

Вычислительная математика

Математические методы в экономике 061800

Институт Международного Бизнеса и
Экономики кафедра Математики и
Моделирования

Ушаков А.А.

Численные методы решения ОДУ

Лекция № 6, 7

Численные методы решения задач для ОДУ

Метод Эйлера. Метод Эйлера – Коши.

Дана задача Коши для ОДУ 1-го порядка :

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (1)$$

Нужно найти решение данного уравнения в каждой точке отрезка $[x_0, b]$.

Разобьём отрезок $[x_0, b]$ на n равных промежутков в длиной $h = \frac{b - x_0}{n}$.

Получим сетку $\{x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$ с шагом h , $x_i = x_0 + hi$, $i = 0, 1, \dots, n$ – узлы сетки.

Проинтегрируем данное уравнение на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$,

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x)) dx. \quad (2)$$

Уравнение (2) эквивалентно задаче Коши (1). Вычислим интеграл в (2) по квадратурной формуле прямоугольников, взяв за основной узел x_i .

$$y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i) + O(h^2), \quad y_0 = y(x_0), \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (3)$$

Формула (3) – алгоритм метода Эйлера численного интегрирования задачи Коши.

На всем интервале численного интегрирования задачи Коши метод Эйлера имеет погрешность порядка $O(h)$, поэтому является методом 1–го порядка точности.

Если интеграл в (2) вычислить на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ по методу трапеций с точностью $O(h^2)$, получим

$$y_{i+1} = y_i + 0.5h[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})] + O(h^2). \quad (4)$$

Применяют данную формулу следующим образом: сначала находят \tilde{y}_{i+1} , например, по формуле Эйлера (3), потом в (4) подставляют вместо y_{i+1} . Точность данной схемы

увеличивается до $O(h^2)$

$$\begin{cases} \tilde{y}_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i), \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})]. \end{cases}$$

Полученную схему можно называть схемой Эйлера – Коши, схемой Эйлера с пересчетом или схемой предиктор – корректор.

Пример.

Методами Эйлера и Эйлера – Коши с шагом $h = 0.1$ численно проинтегрировать следующую задачу Коши для ОДУ 1-го порядка до значения $x = 0.2$ включительно:

$$y' = x + y, \quad y(0) = 1, \quad h = 0.1.$$

Аналитическое решение – $y(x) = 2e^x - x - 1$.

Вычислим его в требуемых точках: $y(0.1) = 1.1103442$, $y(0.2) = 1.242806$.

Метод Эйлера.

$$y_{i+1} = y_i + h(x_i + y_i), \quad i = 0, 1, 2.$$

$$i = 0; \quad x_0 = 0; \quad y_0 = 1: \quad y_1 = y_0 + h(x_0 + y_0) = 1 + 0.1(0 + 1) = 1.1;$$

$$i = 1; \quad x_1 = 0.1; \quad y_1 = 1.1: \quad y_2 = y_1 + h(x_1 + y_1) = 1.1 + 0.1(0.1 + 1.1) = 1.22;$$

Метод Эйлера – Коши.

$$\begin{cases} \tilde{y}_{i+1} = y_i + h(x_i + y_i), \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [(x_i + y_i) + (x_{i+1} + \tilde{y}_{i+1})], \end{cases}$$

$$i = 0; \quad x_0 = 0; \quad y_0 = 1:$$

$$\begin{cases} \tilde{y}_1 = y_0 + h(x_0 + y_0) = 1 + 0.1(0 + 1) = 1.1, \\ y_1 = 1 + \frac{0.1}{2}[(0 + 1) + (0.1 + 1.1)] = 1.11; \end{cases}$$

$$i = 1; \quad x_1 = 0.1; \quad x_2 = 0.2; \quad y_1 = 1.11:$$

$$\begin{cases} \tilde{y}_2 = 1.11 + 0.1(0.1 + 1.11) = 1.231; \\ y_2 = 1.11 + \frac{0.1}{2}[(0.1 + 1.11) + (0.2 + 1.231)] = 1.24205. \end{cases}$$

Поскольку метод Эйлера является методом первого порядка точности, то только первая цифра после запятой является верной, а вторая – нет. Это подтверждает сравнение y_1 с $y(0.1)$ и y_2 с $y(0.2)$.

Метод Эйлера – Коши является методом второго порядка точности, то первые две цифры после запятой считаются верными (сравнить y_1 с $y(0.1)$ и y_2 с $y(0.2)$).

Метод Рунге-Кутта

Метод Рунге – Кутта имеет погрешность, пропорциональную h^4 и поэтому является одним из наиболее употребительных методов численного решения задачи Коши для ОДУ.



Для вычисления интеграла в (2) используем квадратурную формулу Симпсона. Для формулы Симпсона необходимо три узла. В качестве недостающего узла возьмем середину отрезка $[x_i, x_{i+1}]$, т.е. $x_{i+1/2} = x_i + h/2$.

Формула (2) преобразуется к виду

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6} [f(x_i, y_i) + 4f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2}) + f(x_{i+1}, y_{i+1})].$$

Два последних слагаемых вычисляем следующим образом

$$4f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2}) + f(x_{i+1}, y_{i+1}) = 2f\left(x_{i+1/2}, y_i + \frac{\tilde{\Delta}y_i}{2}\right) + 2f\left(x_{i+1/2}, y_i + \frac{\tilde{\tilde{\Delta}}y_i}{2}\right) + f(x_{i+1}, y_i + \Delta y_i).$$

Если обозначить через

$$k_i^1 = hf(x_i, y_i), \quad k_i^2 = hf\left(x_{i+1/2}, y_i + \frac{k_i^1}{2}\right),$$

$$k_i^3 = hf\left(x_{i+1/2}, y_i + \frac{k_i^2}{2}\right), \quad k_i^4 = hf(x_{i+1}, y_i + k_i^3),$$

то схема вычислений будет следующая

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, \\ \Delta y_i = \frac{1}{6} (k_i^1 + 2k_i^2 + 2k_i^3 + k_i^4). \end{array} \right.$$

Пример.

Методом Рунге – Кутты с шагом $h = 0.1$ численно проинтегрировать задачу Коши для ОДУ 1-го порядка из предыдущего примера до значения $x = 0.2$ включительно:

$$y' = x + y, \quad y(0) = 1, \quad h = 0.1.$$

Аналитическое решение – $y(x) = 2e^x - x - 1$.

Значение точного решения: $y(0.1) = 1.1103442$, $y(0.2) = 1.242806$.

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, \quad \Delta y_i = \frac{1}{6} (k_i^1 + 2k_i^2 + 2k_i^3 + k_i^4),$$

$$k_i^1 = hf(x_i, y_i) = h(x_i + y_i),$$

$$k_i^2 = hf\left(x_{i+1/2}, y_i + \frac{k_i^1}{2}\right) = h\left[\left(x_i + \frac{h}{2}\right) + \left(y_i + \frac{k_i^1}{2}\right)\right],$$

$$k_i^3 = hf\left(x_{i+1/2}, y_i + \frac{k_i^2}{2}\right) = h\left[\left(x_i + \frac{h}{2}\right) + \left(y_i + \frac{k_i^2}{2}\right)\right],$$

$$k_i^4 = hf(x_{i+1}, y_i + k_i^3) = h[(x_i + h) + (y_i + k_i^3)].$$

$$\left\{ \begin{array}{l} i = 0; \quad x_0 = 0; \quad x_{0+1/2} = 0.05; \quad x_1 = 0.1; \quad y_0 = 1: \\ k_0^1 = h(x_0 + y_0) = 0.1(0 + 1) = 0.1; \\ k_0^2 = h \left[\left(x_0 + \frac{h}{2} \right) + \left(y_0 + \frac{k_0^1}{2} \right) \right] = 0.1 \left[0.05 + \left(1 + \frac{0.1}{2} \right) \right] = 0.11; \\ k_0^3 = h \left[\left(x_0 + \frac{h}{2} \right) + \left(y_0 + \frac{k_0^2}{2} \right) \right] = 0.1 \left[0.05 + \left(1 + \frac{0.11}{2} \right) \right] = 0.1105; \\ k_0^4 = h \left[(x_0 + h) + (y_0 + k_0^3) \right] = 0.1 [0.1 + (1 + 0.1105)] = 0.1211; \\ \Delta y_0 = \frac{1}{6} (k_0^1 + 2k_0^2 + 2k_0^3 + k_0^4), \quad y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1.11035. \end{array} \right.$$

Аналогично проводим вычисления на следующем шаге

$$\left\{ \begin{array}{l} i = 1; \quad x_1 = 0.1; \quad x_{1+1/2} = 0.15; \quad x_2 = 0.2; \quad y_1 = 1.11035: \\ k_1^1 = 0.12104, \quad k_1^2 = 0.132087, \quad k_1^3 = 0.13264, \quad k_1^4 = 0.1443, \\ \Delta y_1 = \frac{1}{6} (k_1^1 + 2k_1^2 + 2k_1^3 + k_1^4) = 0.13247, \quad y_2 = y_1 + \Delta y_1 = 1.24282. \end{array} \right.$$

Метод Рунге – Кутта является методом четвертого порядка точности, то первые четыре цифры после запятой считаются верными (сравнить y_1 с $y(0.1)$ и y_2 с $y(0.2)$).

Численные методы решения краевых задач для ОДУ

Пусть на отрезке $x \in [a, b]$ определена дважды непрерывно дифференцируемая функция $y(x)$, поведение которой описывается линейным неоднородным ОДУ 2-го порядка

$$\begin{cases} y'' + m(x)y' - r(x)y = f(x), & a < x < b; \\ y(a) = y_a, & y(b) = y_b. \end{cases} \quad (1)$$

Данная задача называется первой краевой задачей для ОДУ.

Если на границах заданы значения производных искомой функции, то такие условия называются граничными условиями 2-го рода:

$$y'(a) = y_a, \quad y'(b) = y_b,$$

а задача называется второй краевой задачей ОДУ.

Если на границах заданы линейные комбинации искомой функции и её первой производной:

$$y'(a) + \alpha y(a) = y_a, \quad y'(b) + \beta y(b) = y_b, \quad (2)$$

то такие условия называются граничными условиями третьего рода, а задача называется третьей краевой задачей ОДУ.

Теорема. Если функции $m(x)$, $r(x)$, $f(x) \in C_2[0, 1]$, $r(x) \geq 0$ на отрезке $[0, 1]$, то краевая задача (1) имеет единственное решение $y(x) \in C_4[0, 1]$.

Решение первой краевой задачи

После дискретизации (1) получим СЛАУ с трехдиагональной матрицей

$$a_i y_{i-1} - b_i y_i + c_i y_{i+1} = f_i, \quad i = 1, \dots, n-1;$$

$$y_0 = y_a, \quad i = 0, \quad y_n = y_b, \quad i = n,$$

$$a_i = \frac{1}{h^2} - \frac{m_i}{2h}; \quad b_i = \frac{2}{h^2} + r_i; \quad c_i = \frac{1}{h^2} + \frac{m_i}{2h}.$$

Полагаем $i = 1$. Первое слагаемое в первом уравнении перенесём в правую часть и положим $a_1 = 0$. В последнем уравнении ($i = n - 1$) последнее слагаемое перенесём в правую часть и положим $c_{n-1} = 0$

$$\begin{cases} -b_1 y_1 + c_1 y_2 = f_1 - a_1 y_a = f_1^*, & a_1 = 0, \\ a_i y_{i-1} - b_i y_i + c_i y_{i+1} = f_i, & i = 2, \dots, n-2, \\ a_{n-1} y_{n-2} - b_{n-1} y_{n-1} = f_{n-1} - c_{n-1} y_b = f_{n-1}^*, & c_{n-1} = 0. \end{cases}$$

Теперь СЛАУ пригодна для использования метода прогонки (матрица трёхдиагональная и $a_1 = c_{n-1} = 0$). Определяем прогоночные коэффициенты

$$p_i = \frac{c_i}{b_i - a_i p_{i-1}}; \quad q_i = \frac{a_i q_{i-1} - f_i}{b_i - a_i p_{i-1}}, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

$$p_1 = -\frac{c_1}{b_1}, \quad q_1 = -\frac{f_1^*}{b_1}, \quad \text{так как } a_1 = 0,$$

$$p_{n-1} = 0, \quad \text{так как } c_{n-1} = 0.$$

Значения y_i при $i = n-1, n-2, \dots, 1$ определяются при обратном ходе по формуле $y_i = p_i y_{i+1} + q_i$

$$\begin{cases} i = n-1: & y_{n-1} = q_{n-1}, \\ i = n-2: & y_{n-2} = p_{n-2} y_{n-1} + q_{n-2}, \\ \dots & \dots \\ i = 1: & y_1 = p_1 y_2 + q_1. \end{cases}$$

Решение второй и третьей краевых задач

Предположим, что искомая функция дважды непрерывно дифференцируема не только во внутренних точках расчётной области, но и на границах, т.е. $y(x) \in C_2[a, b]$. С этой целью разложим точное решение в ряд Тейлора в окрестностях точек $x_0 = a$ и $x_n = b$ до третьей производной включительно

$$\begin{aligned}y_1 &= y(x_0 + h) = y_0 + y'_0 h + y''_0 h^2 / 2 + O(h^3), \\y_{n-1} &= y(x_n - h) = y_n - y'_n h + y''_n h^2 / 2 + O(h^3).\end{aligned}\quad (3)$$

Находим из уравнения вторую производную

$$y''_0 = f_0 - m_0 y'_0 + r_0 y_0, \quad y''_n = f_n - m_n y'_n + r_n y_n$$

а из разложения (3) – первую производную

$$\begin{aligned}y'_0 &= \frac{2(y_1 - y_0)}{(2 - m_0 h)h} - \frac{h}{(2 - m_0 h)} (f_0 + r_0 y_0) + O(h^2), \\y'_n &= \frac{2(y_n - y_{n-1})}{(2 + m_n h)h} + \frac{h}{(2 + m_n h)} (f_n + r_n y_n) + O(h^2).\end{aligned}$$

В результате граничные условия (2) аппроксимируются со вторым порядком точности и имеют вид

$$-b_0 y_0 + c_0 y_1 = f_0^*, \quad a_n y_{n-1} - b_n y_n = f_n^*,$$

$$\text{где } b_0 = \frac{2}{h(2-m_0 h)} + \frac{r_0 h}{2-m_0 h} - \alpha, \quad c_0 = \frac{2}{h(2-m_0 h)}, \quad f_0^* = y_a + \frac{h f_0}{2-m_0 h},$$

$$a_n = -\frac{2}{h(2-m_n h)}, \quad b_n = -\frac{2}{h(2+m_n h)} - \frac{r_n h}{2+m_n h} - \beta, \quad f_n^* = y_b - \frac{h f_n}{2+m_n h}.$$

после преобразований получаем СЛАУ

$$\begin{cases} i = 0, & -b_0 y_0 + c_0 y_1 = f_0^*, \quad a_0 = 0, \\ i = 1, \dots, n-1, & a_i y_{i-1} - b_i y_i + c_i y_{i+1} = f_i, \\ i = n, & a_n y_{n-1} - b_n y_n = f_n^*, \quad c_n = 0. \end{cases}$$

Таким образом, результирующая СЛАУ с трехдиагональной матрицей теперь будет содержать $n+1$ уравнение, каждое из которых получено со вторым порядком точности. Для её решения используется метод прогонки, поскольку $a_0 = c_n = 0$.

Пример. Найти приближенное решение краевой задачи

$$\begin{cases} y'' + y = 1, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ y'(0) = 0, & y'\left(\frac{\pi}{2}\right) - y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2. \end{cases}$$

Сравнить точное решение $y(x) = 1 + \cos x$ с приближенным, найденным

с шагом $h = \frac{\pi}{6}$, $n = 3$. Коэффициенты уравнения $m(x) = 0$, $r(x) = -1$,

$f(x) = 1$, $\alpha = 0$, $\beta = -1$, $y_a = 0$, $y_b = -2$.

Используя результаты решения второй и третьей краевых задач, запишем соответствующую СЛАУ и решим её

$$\begin{cases} i = 0, & -b_0 y_0 + c_0 y_1 = f_0^*, \quad a_0 = 0, \\ i = 1, 2, & a_i y_{i-1} - b_i y_i + c_i y_{i+1} = f_i, \\ i = 3, & a_3 y_2 - b_3 y_3 = f_3^*, \quad c_3 = 0, \end{cases}$$

где $b_0 = \frac{2-h^2}{2h}$, $c_0 = \frac{1}{h}$, $f_0^* = \frac{h}{2}$, $a_3 = -\frac{1}{h}$, $b_3 = \frac{h^2 + 2h - 2}{2h}$, $f_3^* = -2 - \frac{h}{2}$,

$a_i = 1$, $b_i = 2 - h^2$, $c_i = 1$, $f_i = h^2$, $i = 1, 2$.

Вычисляем прогоночные коэффициенты

$$p_i = \frac{c_i}{b_i - a_i p_{i-1}}; \quad q_i = \frac{a_i q_{i-1} - f_i}{b_i - a_i p_{i-1}}, \quad i = 1, 2,$$

$$p_0 = \frac{c_0}{b_0}, \quad q_0 = -\frac{f_0^*}{b_0}, \quad p_3 = 0, \quad q_3 = \frac{a_3 q_2 - f_3^*}{b_3 - a_3 p_2}.$$

Окончательно, приближённое решение вычисляем обратным ходом и приведем для сравнения точное решение

$$y_3 = 0.98045, \quad y_2 = 1.51692, \quad y_1 = 1.91168, \quad y_0 = 2.05650,$$

$$y_3^t = 1, \quad y_2^t = 1.5, \quad y_1^t = 1.86603, \quad y_0^t = 2.$$

Приведём значения погрешностей ($h^2 = 0.27415$)

$$\Delta y_0 = |y_0 - y_0^t| = 0.01955, \quad \Delta y_1 = |y_1 - y_1^t| = 0.01692,$$

$$\Delta y_2 = |y_2 - y_2^t| = 0.04565, \quad \Delta y_3 = |y_3 - y_3^t| = 0.0565.$$

Вычислительная математика

Математические методы в экономике 061800

Институт Международного Бизнеса и
Экономики кафедра Математики и
Моделирования

Ушаков А.А.

Численные методы решения уравнений в частных производных

Лекция № 8

Метод сеток для уравнения теплопроводности

В одномерном по пространству случаях однородное уравнение теплопроводности имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0.$$

$$\begin{cases} u(0, t) = \varphi_1(t), & x = 0, & t > 0, \\ u(l, t) = \varphi_2(t), & x = l, & t > 0, \\ u(x, 0) = \psi(x), & 0 \leq x \leq l, & t = 0. \end{cases} \quad - \text{Первая начально – краевая задача.}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \varphi_1(t), & x = 0, & t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = \varphi_2(t), & x = l, & t > 0, \end{cases} \quad - \text{Вторая начально – краевая задача.}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) + \alpha u(0, t) = \varphi_1(t), & x = 0, & t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) + \beta u(l, t) = \varphi_2(t), & x = l, & t > 0, \end{cases} \quad - \text{Третья начально – краевая задача.}$$

Нанесем на пространственно – временную область $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$ конечно – разностную сетку $w_{h,\tau}$:

$$w_{h,\tau} = \left\{ x_j = jh, j = 0, \square, N, t^k = k\tau, k = 0, \square, K \right\}, \quad h = \frac{l}{N}, \quad \tau = \frac{T}{K}.$$

Определим сеточную функцию $u_j^k = u(x_j, t^k)$ и построим явную конечно – разностную схему для первой начально – краевой задачи

$$u_j^{k+1} - u_j^k = \frac{a^2 \tau}{h^2} \cdot (u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k) + O(h^2 + \tau), \quad j = 0, \square, N-1, k = 0, \square, K-1;$$

$$u_0^{k+1} = \varphi_1(t^{k+1}), \quad u_N^{k+1} = \varphi_2(t^{k+1}), \quad k = 0, \square, K;$$

$$u_j^0 = \psi(x_j), \quad j = 0, \square, N.$$

Можно построить неявную конечно – разностную схему для той же задачи

$$u_j^{k+1} - u_j^k = \frac{a^2 \tau}{h^2} (u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}) + O(h^2 + \tau), \quad j = 0, \square, N-1, k = 0, \square, K-1;$$

с теми же начальными и краевыми условиями.

Решение по явной схеме получается достаточно просто

$$u_j^{k+1} = u_j^k + \sigma \cdot (u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k), \quad \sigma = \frac{a^2 \tau}{h^2}, \quad j = 0, \dots, N-1, \quad k = 0, \dots, K-1.$$

с единственным условием, называемым условием устойчивости

Куранта $\sigma = \frac{a^2 \tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}$. Это условие связывает шаги по времени τ

и по координате h . Поэтому разностная схема называется условно устойчивой.

Решение по неявной схеме осуществляется методом прогонки, так как разностную схему можно преобразовать в СЛАУ с трехдиагональной матрицей, а на шаги по времени τ и по координате h не накладывается ни каких условий

$$\begin{cases} -b_1 u_1^{k+1} + c_1 u_2^{k+1} = f_1, & a_1 = 0, & j = 1, \\ a_j u_{j-1}^{k+1} - b_j u_j^{k+1} + c_j u_{j+1}^{k+1} = f_j, & j = 2, \dots, N-2, \\ a_{N-1} u_{N-2}^{k+1} - b_{N-1} u_{N-1}^{k+1} = f_{N-1}, & c_{N-1} = 0, & j = N-1, \end{cases}$$

где $a_j = \sigma$, $j = 2, \dots, N-1$, $b_j = (1 + 2\sigma)$, $j = 1, \dots, N-1$; $c_j = \sigma$, $j = 1, \dots, N-2$;

$$f_j = -u_j^k, \quad j = 2, \dots, N-2; \quad f_1 = -[u_1^k + \sigma \cdot \varphi_1(t^{k+1})]; \quad f_{N-1} = -[u_{N-1}^k + \sigma \cdot \varphi_2(t^{k+1})]$$



Постановка задач для волнового уравнения

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0; \\ u(0, t) = \varphi_1(t), \quad x = 0, \quad t > 0; \\ u(l, t) = \varphi_2(t), \quad x = l, \quad t > 0; \\ u(x, 0) = \psi_1(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad t = 0; \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi_2(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad t = 0. \end{array} \right.$$

$u(x, t)$ – малые продольные или поперечные перемещения стержня,
 a – скорость звука в материале, из которого изготовлен стержень.
Если концы стержня движутся по заданным законам, то задана первая начально – краевая задача для волнового уравнения.

Если на концах стержня заданы значения силы, которая по закону Гука пропорциональна значениям производной перемещения по пространственной переменной, то ставится вторая начально-краевая задача для волнового уравнения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0; \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \varphi_1(t), \quad x = 0, \quad t > 0; \\ \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = \varphi_2(t), \quad x = l, \quad t > 0; \\ u(x, 0) = \psi_1(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad t = 0; \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi_2(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad t = 0. \end{array} \right.$$

Если концы стержня закреплены упруго, т.е. на концевые заделки действуют силы, пропорциональные перемещениям, то ставится третья начально – краевая задача для волнового уравнения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0; \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) + \alpha u(0, t) = \varphi_1(t), \quad x = 0, \quad t > 0; \\ \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) + \beta u(l, t) = \varphi_2(t), \quad x = l, \quad t > 0; \\ u(x, 0) = \psi_1(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad t = 0; \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi_2(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad t = 0. \end{array} \right.$$

Постановка задач для уравнений эллиптического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y).$$

Если $f(x, y) \neq 0$, то это уравнение Пуассона, если $f(x, y) \equiv 0$ – уравнение Лапласа.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), & (x, y) \in \Omega \\ u(x, y)|_{\Gamma} = \varphi(x, y), & (x, y) \in \Gamma \end{cases} \quad \text{– это первая краевая задача (Дирихле).}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), & (x, y) \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma} = \varphi(x, y), & (x, y) \in \Gamma \end{cases} \quad \text{– это вторая краевая задача (Неймана).}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), & (x, y) \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma} + \alpha u \Big|_{\Gamma} = \varphi(x, y), & (x, y) \in \Gamma \end{cases} \quad \text{— это третья краевая задача .}$$

Замечание: следует отметить, что в вышеперечисленных постановках число начальных условий равно порядку дифференциального уравнения по времени, а старший порядок производной по времени в начальных условиях единицу меньше порядка дифференциального уравнения по времени.

Старший порядок производной по пространственной переменной в краевых условиях на единицу меньше порядка производной в уравнении.

Основные понятия, связанные с конечно-разностной аппроксимацией дифференциальных задач

Запишем дифференциальную задачу в операторной форме

$$LU = f,$$

$$L = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \text{диффузионный}; \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \text{волновой}; \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \text{лапласиан}; \end{cases}$$

$U(x, y)$ – искомая функция, удовлетворяющая дифференциальной задаче; f – входные данные (начальные и краевые условия, правые части т.п.). Операторная форма $(LU)_h = f_h$ описывает дифференциальную задачу в узлах сетки, а операторная форма $L_h U_h = f_h$ описывает конечно – разностную схему на точном решении $U(x, y)$, т.е. в конечно – разностной схеме вместо значений сеточной функции подставлены точные значения искомой функции.

Конечно – разностные операторы L_h имеют вид

$$L_h = \begin{cases} \frac{\Delta}{\tau} - a^2 \frac{\Delta^2}{h^2} - \text{диффузионный}; \\ \frac{\Delta^2}{\tau^2} - a^2 \frac{\Delta^2}{h^2} - \text{волновой}; \\ \frac{\Delta^2}{h_1^2} + \frac{\Delta^2}{h_2^2} - \text{лапласиан.} \end{cases}$$

$L_h u_h = f_h$ – операторная форма конечно – разностной схемы.

Введем норму сеточной функции – $\|u^k\| = \max_j |u_j^k|$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Конечно – разностные схемы должны удовлетворять некоторым важным свойствам:

1) конечно – разностная схема должна аппроксимировать дифференциальную задачу на точном решении, при этом

$$\|(LU)_h - L_h U_h\| \xrightarrow{\tau, h \rightarrow 0} 0;$$

2) конечно – разностная схема должна быть устойчива по входным данным, т.е. найдется $K > 0$, такое что

$$\|u_h - \tilde{u}_h\| \leq K \|f_h - \tilde{f}_h\|,$$

где \tilde{f}_h – значения возмущенных входных данных.

3) Решение u_h , полученное с помощью конечно – разностной схемы $L_h u_h = f_h$ сходится к точному решению U , если какая либо норма разности $\|U - u_h\|$ стремится к нулю при стремлении к нулю сеточных характеристик h, τ :

$$\|U - u_h\|_{h, \tau \rightarrow 0} \rightarrow 0.$$

Теорема эквивалентности. Если конечно – разностная схема аппроксимирует на точном решении дифференциальную задачу по времени и по пространственной переменной и эта схема устойчива, то решение с помощью этой конечно – разностной схемы сходится к точному с тем же порядком по времени и по пространственной переменной.

Вычислительная математика

Математические методы в экономике 061800

Институт Международного Бизнеса и
Экономики кафедра Математики и
Моделирования

Ушаков А.А.

Безусловная минимизация функции двух переменных

Лекция № 9, 10

Метод градиентного спуска

Будем рассматривать выпуклые функции двух переменных определённые на выпуклых множествах X двумерного евклидова пространства $\bar{x} \in X \subseteq R^2$. Для того, чтобы функция двух переменных была выпуклой, используется следующий критерий выпуклости.

Если функция $g(\bar{x})$ - дважды дифференцируема на выпуклом множестве $X \subseteq R^2$ и матрица её частных производных второго порядка (матрица Гесса $(g''_{ij}(\bar{x}))$, $i, j = 1, 2$) положительно определена для всех $\bar{x} \in X$, то функция $g(\bar{x})$ является выпуклой на множестве X .

Критерий положительной определенности функции $g(\bar{x})$, он так же называется критерием Сильвестра, формулируется так:

«Если все диагональные миноры матрицы Гесса,

$$\text{т.е. } g''_{x_1x_1} \geq 0, \begin{bmatrix} g''_{x_1x_1} & g''_{x_1x_2} \\ g''_{x_1x_2} & g''_{x_2x_2} \end{bmatrix} \geq 0 \text{ для точек } \bar{x} \in X, \text{ то}$$

функция $g(\bar{x})$ является выпуклой на X ».

Пусть $g(\bar{x})$ - выпуклая дифференцируемая функция на всём множестве точек $\bar{x} \in X$ в евклидовом пространстве R^2 . Требуется найти точку минимума \bar{x}^* и минимум функции $g(\bar{x}^*)$.

Выбрав произвольное начальное приближение

$x^{(0)} \in X \subseteq R^2$, построим следующую

итерационную последовательность:

$$\bar{x}^{(k+1)} = \bar{x}^{(k)} - \alpha_k \text{grad}(g(\bar{x}^{(k)})), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

Где величины α_k (параметрические шаги) выбираются достаточно малыми из условия:

$$g(\bar{x}^{(k+1)}) < g(\bar{x}^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

Остановимся подробнее на векторном соотношении (1). Поскольку градиент функции двух переменных в ортонормированном базисе

\bar{e}_1, \bar{e}_2 имеет координаты $grad f(x) = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}, \frac{\partial g}{\partial x_2} \right)$, тогда

алгоритм (1) в скалярной форме принимает вид:

$$x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} - \alpha_k \frac{\partial g}{\partial x_1}(x^{(k)}), \quad x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} - \alpha_k \frac{\partial g}{\partial x_2}(x^{(k)}).$$

Окончание процесса устанавливается при выполнении неравенства:

$$\left| grad(g(x^{(k)})) \right| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (g'_{x_i})^2} \leq \varepsilon. \quad (3)$$



Если условие (2) не выполняется, то α_k уменьшается вдвое и алгоритм (1) повторяется. При выполнении условия (3) полагают:
 $\bar{x}^* \approx x^{(k)}, g(\bar{x}^*) \approx g(x^{(k)})$.

Пример. Методом градиентного спуска с точностью $\varepsilon = 0,05$ минимизировать функцию
 $g(\bar{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + e^{(x_1+x_2)}$.

Решение. Вначале необходимо проверить выпуклость функции на множестве $\bar{x} \in X \subseteq R^2$, для чего составляется матрица частных производных второго порядка и по критерию Сильвестра проверяется её положительная определённость:

$$g''_{x_1x_1} = 2 + e^{(x_1+x_2)}, \quad \begin{bmatrix} g'_{x_1x_1} & g'_{x_1x_2} \\ g'_{x_1x_2} & g'_{x_2x_2} \end{bmatrix} = 8 + 6e^{(x_1+x_2)} > 0.$$

Таким образом, по критерию Сильвестра заданная функция выпукла на всей плоскости x_1Ox_2 .

Начальное приближение возьмём в виде $\bar{x}^{(0)} = (0,0)$
и $\alpha_0 = 1$.

$$1\text{-й шаг: } k = 0; g(\bar{x}^{(0)}) = 1, \quad \frac{\partial g}{\partial x_1}(0,0) = 1, \quad \frac{\partial g}{\partial x_2}(0,0) = 1.$$

Из формулы (1) следует

$$x_1^{(1)} = x_1^{(0)} - a_0 \frac{\partial g}{\partial x_1}(0,0) = -1, \quad x_2^{(1)} = x_2^{(0)} - a_0 \frac{\partial g}{\partial x_2}(0,0) = -1;$$

$$g(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) = 3,145, \quad g(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) = 1,$$

т.е условие (2) не выполнено, вследствие чего необходимо уменьшить параметрический шаг вдвое, $a_0 = 0,5$, и повторяем вычисления с $\bar{x}^{(0)}$:

$$x_1^{(1)} = 0 - 0,5 \times 1 = -0,5; \quad x_2^{(1)} = 0 - 0,5 \times 1 = -0,5;$$

$$g(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) = 1,118 > g(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) = 1;$$

Условие (2) не выполнено. Уменьшаем a_0 вдвое,

т.е. $a_1 = \frac{a_0}{2} = 0,25$. Далее

$$x_1^{(1)} = 0 - 0,25 \times 1 = -0,25; \quad x_2^{(1)} = 0 - 0,25 \times 1 = -0,25$$

$$g(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) = 0,794 < g(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) = 1.$$

Условие (2) выполнено, поэтому проверяем условие остановки процесса $|\text{grad } g| \leq \varepsilon$.

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}(\bar{x}^{(1)}) = 2x_1^{(1)} + e^{x_1^{(1)} + x_2^{(1)}} = 0,106,$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_2}(\bar{x}^{(1)}) = 4x_1^{(1)} + e^{x_1^{(1)} + x_2^{(1)}} = -0,393,$$

$$|\text{grad } g(\bar{x}^{(1)})| = \sqrt{0,106^2 + (-0,393)^2} = 0,407 > \varepsilon = 0,05$$

2-й шаг: $k = 1$; $x_1^{(1)} = -0,25$; $x_2^{(1)} = -0,25$; $a_1 = 0,25$.

$$x_1^{(2)} = x_1^{(1)} - a_1 \frac{\partial g}{\partial x_1}(\bar{x}^{(1)}) = -0,25 - 0,25 \times 0,106 = -0,2765$$

$$x_2^{(2)} = x_2^{(1)} - \alpha_1 \frac{\partial g}{\partial x_2}(\bar{x}^{(1)}) = -0,25 - 0,25 \cdot (-0,393) = -0,1518;$$

$$g(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}) = 0,774 < g(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) = 0,794.$$

Оставляем значение a_1 , приняв $a_2 = a_1$. Проверяем

условия остановки в точке $\bar{x}^{(2)}$:

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}(\bar{x}^{(2)}) = 2x_1^{(2)} + e^{x_1^{(2)} + x_2^{(2)}} = 0,0983;$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_2}(\bar{x}^{(2)}) = 4x_2^{(2)} + e^{x_1^{(2)} + x_2^{(2)}} = 0,0451;$$

$$|\text{grad } g(\bar{x}^{(2)})| = \sqrt{0,0983^2 + 0,0451^2} = 0,108 > \varepsilon$$

3-й шаг: $k = 2$; $x_1^{(2)} = -0,2765$; $x_2^{(2)} = -0,1518$; $a_2 = 0,25$.

$$x_1^{(3)} = x_1^{(2)} - a_2 \frac{\partial g}{\partial x_1}(\bar{x}^{(2)}) = -0,2765 - 0,25 \times 0,0983 = -0,301;$$

$$x_2^{(3)} = x_2^{(2)} - a_2 \frac{\partial g}{\partial x_2}(\bar{x}^{(2)}) = -0,1518 + 0,25 \times 0,0451 = -0,163;$$

$$g(x_1^{(3)}, x_2^{(3)}) = 0,772 < g(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}) = 0,774.$$

Проверяем условия остановки в точке $\bar{x}^{(3)}$:

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}(\bar{x}^{(3)}) = 2x_1^{(3)} + e^{x_1^{(3)} + x_2^{(3)}} = 0,0262;$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_2}(\bar{x}^{(3)}) = 4x_2^{(3)} + e^{x_1^{(3)} + x_2^{(3)}} = -0,023;$$

$$|\text{grad } g(\bar{x}^{(3)})| = \sqrt{0,0262^2 + (-0,023)^2} = 0,035 < \varepsilon = 0,05$$

Точность достигнута следовательно, $\bar{x}^* = (-0,301; -0,163)$
а минимальное значение функции $g^* \approx 0,772$.

Метод наискорейшего спуска

Метод наискорейшего спуска отличается от метода градиентного спуска *оптимальным способом определени я параметрич еского шага α_k* , который находится из условия

$$\varphi_k(\alpha_k) = \min_{\alpha > 0} \varphi_k(\alpha), \quad \varphi_k(\alpha) = g(\bar{x}^{(k)} - \alpha \text{grad } g(\bar{x}^{(k)})).$$

После минимизации функции $\varphi(\alpha)$ по переменной α найденное значение α^* принимается за α_k , после чего реализуется метод градиентного спуска :

$$\bar{x}^{(k+1)} = \bar{x}^{(k)} - \alpha_k \text{grad } g(\bar{x}^{(k)}), \quad k = 0, 1, \square$$

Окончание итерационн ого процесса устанавливается при выполнении условия останова :

$$|\text{grad } g(\bar{x}^{(k)})| = \sqrt{\left[\frac{\partial g}{\partial x_1}(\bar{x}^{(k)}) \right]^2 + \left[\frac{\partial g}{\partial x_2}(\bar{x}^{(k)}) \right]^2} < \varepsilon$$

Таким образом, на каждом шаге метода наискорейшего спуска решается задача минимизации функции $\varphi(\alpha)$ одной переменной α .

Если $g(\bar{x}) = \frac{1}{2}(A\bar{x}, \bar{x}) + (\bar{r}, \bar{x})$, где A – симметричная матрица коэффициентов при квадратичных слагаемых, $\bar{r} = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ – коэффициенты при линейных слагаемых, $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – переменные, (\cdot, \cdot) – обозначение скалярного произведения, то величина параметрического шага α_k может быть найдена в явном виде:

$$\alpha_k = 0.5 \frac{\left(\text{grad } g(\bar{x}^{(k)}), \text{grad } g(\bar{x}^{(k)}) \right)}{\left(A \text{ grad } g(\bar{x}^{(k)}), \text{grad } g(\bar{x}^{(k)}) \right)}, \text{ причем } \text{grad } g(\bar{x}^{(k)}) = A \cdot \bar{x}^{(k)} + \bar{r}.$$

Пример. Методом наискорейшего спуска найти минимума \bar{x}^* функции $g(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_1x_2 - 7x_1 - 7x_2$. $\varepsilon = 0.01$.

Решение.

Шаг 1: $k = 0$. Начальное приближение $\bar{x}^{(0)} = (0, 0)$,

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}(\bar{x}) = 2x_1 + x_2 - 7, \quad \frac{\partial g}{\partial x_2}(\bar{x}) = 4x_2 + x_1 - 7,$$

$$\varphi_0(\alpha) = g(-7\alpha, -7\alpha) = 98\alpha(2\alpha + 1), \quad \varphi'_0(\alpha) = 392\alpha + 98, \quad \alpha_0 = -0.25,$$

$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0.25 \begin{pmatrix} -7 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/4 \\ -7/4 \end{pmatrix};$$

$$|\text{grad } g(\bar{x}^{(1)})| = \sqrt{\left[\frac{\partial g}{\partial x_1}(\bar{x}^{(1)})\right]^2 + \left[\frac{\partial g}{\partial x_2}(\bar{x}^{(1)})\right]^2} = \sqrt{\left(-\frac{49}{4}\right)^2 + \left(-\frac{63}{4}\right)^2} \approx 19.9531 > \varepsilon.$$

Шаг 2: $k = 1$, $\bar{x}^{(1)} = (-1.75; -1.75)$; $\frac{\partial g}{\partial x_1}(\bar{x}^{(1)}) = -\frac{49}{4}$, $\frac{\partial g}{\partial x_2}(\bar{x}^{(1)}) = -\frac{63}{4}$,

$$\alpha_1 = 0.5 \frac{(\partial g / \partial x_1)^2 + (\partial g / \partial x_2)^2}{(\partial g / \partial x_1)^2 + 2(\partial g / \partial x_2)^2 + (\partial g / \partial x_1)(\partial g / \partial x_2)} = \frac{(49^2 + 63^2)}{2(49^2 + 49 \cdot 63 + 2 \cdot 63^2)} = 0.2372$$

$$\begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/4 \\ -7/4 \end{pmatrix} - 0.2372 \cdot \begin{pmatrix} -49/4 \\ -63/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1557 \\ 1.9859 \end{pmatrix}. \text{ Очевидно, } \text{grad } g(\bar{x}^{(2)}) > \varepsilon.$$

Шаг 3: $k = 2$, $\bar{x}^{(2)} = (1.1557; 1.9859)$; $\frac{\partial g}{\partial x_1}(\bar{x}^{(2)}) = -2,7027$, $\frac{\partial g}{\partial x_2}(\bar{x}^{(2)}) = 2,0993$,

$$\alpha_2 = 0.560638, \quad \begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1557 \\ 1.9859 \end{pmatrix} - 0.560638 \cdot \begin{pmatrix} 2.7027 \\ 2.0993 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.67094 \\ 0.80895 \end{pmatrix};$$



Шаг 4. $\kappa = 4$, $\frac{\partial g}{\partial x_1}(\bar{x}^{(3)}) = -0.84917$, $\frac{\partial g}{\partial x_2}(\bar{x}^{(3)}) = -1.09326$,

$\text{grad } g(\bar{x}^{(3)}) > \varepsilon$ — очевидно, $\alpha_3 = 0.237173$; $(x_1^{(4)}; x_2^{(4)}) = (2.87234; 1.06824)$;

Шаг 5. $k = 5$. $\frac{\partial g}{\partial x_1}(\bar{x}^{(4)}) = -0.18708$ $\frac{\partial g}{\partial x_2}(\bar{x}^{(4)}) = 0.1453$,

$\text{grad } g(\bar{x}^{(4)}) > \varepsilon$; $\alpha_4 = 0.56065$; $(x_1^{(5)}; x_2^{(5)}) = (2.97723; 0.98678)$;

Шаг 6. $k = 6$. $\frac{\partial g}{\partial x_1}(\bar{x}^{(5)}) = -0.05876$, $\frac{\partial g}{\partial x_2}(\bar{x}^{(5)}) = -0.07565$,

$\text{grad } g(\bar{x}^{(5)}) > \varepsilon$; $\alpha_5 = 0.23715$; $(x_1^{(7)}; x_2^{(7)}) = (2.99116; 1.00472)$;

Шаг 7. $k = 7$. $\frac{\partial g}{\partial x_1}(\bar{x}^{(7)}) = -0.01296$, $\frac{\partial g}{\partial x_2}(\bar{x}^{(7)}) = 0.01004$, $\text{grad } g(\bar{x}^{(7)}) > \varepsilon$;

$\alpha_6 = 0.561587$, $(x_1^{(8)}; x_2^{(8)}) = (2.99844; 0.99908)$, $\text{grad } g(\bar{x}^{(8)}) < \varepsilon$. Конец.

Метод сопряженных направлений

Метод сопряженных направлений состоит в построении последовательности

$$\bar{x}^{(k+1)} = \bar{x}^{(k)} - \alpha_k \bar{p}^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где α_k выбирается так же, как и в методе наискорейшего спуска :

$$\varphi_k(\alpha_k) = \min_{\alpha > 0} \varphi_k(\alpha), \quad \varphi_k(\alpha) = g(\bar{x}^{(k)} - \alpha \bar{p}^{(k)}), \quad (2)$$

а направление спуска $\bar{p}^{(k)}$ — с помощью выражения

$$\bar{p}^{(k)} = \text{grad } g(\bar{x}^{(k)}) + \beta_k \bar{p}^{(k-1)}, \quad k = 1, 2, \dots; \quad (3)$$

$$\beta_0 = 0, \quad \bar{p}^{(0)} = \text{grad } g(\bar{x}^{(0)}); \quad (4)$$

$$\beta_k = \frac{|\text{grad } g(\bar{x}^{(k)})|^2}{|\text{grad } g(\bar{x}^{(k-1)})|^2}. \quad (5)$$

Критерием останова является условие

$$|\text{grad } g(\bar{x}^{(k)})| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial g}{\partial x_i}(\bar{x}^{(k)}) \right]^2} \leq \varepsilon. \quad (6)$$

Заметим, что вектор $\bar{p}^{(k)}$ определяется не только антиградиентом $\left(-grad g(\bar{x}^{(k)})\right)$, но и направлением спуска $\left(-\bar{p}^{(k-1)}\right)$ на предыдущем шаге. Это позволяет более полно, чем в методах градиентного и наискорейшего, учитывать особенности функции $g(\bar{x})$ при построении итерационного процесса. Для квадратичных функций, определенных в R^n , требуется не больше n итераций метода сопряженных направлений.

Пример.

Методом сопряженных направлений найти точки минимума \bar{x}^* функции $g(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_1x_2 - 7x_1 - 7x_2$.

Решение. Поскольку $g(\bar{x})$ – квадратичная функция, то точка минимума \bar{x}^* может быть найдена после двух шагов метода сопряженных направлений.

Шаг 1: $k = 0$. Выбрав начальное приближение $\bar{x}^{(0)} = (0; 0)$, по формулам (2), (4) находим

$$\bar{p}^{(0)} = \text{grad } g(\bar{x}^{(0)}) = (2x_1 + x_2 - 7; 4x_2 + x_1 - 7)|_{\bar{x}^{(0)}} = (-7; -7);$$

$$\varphi_0(\alpha) = g(\bar{x}^{(0)} - \alpha \bar{p}^{(0)}) = 98(2\alpha^2 - \alpha).$$

Из условия минимума функции $\varphi_0(\alpha)$ получим $\alpha_0 = 0.25$.

Отсюда

$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} - \alpha_0 \begin{pmatrix} p_1^{(0)} \\ p_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 0.25 \begin{pmatrix} -7 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/4 \\ 7/4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Шаг 2. } k = 1. \text{ grad } g(\bar{x}^{(1)}) = \left(2 \cdot \frac{7}{4} + \frac{7}{4} - 7; 4 \cdot \frac{7}{4} + \frac{7}{4} - 7 \right) = \left(-\frac{7}{4}; \frac{7}{4} \right).$$

$$\beta_1 = \frac{|\text{grad } g(\bar{x}^{(1)})|}{|\text{grad } g(\bar{x}^{(0)})|} = \frac{2 \cdot 49/16}{2 \cdot 49} = \frac{1}{16}.$$

Вычисляем направление спуска $\begin{pmatrix} p_1^{(1)} \\ p_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial g / \partial x_1 \\ \partial g / \partial x_2 \end{pmatrix}(\bar{x}^{(1)}) + \beta_1 \begin{pmatrix} p_1^{(0)} \\ p_2^{(0)} \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} -7/4 \\ 7/4 \end{pmatrix} + \frac{1}{16} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -35/16 \\ 21/16 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\varphi_1(\alpha) = \frac{49}{32} \left(\frac{7}{2} \alpha^2 - 4\alpha - 392 \right)$ и $\alpha_1 = \frac{4}{7}$.

Окончательно :

$$\begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix} - \alpha_1 \begin{pmatrix} p_1^{(1)} \\ p_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/4 \\ 7/4 \end{pmatrix} - \frac{4}{7} \cdot \begin{pmatrix} -35/16 \\ 21/16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, $\bar{x}^* = (3; 1)$; $g^* = g(\bar{x}^*) = -14$

Математические методы в экономике 061800

Институт Международного Бизнеса и
Экономики кафедра Математики и
Моделирования

Ушаков А.А.

Вычислительная математика

Список литературы

Основная литература

- 1). Численные методы в примерах и задачах : Учеб. пособие/
В.И.Киреев, А.В.Пантелеев. – 2 – е изд. стер. – М. : Высш. шк., 2006 – 480 с.
- 2). Основы численных методов : Учебник для вузов/ В.М.Вержбицкий.
– М. : Высш. шк., 2002. – 840 с.
- 3). Численные методы. – М. : ФИЗМАТЛИТ, Формалев В.Ф.,
Ревизников Д.Л., 2004. – 400 с.
- 4). Лекции по вычислительной математике : Учебное пособие \
И.Б. Петров, А.И. Лобанов. – М. : Интернет– Университет Информационных
Технологий; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. – 523 с.