

# Числа Бернулли

$$B_0 = 1$$

$$B_2 = \frac{1}{6}$$

$$B_7 = 0$$

$$B_4 = -\frac{1}{30}$$

$$B_8 = -\frac{1}{30}$$

$$B_3 = 0$$

$$B_1 = \frac{1}{2}$$

$$B_{10} = \frac{5}{66}$$

$$B_6 = \frac{1}{42}$$

$$B_5 = 0$$

*«Прогресс науки определяется  
трусами ее ученых и  
ценностью ее открытий»*

*Л.Пастер*

# Числа Бернулли.

**«Прогресс науки определяется  
трудами ее ученых и  
ценностью их открытий»**

**Л.Пастер**

**Теория чисел — раздел математики, занимающийся изучением чисел как таковых так и их свойств и поведения в различных ситуациях.**

**Как сказал великий математик Пифагор "Все есть число!"**

**Изучая числа мы изучаем окружающий нас мир и себя в том числе. С древних времен математики пытались постичь тайны удивительного мира чисел. Этот мир привлекает своим многообразием, строгостью и совершенством законов.**

**Здесь есть «великаны» и есть «карлики», обычные «трудяги» и такие «знаменитости», как  $\pi$  и  $e$ .**

**Но еще более многообразен мир числовых последовательностей.**

**Здесь и последовательность натуральных чисел и полная глубоких тайн последовательность простых чисел и последовательность “биномиальных коэффициентов”...**

**В моей работе речь пойдет об одной замечательной последовательности чисел, которую открыл выдающийся швейцарский математик Якоб Бернулли (1654—1705).**

**Последовательность эта играет в математике важную роль, что объясняется ее связью с вопросами суммирования функций, простыми числами, великой теоремой Ферма, а также другими задачами.**



## Якоб Бернулли

(27 декабря 1654 - 16 августа 1705)

профессор математики Базельского университета (с 1687). Из семьи Бернулли. Отец Бернулли занимал в городе заметное положение, был членом городского суда и членом Большого городского совета.

Отец прочил Якоба в священнослужители, и ему пришлось изучать в университете философию, богословие и языки.

Отец не допускал отступления от намеченного плана, поэтому Якоб вынужден был заниматься математикой тайком, без учителя и почти без учебников.

Обучение в университете шло своим чередом, и в 1671г. он получил степень магистра философии. В 1676 Якоб отправился в длительное путешествие, из которого возвратился только в 1680г. Он посетил некоторые города Швейцарии, Италию, Францию.

**По возвращении в Базель Якоб опубликовал в 1681 и 1682 две работы: одна содержала рассуждения о природе комет, другая - о тяжести эфира. Наиболее значительные достижения Якоба I в развитии анализа бесконечно малых, теории рядов, вариационного исчисления и теории вероятностей.**

**В 1687, ознакомившись с первым мемуаром Г.Лейбница по дифференциальному исчислению (1684), применил новые идеи к изучению свойств ряда кривых: логарифмические спирали, открытой им лемнискаты, цепной линии и др.**

**В труде "Искусство предположения" Якоб I в 1713 решил некоторые задачи комбинаторики; открыл числа, позднее названные числами Бернулли; доказал так называемую теорему Бернулли - частный случай закона больших чисел, имеющего большое значение в теории вероятностей и ее приложениях к статистике; построил математическую модель для описания серии независимых испытаний (схема Бернулли). Благодаря его работам теория вероятностей приобрела важнейшее значение в практической деятельности.**

# Династия Бернулли

**БЕРНУЛЛИ** - династия швейцарских ученых родом из Антверпена, бежавших из города после захвата его испанцами и поселившихся в 1622 году в Базеле.

По крайней мере восемь ее представителей оставили заметный след в истории точных наук.

Среди академиков Петербургской Академии наук — пятеро представителей семьи Бернулли.

Примечательно не то, что это семейство сделало ряд значимых открытий в разных областях науки, а то, что они, за исключением только некоторых членов семьи, были как-либо связаны с наукой, в частности с математикой



**Многие их открытия даже сейчас кажутся нам нереальными, недоказуемыми, но и как все гениальное – простыми.**



# Запись чисел.

**Натуральные числа возникли в глубокой древности как результат счета различных предметов: людей, животных, птиц, деревьев, орудий труда и т.д. Ряд натуральных чисел:**

**1, 2, 3, 4, 5, ...**

**является бесконечным и называется натуральным рядом.**

**При изучении свойств чисел Я. Бернулли встретился с суммированием степеней натуральных чисел**

**Эти вопросы интересовали математиков и ранее. Я. Бернулли составил таблицу фигурных чисел, указал их свойства и на основании отмеченных свойств нашел формулы для сумм степеней натуральных чисел. Он привел формулы для сумм от  $S(n)$  до  $S(n10)$ :**

$$S_1(n) = 1^1 + 2^1 + 3^1 + \dots + n^1$$

$$S_2(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

$$S_3(n) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$$

.....

$$S_k(n) = 1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k$$

$$S_{10}(1000) = 1^{10} + 2^{10} + 3^{10} + \dots + 1000^{10}$$

**Найдем обобщенную формулу для вычисления этих сумм.**

- 1) Обозначим эти суммы следующим символом: S.**
- 2) Возведем числа (от первого числа до числа n) этих сумм в степень.**
- 3) С помощью разложения:**

$$(a + b)^k = a^k + C_k^1 a^{k-1} b + C_k^2 a^{k-2} b^2 + \dots + C_k^{k-1} a b^{k-1} + b^k$$

**Которое мы получили при последовательном возведении двучлена (бинома) a+b первую, вторую, третью, ... степени**

$$**a+b=1 \cdot a+1 \cdot b**$$

$$**(a+b)^2=1 \cdot a^2+2 \cdot ab+1 \cdot b^2**$$

$$**(a+b)^3=1 \cdot a^3+3 \cdot a^2b+3 \cdot ab^2+1 \cdot b^3**$$

$$**(a+b)^4=1 \cdot a^4+4 \cdot a^3b+6 \cdot a^2b^2+4 \cdot ab^3+1 \cdot b^4**$$

**напишем тождество:**

$$(a - 1)^{k+1} - a^{k+1} = -C_{k+1}^1 a^k + C_{k+1}^2 a^{k-1} + \dots + (-1)^k C_{k+1}^k a + (-1)^{k+1}$$

**4) предположим, что  $a=1$  тогда,**

$$-(1)^{k+1} = -C_{k+1}^1 (1)^k + C_{k+1}^2 (1)^{k-1} + \dots + (-1)^k C_{k+1}^k 1 + (-1)^{k+1}$$

**Аналогично подставляем следующие числа до числа  $n$ .**

$$1^{k+1} - (2)^{k+1} = -C_{k+1}^1 2^k + C_{k+1}^2 2^{k-1} + \dots + (-1)^k C_{k+1}^k 2 + (-1)^{k+1}$$

$$2^{k+1} - 3^{k+1} = -C_{k+1}^1 3^k + C_{k+1}^2 3^{k-1} + \dots + (-1)^k C_{k+1}^k 3 + (-1)^{k+1}$$

$$(n-1)^{k+1} - n^{k+1} = -C_{k+1}^1 n^k + C_{k+1}^2 n^{k-1} + \dots + (-1)^k C_{k+1}^k n + (-1)^{k+1}$$

**5) Складываем результаты слева и справа и получаем:**

$$-n^{k+1} = -C_{k+1}^1 S_k(n) + C_k^2 S_{k-1}(n) + \dots + (-1)^k C_{k+1}^k S_1(n) + 1(-1)^{k+1} S_0(n)$$

**6) Вместо  $S_k(n)$  подставим числа**

$$\begin{aligned} -n^{k+1} &= -C_{k+1}^1 (1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k) + C_{k+1}^2 (1^{k-1} + 2^{k-1} + 3^{k-1} + \dots + n^{k-1}) + \dots \\ &\dots + (-1)^k C_{k+1}^k (1^1 + 2^1 + 3^1 + \dots + n^1) + (-1)^{k+1} n \end{aligned}$$

**Отсюда вытекает рекуррентное соотношение:**

$$C_k(n) = \frac{1}{k+1} [n^{k+1} + C_{k+1}^2 S_{k-1}(n) - \dots + (-1)^k C_k^k S_1(n) + (-1)^{k+1} S_0(n)]$$

Из которого легко получить сумму  $S_k(n)$ , если известно

$$S_1(n), S_2(n), \dots, S_{k-1}(n)$$

Например, проверим, что

$$S_1(n) = \frac{1}{2} [n^2 + C_2^2 S_0(n)] = \frac{1}{2} [n^2 + n] = \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{2} n,$$

Находя  $C_2^2 = \frac{2!}{2!(2-2)!} = \frac{1}{0!} = 1$

$$\begin{aligned} S_2(n) &= \frac{1}{3} [n^3 + C_3^2 S_1(n) + (-1) S_0(n)] = \frac{1}{3} (n^3 + 3(\frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{2} n) - n) = \\ &= \frac{1}{3} n^3 + \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{2} n - \frac{1}{3} n = \frac{1}{3} n^3 + \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{6} n \end{aligned}$$

Находя  $C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 1} = 3$

и так далее...

**Числа Бернулли — последовательность рациональных чисел  $B_0, B_1, B_2, \dots$  найденная Я. Бернулли в связи с вычислением суммы одинаковых степеней натуральных чисел.**

**Из формулы  $S_1(n), S_2(n), S_3(n)$  следует что,**

$$B_0=1, \quad B_1=\frac{1}{2}, \quad B_2=\frac{1}{6}, \quad B_3=0$$

**Из определения и рекуррентного соотношения вытекает простой способ вычисления чисел Бернулли. Из следующей формулы мы можем вычислить  $B_k$**

$$B_k = \frac{1}{k+1} [C_{k+1}^2 B_{k-1} - C_{k+1}^3 B_{k-2} + \dots + (-1)^k C_{k+1}^k B_1 - (-1)^k B_0]$$

С помощью этой формулы можно проверить значения первых четырех чисел Бернулли. Я проверю значение  $B_4$

$$\begin{aligned} B_4 &= \frac{1}{4+1} [C_{4+1}^2 B_{4-1} - C_{4+1}^3 B_{4-2} + C_{4+1}^4 B_1 - C_5^5 B_0] = \\ &= \frac{1}{5} [C_5^2 B_3 - C_5^3 B_2 + C_5^4 B_1 - C_5^5 B_0] = \frac{1}{5} [-10 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{2} - 1] = \\ &= \frac{1}{5} \cdot [\frac{5}{6} - 1] = \frac{1}{5} \cdot (-\frac{1}{6}) = -\frac{1}{30} \end{aligned}$$

Для расчета  $B_4$  нам также понадобились следующие значения

$$C_5^2 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$$

$$C_5^4 = \frac{5!}{4! \cdot 1!} = 5$$

$$C_5^3 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$$

$$C_5^5 = \frac{5!}{5!} = 1$$

Бернулли удалось доказать, что и другие коэффициенты многочлена  $S_k(n)$  вычисляются с помощью чисел  $B_k$ .

Коэффициент при  $n^2$  оказывается равным  $\frac{B_{k-1}}{k-1} C_k^2$   
коэффициент при  $n^3$  равен  $\frac{B_{k-2}}{k-2} C_k^3$ , наконец,

коэффициент при степени  $n^k$  оказывается не зависящим от  $k$  и всегда равным

$$\frac{B_1}{1} C_k^k = \frac{1}{2}$$

Таким образом, формула Бернулли имеет вид

$$S_k(n) = B_k n + \frac{B_{k-1}}{k-1} C_k^2 n^2 + \frac{B_{k-2}}{k-2} C_k^3 n^3 + \dots + \frac{B_1}{1} C_k^k n^k + \frac{n^{k+1}}{k+1}.$$



**Вычислим с помощью этой формулы  $S_5(n)$  следующим образом**

$$S_5(n) = 1^5 + 2^5 + 3^5 + \dots + n^5$$

$$S_5(n) = B_5 \cdot n + \frac{B_4}{4} \cdot C_5^2 \cdot n^2 + \frac{B_3}{3} C_5^3 n^3 + \frac{B_2}{2} \cdot C_5^4 n^4 + \frac{B_1}{1} C_5^5 n^5 + \frac{n^6}{6}$$

**За счет этой формулы мы с легкостью можем высчитать сумму степеней любого числа, например;**

$$\begin{aligned} S_3(50) &= 1^3 + 2^3 + \dots + 50^3 = \frac{1}{3} \cdot 50^3 + \frac{1}{2} \cdot 50^2 + \frac{1}{6} \cdot 50 = \\ &= \frac{1}{3} \cdot 125000 + \frac{1}{2} \cdot 2500 + \frac{1}{6} \cdot 50 = \frac{500000 + 7500 + 50}{6} = \frac{507550}{6} \\ &= 84591 \frac{2}{3} \end{aligned}$$

# Для чего же нам нужны числа Бернулли?

**Изучая этот материал я выяснила, что числа Бернулли не зря используются в математических анализах и в теории чисел. Они помогают очень быстро вычислить сумму степеней любого числа а также разложить некоторые элементарные функций в степенные ряды.**