовых последовательностей.

Здесь и последовательность натуральных чисел и полная глубоких тайн последовательность простых чисел и последовательность “биноминальных коэффициентов”…

В моей работе речь пойдет об одной замечательной последовательности чисел, которую открыл выдающийся швейцарский математик Якоб Бернулли (1654—1705). Последовательность эта играет в математике важную роль, что объясняется ее связью с вопросами суммирования функций, простыми числами, великой теоремой Ферма, а также другими задачами.

Якоб Бернулли

(27 декабря 1654 - 16 августа 1705)

профессор математики Базельского университета (с 1687). Из семьи Бернулли. Отец Бернулли занимал в городе заметное положение, был членом городского суда и членом Большого городского совета.
Отец прочил Якоба в священнослужители, и ему пришлось изучать в университете философию, богословие и языки.

Отец не допускал отступления от намеченного плана, поэтому Якоб вынужден был заниматься математикой тайком, без учителя и почти без учебников.
Обучение в университете шло своим чередом, и в 1671г. он получил степень магистра философии. В 1676 Якоб отправился в длительное путешествие, из которого возвратился только в 1680г. Он посетил некоторые города Швейцарии, Италию, Францию.

По возвращении в Базель Якоб опубликовал в 1681 и 1682 две работы: одна содержала рассуждения о природе комет, другая - о тяжести эфира. Наиболее значительные достижения Якоба I в развитии анализа бесконечно малых, теории рядов, вариационного исчисления и теории вероятностей.
В 1687, ознакомившись с первым мемуарам Г.Лейбница по дифференциальному исчислению (1684), применил новые идеи к изучению свойств ряда кривых: логарифмические спирали, открытой им лемнискаты, цепной линии и др.
В труде "Искусство предложения" Якоб I в 1713 решил некоторые задачи комбинаторики; открыл числа, позднее названные числа Бернулли; доказал так называемую теорему Бернулли - частный случай закона больших чисел, имеющего большое значение в теории вероятностей и ее приложениях к статистике; построил математическую модель для описания серии независимых испытаний (схема Бернулли). Благодаря его работам теория вероятностей приобрела важнейшее значение в практической деятельности.

Династия Бернулли

БЕРНУЛЛИ - династия швейцарских ученых родом из Антверпена, бежавших из города после захвата его испанцами и поселившихся в 1622 году в Базеле.

По крайней мере восемь ее представителей оставили заметный след в истории точных наук.

Среди академиков Петербургской Академии наук — пятеро представителей семьи Бернулли.

Примечательно не то, что это семейство сделало ряд значимых открытий в разных областях науки, а то, что они, за исключением только некоторых членов семьи, были как-либо связаны с наукой, в частности с математикой

Якоб (1598-1634)

Николай (1623-1708)

Якоб I (1654-1705)

Николай

Николай(1662-1716)

Николай I (1687-1759)

Иоганн I (1667-1748)

Николай II (1695-1726)

Иоганн II (1710-1790)

Якоб II (1759-1789)

Иоганн III (1744-1807)

Даниил II(1751-1834)

Кристоф(1782-1863)

Иоганн-Густав(1811-1863)

Даниил I (1700-1782)

Жером(1669-1760)

Многие их открытия даже сейчас кажутся нам нереальными, недоказуемыми, но и как все гениальное – простыми.

Запись чисел.

Натуральные числа возникли в глубокой древности как результат счета различных предметов: людей, животных, птиц, деревьев, орудий труда и т.д. Ряд натуральных чисел:

1, 2, 3, 4, 5, …

является бесконечным и называется натуральным рядом.

При изучении свойств чисел Я. Бернулли встретился с суммированием степеней натуральных чисел

Эти вопросы интересовали математиков и ранее. Я. Бернулли составил таблицу фигурных чисел, указал их свойства и на основании отмеченных свойств нашел формулы для сумм степеней натуральных чисел. Он привел формулы для сумм от S(n) до S(n10):

$$S_1\ (n)=1^1+2^1+3^1+\ldots n^1$$

$$S_2\ (n)=1^2+2^2+3^2+\ldots n^2$$

$$S_3\ (n)=1^3+2^3+3^3+\ldots n^3$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$S_k\ (n)=1^k+2^k+3^k+\ldots n^k$$

$$S_{10}(1000)=1^{10}+2^{10}+3^{10}+\ldots 1000^{10}$$

Найдем обобщенную формулу для вычисления этих сумм.

1) Обозначим эти суммы следующим символом: S.

2) Возведем числа (от первого числа до числа n) этих сумм в степень.

3) С помощью разложения:

$$(a+b)^k = a^k + C_k^1 a^{k-1} b + C_k^2 a^{k-2} b^2 + \ldots + C_k^{k-1} a b^{k-1} + b^k$$

Которое мы получили при последовательном возведении двучлена (бинома) a+b первую, вторую, третью, … степени

$$a+b=1\cdot a+1\cdot b$$

$$(a+b)^2=1\cdot a^2+2\cdot ab+1\cdot b^2$$

$$(a+b)^3=1\cdot a^3+3\cdot a^2b+3\cdot ab^2+1\cdot b^3$$

$$(a+b)^4=1\cdot a^4+4\cdot a^3b+6\cdot a^2b^2+4\cdot ab^3+1\cdot b^4$$

напишем тождество:

$$(a-1)^{k+1} - a^{k+1} = -C_{k+1}^1 a^k + C_{k+1}^2 a^{k-1} + \ldots + (-1)^k C_{k+1}^k a + (-1)^{k+1}$$

4) предположим, что a=1 тогда,

$$-(1)^{k+1}=-C_{k+1}^{1}(1)^{k}+C_{k+1}^{2}(1)^{k-1}+\ldots+(-1)^{k}C_{k+1}^{k}1+(-1)^{k+1}$$

Аналогично подставляем следующие числа до числа n.

$$1^{k+1}-(2)^{k+1}=-C_{k+1}^{1}2^{k}+C_{k+1}^{2}2^{k-1}+\ldots+(-1)^{k}C_{k+1}^{k}2+(-1)^{k+1}$$

$$2^{k+1}-3^{k+1}=-C_{k+1}^{1}3^{k}+C_{k+1}^{2}3^{k-1}+\ldots+(-1)^{k}C_{k+1}^{k}3+(-1)^{k+1}$$

$$(n-1)^{k+1}-n^{k+1}=-C_{k+1}^{1}n^{k}+C_{k+1}^{2}n^{k-1}+\ldots+(-1)^{k}C_{k+1}^{k}n+(-1)^{k+1}$$

5) Складываем результаты слева и справа и получаем:

$$-n^{k+1}=-C_{k+1}^{1}S_{k}(n)+C_{k}^{2}S_{k-1}(n)+\ldots+(-1)^{k}C_{k+1}^{k}S_{1}(n)+1(-1)^{k+1}S_{0}(n)$$

6) Вместо $S_k(n)$ подставим числа

$$-n^{k+1}=-C_{k+1}^{1}(1^{k}+2^{k}+3^{k}+\ldots+n^{k})+C_{k+1}^{2}(1^{k-1}+2^{k-1}+3^{k-1}+\ldots+n^{k-1})+\ldots$$

$$\ldots+(-1)^{k}C_{k+1}^{k}(1^{1}+2^{1}+3^{1}+\ldots+n^{1})+(-1)^{k+1}n$$

Отсюда вытекает рекуррентное соотношение:

$$C_k(n)=\frac{1}{k+1}[n^{k+1}+C_{k+1}^2S_{k-1}(n)-...+(-1)^kC_k^kS_1(n)+(-1)^{k+1}S_0(n)]$$

Из которого легко получить сумму $S_k(n)$, если известно

$S_1(n)$, $S_2(n)$,…$S_{k-1}(n)$

Например, проверим, что

$$S_1(n)=\frac{1}{2}[n^2+C_2^2S_0(n)]=\frac{1}{2}[n^2+n]=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n,$$

Находя $C_2^2=\frac{2!}{2!(2-2)!}=\frac{1}{0!}=1$

$$S_2(n)=\frac{1}{3}[n^3+C_3^2S_1(n)+(-1)S_0(n)]=\frac{1}{3}(n^3+3(\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n)-n)=$$

$$=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n-\frac{1}{3}n=\underline{\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n}$$

Находя $C_3^2=\frac{3!}{2!(3-2)!}=\frac{3\cdot2\cdot1}{2\cdot1\cdot1}=3$ **и так далее…**

<u>Числа Бернулли</u> — последовательность рациональных чисел B_0 ,B_1 ,B_2 ,... найденная Я. Бернулли в связи с вычислением суммы одинаковых степеней натуральных чисел.

Из формулы $S_1(n)$, $S_2(n)$, $S_3(n)$ следует что,

$$B_0=1, \quad B_1=\frac{1}{2}, \quad B_2=\frac{1}{6}, \quad B_3=0$$

Из определения и рекуррентного соотношения вытекает простой способ вычисления чисел Бернулли. Из следующей формулы мы можем вычислить B_k

$$B_k=\frac{1}{k+1}[C_{k+1}^{2}B_{k-1}-C_{k+1}^{3}B_{k-2}+\ldots+(-1)^{k}C_{k+1}^{k}B_{1}-(-1)^{k}B_{0}]$$

С помощью этой формулы можно проверить значения первых четырех чисел Бернулли. Я проверю значение B_4

$$B_4 = \frac{1}{4+1}[C_{4+1}^2 B_{4-1} - C_{4+1}^3 B_{4-2} + C_{4+1}^4 B_1 - C_5^5 B_0] =$$

$$= \frac{1}{5}[C_5^2 B_3 - C_5^3 B_2 + C_5^4 B_1 - C_5^5 B_0] = \frac{1}{5}[-10 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{2} - 1] =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot [\frac{5}{6} - 1] = \frac{1}{5} \cdot (-\frac{1}{6}) = -\frac{1}{30}$$

Для расчета B_4 нам также понадобились следующие значения

$$C_5^2 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 10 \qquad C_5^4 = \frac{5!}{4! \cdot 1!} = 5$$

$$C_5^3 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10 \qquad C_5^5 = \frac{5!}{5!} = 1$$

Бернулли удалось доказать, что и другие коэффициенты многочлена $\boldsymbol{S_k(n)}$ вычисляются с помощью чисел $\boldsymbol{B_k}$.

Коэффициент при $\boldsymbol{n^2}$ оказывается равным $\dfrac{B_{k-1}}{k-1}C_k^2$,

коэффициент при $\boldsymbol{n^3}$ равен $\dfrac{B_{k-2}}{k-2}C_k^3$,наконец,

коэффициент при степени $\boldsymbol{n^k}$ оказывается не зависящим от $\boldsymbol{k}$ и всегда равным

$$\frac{B_1}{1}C_k^k = \frac{1}{2}$$

Таким образом, *формула Бернулли* имеет вид

$$S_k(n) = B_k n + \frac{B_{k-1}}{k-1}C_k^2 n^2 + \frac{B_{k-2}}{k-2}C_k^3 n^3 + \ldots + \frac{B_1}{1}C_k^k n^k + \frac{n^{k+1}}{k+1}.$$

Вычислим с помощью этой формулы $S_5(n)$ следующим образом

$S_5(n)=1^5 +2^5 +3^5 +\ldots+n^5$

$$S_5(n) = B_5 \cdot n + \frac{B_4}{4} \cdot C_5^2 \cdot n^2 + \frac{B_3}{3} C_5^3 n^3 + \frac{B_2}{2} \cdot C_5^4 n^4 + \frac{B_1}{1} C_5^5 n^5 + \frac{n^6}{6}$$

За счет этой формулы мы с легкостью можем высчитать сумму степеней любого числа, например;

$$S_3(50) = 1^3 + 2^3 + \ldots + 50^3 = \frac{1}{3} \cdot 50^3 + \frac{1}{2} \cdot 50^2 + \frac{1}{6} \cdot 50 =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 125000 + \frac{1}{2} \cdot 2500 + \frac{1}{6} \cdot 50 = \frac{500000 + 7500 + 50}{6} = \frac{507550}{6}$$

$$= 84591\frac{2}{3}$$

Для чего же нам нужны числа Бернулли?

Изучая этот материал я выяснила, что числа Бернулли не зря используются в математических анализах и в теории чисел. Они помогают очень быстро вычислить сумму степеней любого числа а также разложить некоторые элементарные функций в степенные ряды.