ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Если функция f(x)
непрерывна на отрезке $[a, b]$
то определенный интеграл
от этой функции
в пределах от a до b
существует и имеет вид

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Задача численного интегрирования

Найти определенный интеграл на отрезке $[a,b]$ если подынтегральная функция на отрезке задана таблично.

Формулы приближенного интегрирования называются ***квадратурными формулами***.

Метод прямоугольников

основан на непосредственном определении интеграла:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$$

где $\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$ - интегральная сумма, соответствующая некоторому разбиению отрезка $[a,b]$ и некоторому выбору точек

$$\xi_0\ ,\ \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$$

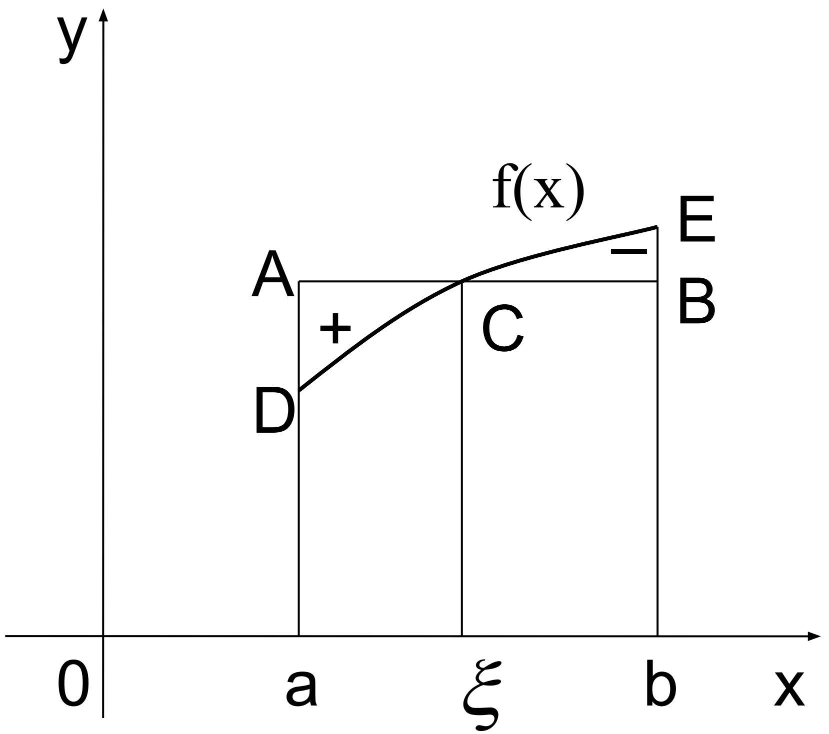
на отрезках разбиения

Вычисление определенного интеграла

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

геометрически сводится
к вычислению площади
криволинейной трапеции,
ограниченной функцией f(x),
осью абсцисс и прямыми x = a и x = b.

Учитывая, что высота Прямоугольника ABba есть значение функции в точке ξ



$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f(\xi)$$

Для увеличения точности численного интегрирования можно отрезок $[a,b]$ разбить на несколько частей и для каждой из них вычислить приближенное значение площади криволинейной трапеции, основанием которой является отрезок $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ (i = 0, 1, …,n – 1), а высотой число $f(\xi_i)$ т.е. значение функции в точке $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$

$$\int_a^b f(x)dx \approx f(\xi_0)\Delta x_0 + f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1}$$

Практически удобно делить отрезок $[a,b]$

на равные части, а точки

ξ_i (i = 0, 1, …, n – 1) совмещать с левыми

$$\left[f(\xi_i) = f(x_i)\right]$$

или с правыми $\left[f(\xi_i) = f(x_{i+1})\right]$

концами отрезков разбиения.

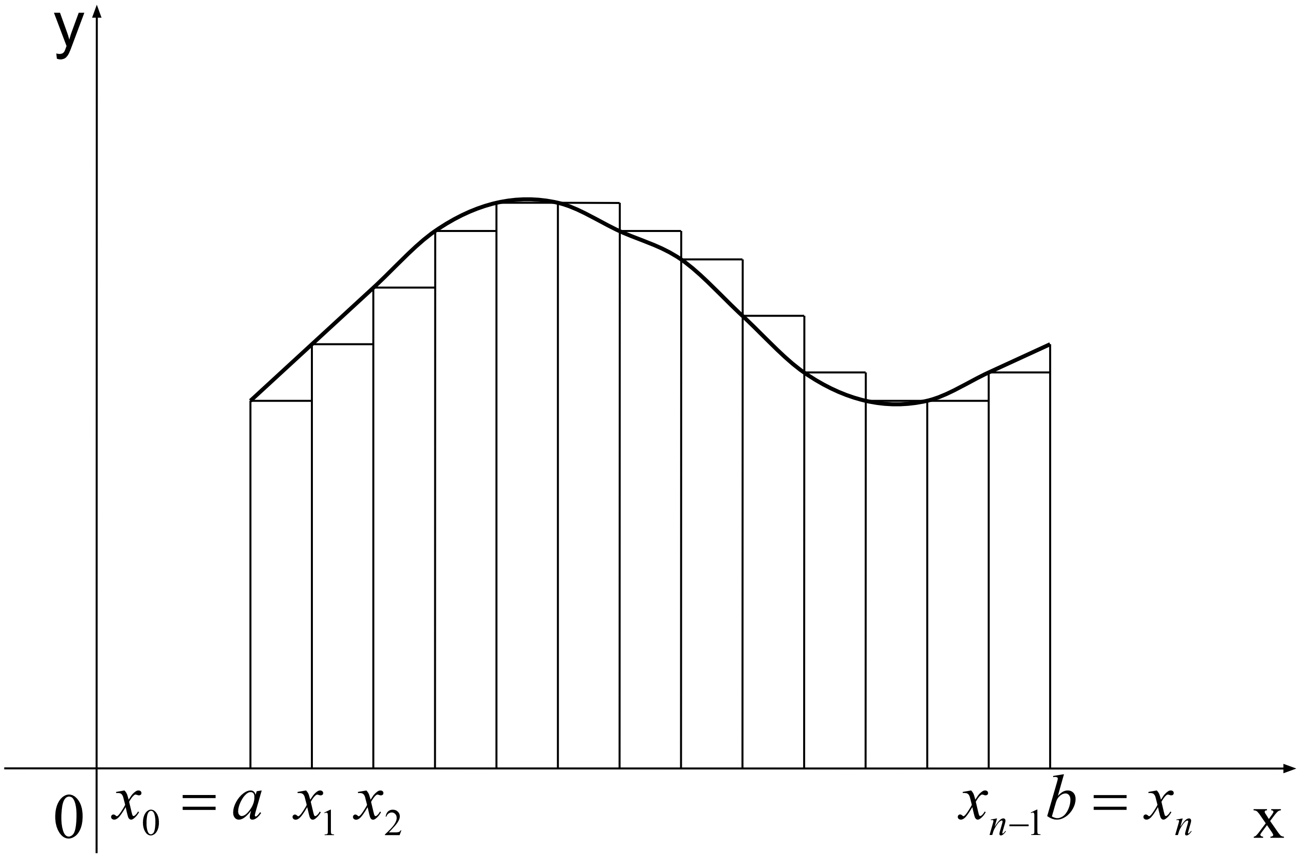
Если точку ξ_i

совместить с левым концом отрезка Δx_i

то приближенное значение интеграла может быть представлено ***<u>формулой левых прямоугольников</u>***:

$$I_л = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(y_0 + y_1 + \ldots\ y_{n-1}\right) = h\sum_{i=0}^{n-1} y_i$$

где $h = \dfrac{b-a}{n}$ – шаг.



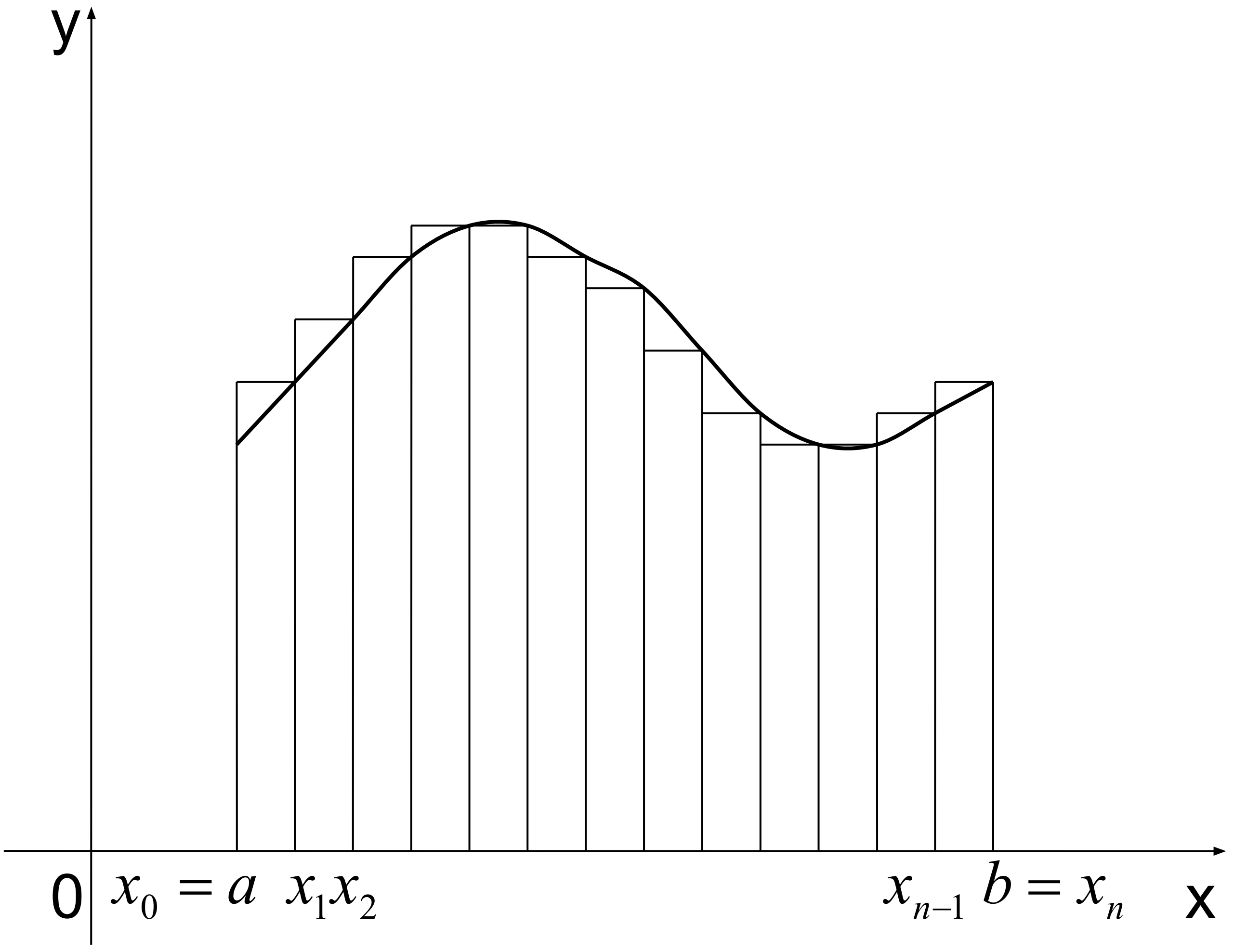
y
0
$x_0 = a$
x_1
x_2
x_{n-1}
$b = x_n$
x

Если же в качестве точки ξ_i

выбрать правый конец отрезка Δx_i

то приближенное значение интеграла вычисляется по **<u>формуле правых прямоугольников</u>**:

$$I_П = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + \dots y_n) = h\sum_{i=1}^{n} y_i$$



y
0
$x_0 = a$
$x_1 x_2$
x_{n-1}
$b = x_n$
x

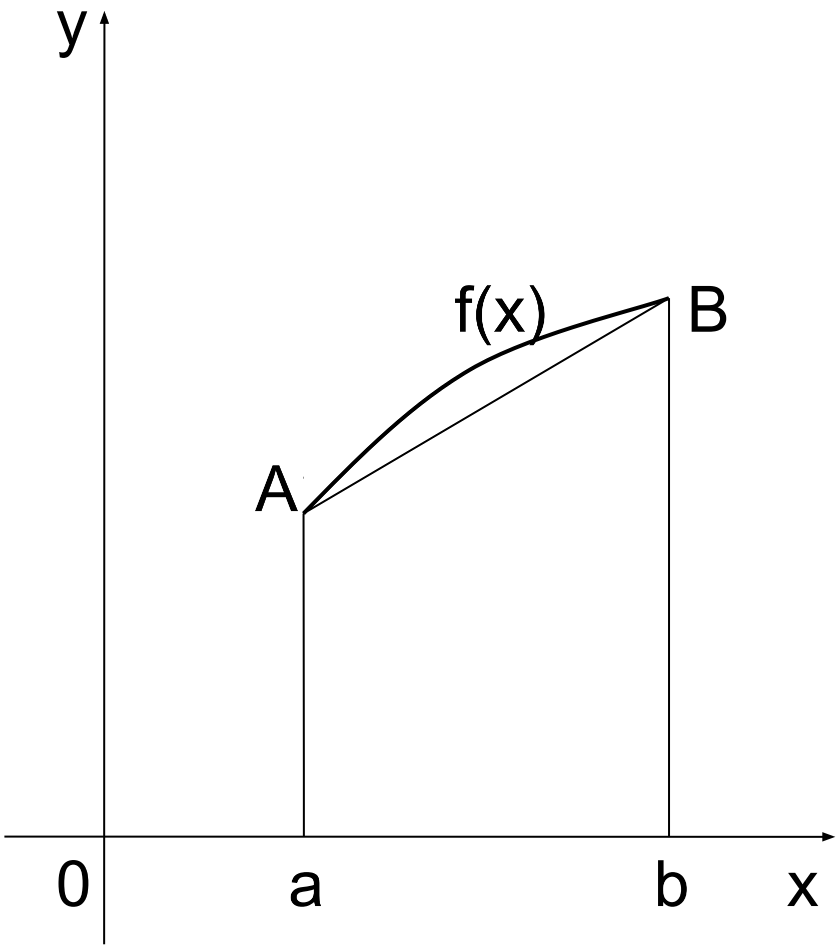
Метод трапеций

Заменим на отрезке $[a,b]$

дугу АВ графика подынтегральной функции у = f(x) стягивающей ее хордой и вычислим площадь трапеции АВba. Примем значение определенного интеграла численно равным площади этой трапеции:

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

Это и есть ***<u>формула трапеций</u>***

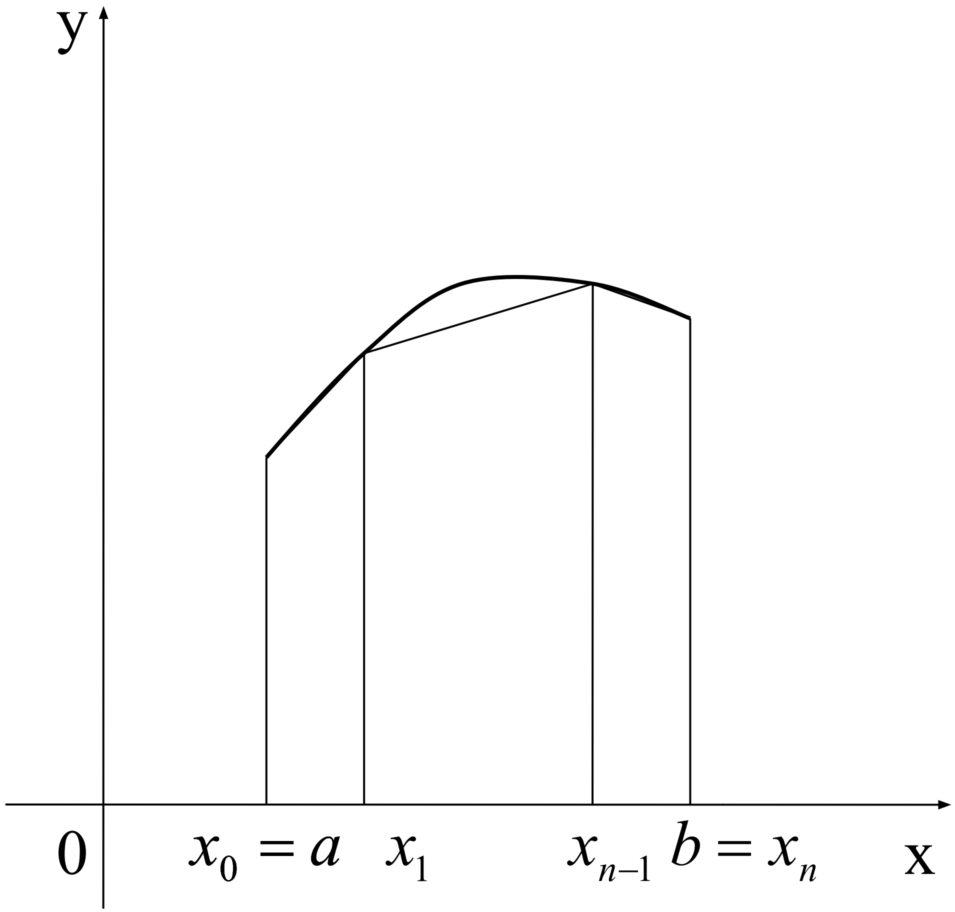

y
f(x)
B
A
0
a
b
x

Если отрезок $[a,b]$

разделить на несколько частей и применить формулу трапеции к каждому отрезку Δx_i

Тогда

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx \frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}\Delta x_i$$


y
0
$x_0 = a$
x_1
x_{n-1}
$b = x_n$
x

Для простоты вычислений удобно разделить отрезок $[a, b]$ на равные части, в этом случае длина каждого из отрезков разбиения есть

$$\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$$

Численное значение интеграла на отрезке Δx_i равно

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \cdot \frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}$$

А на всем отрезке $[a,b]$

соответственно

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\cdot\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}=\frac{b-a}{n}\cdot\sum_{i=0}^{n-1}\frac{y_i+y_{i+1}}{2}$$

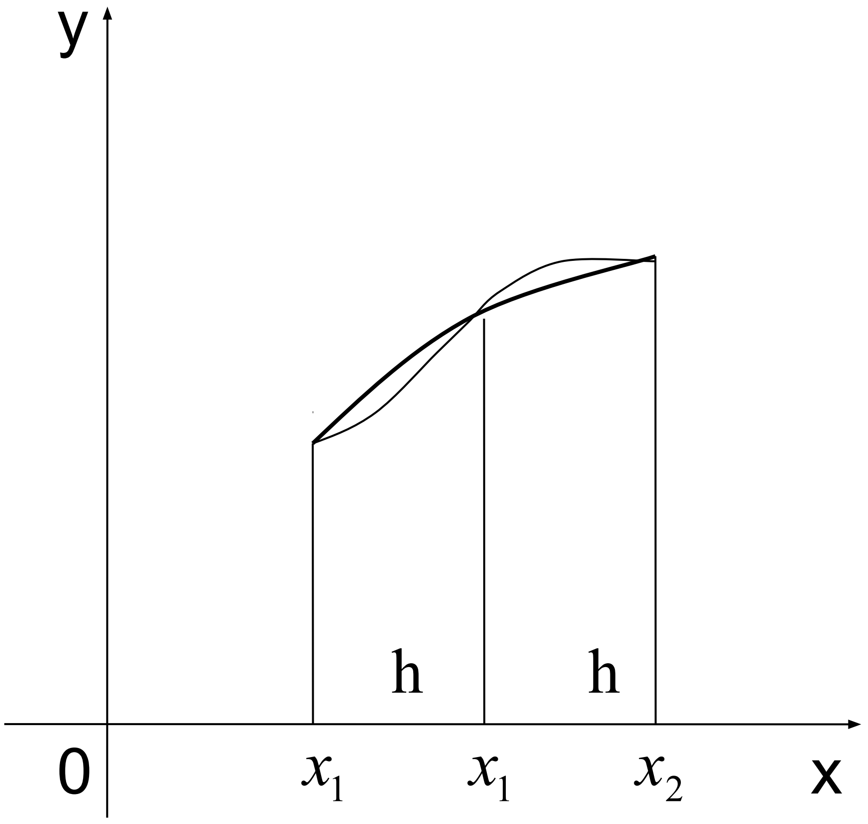
Эта формула называется ***<u>общей формулой трапеции</u>***.

Ее можно переписать в виде

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left(y_0+2y_1+2y_2+\ldots+2y_{n-1}+y_n\right)$$

где $h=\dfrac{b-a}{n}$ – шаг.

Метод парабол (метод Симпсона)



функцию y = f(x) на отрезке $[a,b]$

заменяем квадратичной функцией, принимающей в узлах

$$x_0 = a\ , \quad x_1\ , \quad x_2 = b$$

значения

$$y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_1) \ \text{ и } \ y_2 = f(x_2)$$

В качестве интерполяционного многочлена воспользуемся многочленом Ньютона

$$P_2(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}(x - x_0)(x - x_1)$$

Тогда

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_2} P_2(x)dx = 2hy_0 + \frac{\Delta y_0}{h}\cdot\frac{4h^2}{2} + \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}\cdot\frac{8h^3}{3} - \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}\cdot\frac{4h^3}{2} =$$

$$= 2hy_0 + 2h\Delta y_0 + \frac{h}{3}\Delta^2 y_0 = \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right)$$

Это соотношение называется ***формулой Симпсона***.

Для увеличения точности вычислений отрезок $[a,b]$

разбивают на n пар участков

$$\left[x_{2i-2}, x_{2i-1}, x_{2i}\right]$$

и заменяя подынтегральную функцию интерполяционным многочленом Ньютона второй степени, получают приближенное значение интеграла на каждом участке длины 2h:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right)$$

$$\int_{x2}^{x_4} f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(y_2 + 4y_3 + y_4\right)$$

....

$$\int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}\right)$$

Тогда численное значение определенного интеграла на отрезке $[a,b]$

будет равно сумме интегралов

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[(y_0 + y_{2n}) + 4(y_1 .+ \ldots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + \ldots + y_{2n-2})\right]$$

Это соотношение называется ***<u>общей формулой Симпсона</u>***.
Ее можно записать также в виде

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}\left[(y_0 + y_{2n}) + 4(y_1 .+ \ldots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + \ldots + y_{2n-2})\right]$$

где $h = \dfrac{b-a}{2n}$