Вычислительная математика

Математические методы в экономике 061800

Институт Международного Бизнеса и Экономики кафедра Математики и Моделирования

Ушаков А.А.

Численные методы решения ОДУ

Лекция № 6, 7

Численные методы решения задач для ОДУ

Метод Эйлера. Метод Эйлера – Коши.

Дана задача Коши для ОДУ $1-$*го порядка*:

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \qquad (1)$$

Нужно найти решение данного уравнения в каждой точке отрезка $[x_0, b]$.

Разобьём отрезок $[x_0, b]$ *на* n *равных промежутков длиной* $h = \dfrac{b - x_0}{n}$.

Получим сетку $\{x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ *с шагом* h, $x_i = x_0 + hi$, $i = 0, 1, \ldots, n$ – *узлы сетки*.

Проинтегрируем данное уравнение на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$,

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))dx. \qquad (2)$$

Уравнение (2) *эквивалентно задаче Коши* (1). *Вычислим интеграл в* (2) *по квадратурной формуле прямоугольников, взяв за основной узел* x_i.

$$y_{i+1} = y_i + h\,f(x_i, y_i) + O(h^2), \quad y_0 = y(x_0), \; i = 0,1,\ldots,n. \quad (3)$$

Формула (3) – *алгоритм метода Эйлера численного интегрирования задачи Коши.*

На всем интервале численного интегрирования задачи Коши метод Эйлера имеет погрешность порядка $O(h)$, *поэтому является методом* 1 – *го порядка точности.*

Если интеграл в (2) *вычислить на отрезке* $[x_i, x_{i+1}]$ *по методу трапеций с точностью* $O(h^2)$, *получим*

$$y_{i+1} = y_i + 0.5h\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})\right] + O(h^2)\,. \qquad (4)$$

Применяют данную формулу следующим образом : сначала находят $\widetilde{y}_{I+1}$, *например, по фомуле Эйлера* (3), *потом в* (4) *подставляют вместо* y_{i+1}. *Точность данной схемы увеличиваеться до* $O(h^2)$

$$\begin{cases} \widetilde{y}_{i+1} = y_i + h\,f(x_i, y_i), \\ y_{i+1} = y_i + \dfrac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \widetilde{y}_{i+1})\right]. \end{cases}$$

Полученную схему можно называть схемой Эйлера – Коши, схемой Эйлера с пересчетом или схемой предиктор – корректор.

Пример.

Методами Эйлера и Эйлера – Коши с шагом $h = 0.1$ *численно проинтегрировать следующую задачу Коши для ОДУ* $1-$*го порядка до значения* $x = 0.2$ *включительно*:

$y' = x + y, \quad y(0) = 1, \quad h = 0.1.$

Аналитическое решение – $y(x) = 2e^x - x - 1.$

Вычислим его в требуемых точках: $y(0.1) = 1.1103442, \ y(0.2) = 1.242806.$

Метод Эйлера.

$$y_{i+1} = y_i + h(x_i + y_i), \quad i = 0,1,2.$$

$$i = 0;\ x_0 = 0;\ y_0 = 1: \quad y_1 = y_0 + h(x_0 + y_0) = 1 + 0.1(0+1) = 1.1;$$

$$i = 1;\ x_1 = 1.1;\ y_1 = 1.1: \quad y_2 = y_1 + h(x_1 + y_1) = 1.1 + 0.1(0.1 + 1.1) = 1.22;$$

Метод Эйлера – Коши.

$$\begin{cases} \tilde{y}_{i+1} = y_i + h(x_i + y_i), \\ y_{i+1} = y_i + \dfrac{h}{2}\left[(x_i + y_i) + (x_{i+1} + \tilde{y}_{i+1})\right], \end{cases}$$

$i = 0;\ x_0 = 0;\ y_0 = 1:$

$$\begin{cases} \tilde{y}_1 = y_0 + h(x_0 + y_0) = 1 + 0.1(0+1) = 1.1, \\ y_1 = 1 + \dfrac{0.1}{2}[(0+1) + (0.1+1.1)] = 1.11; \end{cases}$$

$i = 1;\ x_1 = 0.1;\ x_2 = 0.2;\ \ y_1 = 1.11:$

$$\begin{cases} \tilde{y}_2 = 1.11 + 0.1(0.1+1.11) = 1.231; \\ y_2 = 1.11 + \dfrac{0.1}{2}[(0.1+1.11) + (0.2+1.231)] = 1.24205. \end{cases}$$

Поскольку метод Эйлера является методом первого порядка точности, то только пеорвая цифра после запятой являтся верной, а вторая – нет. Это подтверждает сравнение y_1 с $y(0.1)$ и y_2 с $y(0.2)$.

Метод Эйлера – Коши является методом второго порядка точности, то первые две цифры после запятой считаются верными (сравнить y_1 с $y(0.1)$ и y_2 с $y(0.2)$).

Метод Рунге-Кутта

Метод Рунге – Кутта имеет погрешность, пропорциональную h^4 и поэтому является одним из наиболее употребительных методов численного решения задачи Коши для ОДУ.

Для вычисления интеграла в (2) *используем квадратурную формулу Симпсона. Для формулы Симпсона необходимо три узла. В качестве недостающего узла возьмем середину отрезка* $[x_i, x_{i+1}]$, *т.е.* $x_{i+1/2} = x_i + h/2$.

Формула (2) *преобразуется к виду*

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}\left[f(x_i, y_i) + 4f\left(x_{i+1/2}, y_{i+1/2}\right) + f\left(x_{i+1}, y_{i+1}\right)\right].$$

Два последних слагаемых вычисляем следующим образом

$$4f\left(x_{i+1/2}, y_{i+1/2}\right) + f\left(x_{i+1}, y_{i+1}\right) = 2f\left(x_{i+1/2}, y_i + \frac{\widetilde{\Delta} y_i}{2}\right) + 2f\left(x_{i+1/2}, y_i + \frac{\widetilde{\widetilde{\Delta}} y_i}{2}\right) + f\left(x_{i+1}, y_i + \Delta y_i\right).$$

Если обозначить через

$$k_i^1 = hf\left(x_i, y_i\right), \quad k_i^2 = hf\left(x_{i+1/2}, y_i + \frac{k_i^1}{2}\right),$$

$$k_i^3 = hf\left(x_{i+1/2}, y_i + \frac{k_i^2}{2}\right), \quad k_i^4 = hf\left(x_{i+1}, y_i + k_i^3\right),$$

то схема вычислений будет следующая

$$\left\{ y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, \quad \Delta y_i = \frac{1}{6}\left(k_i^1 + 2k_i^2 + 2k_i^3 + k_i^4\right). \right.$$

Пример.

Методом Рунге – Кутта с шагом $h = 0.1$ *численно проинтегрировать задачу Коши для ОДУ* 1 *– го порядка из предыдущего примера до значения* $x = 0.2$ *включительно*:

$$y' = x + y, \quad y(0) = 1, \quad h = 0.1.$$

Аналитическое решение – $y(x) = 2e^x - x - 1.$

Значение точного решения: $y(0.1) = 1.1103442, \ y(0.2) = 1.242806.$

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, \quad \Delta y_i = \frac{1}{6}\left(k_i^1 + 2k_i^2 + 2k_i^3 + k_i^4\right),$$

$$k_i^1 = hf(x_i, y_i) = h(x_i + y_i),$$

$$k_i^2 = hf\left(x_{i+1/2}, y_i + \frac{k_i^1}{2}\right) = h\left[\left(x_i + \frac{h}{2}\right) + \left(y_i + \frac{k_i^1}{2}\right)\right],$$

$$k_i^3 = hf\left(x_{i+1/2}, y_i + \frac{k_i^2}{2}\right) = h\left[\left(x_i + \frac{h}{2}\right) + \left(y_i + \frac{k_i^2}{2}\right)\right],$$

$$k_i^4 = hf\left(x_{i+1}, y_i + k_i^3\right) = h\left[(x_i + h) + \left(y_i + k_i^3\right)\right].$$

$$\begin{cases} \mathrm{i}=0;\ x_0=0;\ x_{0+1/2}=0.05;\ \ x_1=0.1;\ \ y_0=1: \\ k_0^1=h(x_0+y_0)=0.1(0+1)=0.1; \\ k_0^2=h\left[\left(x_0+\dfrac{h}{2}\right)+\left(y_0+\dfrac{k_0^1}{2}\right)\right]=0.1\left[0.05+\left(1+\dfrac{0.1}{2}\right)\right]=0.11; \\ k_0^3=h\left[\left(x_0+\dfrac{h}{2}\right)+\left(y_0+\dfrac{k_0^2}{2}\right)\right]=0.1\left[0.05+\left(1+\dfrac{0.11}{2}\right)\right]=0.1105; \\ k_0^4=h\left[(x_0+h)+(y_0+k_0^3)\right]=0.1[0.1+(1+0.1105)]=0.1211; \\ \Delta y_0=\dfrac{1}{6}\left(k_0^1+2k_0^2+2k_0^3+k_0^4\right),\quad y_1=y_0+\Delta y_0=1.11035. \end{cases}$$

Аналогично проводим вычисления на следующем шаге

$$\begin{cases} \mathrm{i}=1;\ x_1=0.1;\ x_{1+1/2}=0.15;\ \ x_2=0.2;\ \ y_1=1.11035: \\ k_1^1=0.12104,\ \ k_1^2=0.132087,\ \ k_1^3=0.13264,\ \ k_1^4=0.1443, \\ \Delta y_1=\dfrac{1}{6}\left(k_0^1+2k_0^2+2k_0^3+k_0^4\right)=0.13247,\quad y_2=y_1+\Delta y_1=1.24282. \end{cases}$$

Метод Рунге – Кутта является методом четвертого порядка точности, то первые четыре цифры после запятой считаются верными (сравнить y_1 *с* $y(0.1)$ *и* y_2 *с* $y(0.2)$*).*

Численные методы решения краевых задач для ОДУ

Пусть на отрезке $x \in [a,b]$ *определена дважды непрерывно дифференцируемая функция* $y(x)$, *поведение которой описывается линейным неоднородным ОДУ* $2-$*го порядка*

$$\begin{cases} y'' + m(x)y' - r(x)y = f(x), \quad a < x < b; \\ y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b. \end{cases} \qquad (1)$$

Данная задача называется первой краевой задачей для ОДУ.

Если на границах заданы значения производных искомой функции, то такие условия называются граничными условиями $2-$*го рода*:

$$y'(a) = y_a, \quad y'(b) = y_b,$$

а задача называется второй краевой задачей ОДУ.

Если на границах заданы линейные комбинации искомой функции и её первой производной:

$$y'(a) + \alpha y(a) = y_a, \quad y'(b) + \beta y(b) = y_b, \qquad (2)$$

то такие условия называются граничными условиями третьего рода, а задача называется третьей краевой задачей ОДУ.

Теорема. *Если функции* $m(x),\ r(x),\ f(x)\in C_2[0,1],\ r(x)\ge 0$ *на отрезке* $[0,1]$, *то краевая задача* (1) *имеет единственное решение* $y(x)\in C_4[0,1]$.

Решение первой краевой задачи

После дискритизации (1) *получим СЛАУ с трехдиагональной матрицей*

$$a_i y_{i-1} - b_i y_i + c_i y_{i+1} = f_i, \qquad i = 1,\ldots,n-1;$$

$$y_0 = y_a, \quad i = 0, \qquad y_n = y_b, \quad i = n,$$

$$a_i = \frac{1}{h^2} - \frac{m_i}{2h}; \quad b_i = \frac{2}{h^2} + r_i; \quad c_i = \frac{1}{h^2} + \frac{m_i}{2h}.$$

Полагаем $i = 1$. *Первое слагаемое в первом уравнении перенесём в правую часть и положим* $a_1 = 0$. *В последнем уравнении* $(i = n-1)$ *последнее слагаемое перенесём в правую часть и положим* $c_{n-1} = 0$

$$\begin{cases} -b_1 y_1 + c_1 y_2 = f_1 - a_1 y_a = f_1^*, \quad a_1 = 0, \\ a_i y_{i-1} - b_i y_i + c_i y_{i+1} = f_i, \quad i = 2,\ldots,n-2, \\ a_{n-1} y_{n-2} - b_{n-1} y_{n-1} = f_{n-1} - c_{n-1} y_b = f_{n-1}^*, \quad c_{n-1} = 0. \end{cases}$$

Теперь СЛАУ пригодна для использования метода прогонки (матрица трёхдиагональная и $a_1 = c_{n-1} = 0$). *Определяем прогоночные коэффициенты*

$$p_i = \frac{c_i}{b_i - a_i p_{i-1}}; \quad q_i = \frac{a_i q_{i-1} - f_i}{b_i - a_i p_{i-1}}, \qquad i = 1, \ldots, n-1,$$

$$p_1 = -\frac{c_1}{b_1}, \quad q_1 = -\frac{f_1^*}{b_1}, \text{ так как } a_1 = 0,$$

$$p_{n-1} = 0, \quad \text{так как } c_{n-1} = 0.$$

Значения y_i *при* $i = n-1,\ n-2, \ldots, 1$ *определяются при обратном ходе по формуле* $y_i = p_i y_{i+1} + q_i$

$$\begin{cases} i = n-1: & y_{n-1} = q_{n-1}, \\ i = n-2: & y_{n-2} = p_{n-2} y_{n-1} + q_{n-2}, \\ \ldots & \\ i = 1: & y_1 = p_1 y_2 + q_1. \end{cases}$$

Решение второй и третьей краевых задач

Предположим, что искомая функция дважды непрерывно дифференцируема не только во внутренних точках расчётной области, но и на границах, т.е. $y(x) \in C_2[a,b]$. *С этой целью разложим точное решение в ряд Тейлора в окрестностях точек* $x_0 = a$ *и* $x_n = b$ *до третьей производной включительно*

$$y_1 = y(x_0 + h) = y_0 + y_0' h + y_0'' h^2/2 + O(h^3),$$

$$y_{n-1} = y(x_n - h) = y_n - y_n' h + y_n'' h^2/2 + O(h^3). \qquad (3)$$

Находим из уравнения вторую производную

$$y_0'' = f_0 - m_0 y_0' + r_0 y_0, \quad y_n'' = f_n - m_n y_n' + r_n y_n$$

а из разложения (3) *– первую производную*

$$y_0' = \frac{2(y_1 - y_0)}{(2 - m_0 h)h} - \frac{h}{(2 - m_0 h)}\left(f_0 + r_0 y_0\right) + O\left(h^2\right),$$

$$y_n' = \frac{2(y_n - y_{n-1})}{(2 + m_n h)h} + \frac{h}{(2 + m_n h)}\left(f_n + r_n y_n\right) + O\left(h^2\right).$$

В результате граничные условия (2) *аппроксимируются со вторым порядком точности и имеют вид*

$$-b_0y_0+c_0y_1=f_0^*,\quad a_ny_{n-1}-b_ny_n=f_n^*,$$

где $b_0=\dfrac{2}{h(2-m_0h)}+\dfrac{r_0h}{2-m_0h}-\alpha,\quad c_0=\dfrac{2}{h(2-m_0h)},\quad f_0^*=y_a+\dfrac{hf_0}{2-m_0h},$

$$a_n=-\frac{2}{h(2-m_nh)},\quad b_n=-\frac{2}{h(2+m_nh)}-\frac{r_nh}{2+m_nh}-\beta,\qquad f_n^*=y_b-\frac{hf_n}{2+m_nh}.$$

после преобразований получаем СЛАУ

$$\begin{cases} i=0, & -b_0y_0+c_0y_1=f_0^*,\ \ a_0=0,\\ i=1,\dots,n-1, & a_iy_{i-1}-b_iy_i+c_iy_{i+1}=f_i\,,\\ i=n, & a_ny_{n-1}-b_ny_n=f_n^*,\quad c_n=0\,. \end{cases}$$

Таким образом, результирующая СЛАУ с трехдиагональной матрицей теперь будет содержать $n+1$ *уравнение, каждое из которых получено со вторым порядком точности. Для её решения используется метод прогонки, поскольку* $a_0=c_n=0$.

Пример. *Найти приближенное решение краевой задачи*

$$\begin{cases} y'' + y = 1, \qquad 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ y'(0) = 0, \quad y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) - y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -2. \end{cases}$$

Сравнить точное решение $y(x) = 1 + \cos x$ *с приближенным, найденным с шагом* $h = \dfrac{\pi}{6}$, $n = 3$. *Коэффициенты уравнения* $m(x) = 0$, $r(x) = -1$, $f(x) = 1$, $\alpha = 0$, $\beta = -1$, $y_a = 0$, $y_b = -2$.

Используя результаты решения второй и третьей краевых задач, запишем соответствующую СЛАУ и решим её

$$\begin{cases} i = 0, & -b_0 y_0 + c_0 y_1 = f_0^*, \quad a_0 = 0, \\ i = 1,2, & a_i y_{i-1} - b_i y_i + c_i y_{i+1} = f_i, \\ i = 3, & a_3 y_2 - b_3 y_3 = f_3^*, \quad c_3 = 0, \end{cases}$$

где $b_0 = \dfrac{2 - h^2}{2h}$, $c_0 = \dfrac{1}{h}$, $f_0^* = \dfrac{h}{2}$, $a_3 = -\dfrac{1}{h}$, $b_3 = \dfrac{h^2 + 2h - 2}{2h}$, $f_3^* = -2 - \dfrac{h}{2}$,

$a_i = 1$, $b_i = 2 - h^2$, $c_i = 1$, $f_i = h^2$, $\quad i = 1, 2.$

Вычисляем прогоночные коэффициенты

$$p_i = \frac{c_i}{b_i - a_i p_{i-1}}; \quad q_i = \frac{a_i q_{i-1} - f_i}{b_i - a_i p_{i-1}}, \quad i = 1,2,$$

$$p_0 = \frac{c_0}{b_0}, \quad q_0 = -\frac{f_0^*}{b_0}, \quad p_3 = 0, \quad q_3 = \frac{a_3 q_2 - f_3^*}{b_3 - a_3 p_2}.$$

Окончательно, приближённое решение вычисляем обратным ходом и приведем для сравнения точное решение

$$y_3 = 0.98045, \quad y_2 = 1.51692, \quad y_1 = 1.91168, \quad y_0 = 2.05650,$$

$$y_3^t = 1, \qquad y_2^t = 1.5, \qquad y_1^t = 1,86603, \quad y_0^t = 2.$$

Приведём значения погрешностей $(h^2 = 0.27415)$

$$\Delta y_0 = \left| y_0 - y_0^t \right| = 0.01955, \quad \Delta y_1 = \left| y_1 - y_1^t \right| = 0.01692,$$

$$\Delta y_2 = \left| y_2 - y_2^t \right| = 0.04565, \quad \Delta y_3 = \left| y_3 - y_3^t \right| = 0.0565.$$

Вычислительная математика

Математические методы в экономике 061800

Институт Международного Бизнеса и Экономики кафедра Математики и Моделирования

Ушаков А.А.

Численные методы решения уравнений в частных производных

Лекция № 8

Метод сеток для уравнения теплопроводности

В одномерном по пространству случаях однородное уравнение теплопроводности имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0.$$

$$\begin{cases} u(0, t) = \varphi_1(t), & x = 0, \quad t > 0, \\ u(l, t) = \varphi_2(t), & x = l, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \psi(x), & 0 \le x \le l, \quad t = 0. \end{cases} \qquad - \textit{Первая начально} - \textit{краевая задача.}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \varphi_1(t), \ x = 0, \ t > 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(l,t) = \varphi_2(t), \ x = l, \ t > 0, \end{cases} \qquad - \textit{Вторая начально} - \textit{краевая задача.}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) + \alpha\, u(0,t) = \varphi_1(t), \ x = 0, \ t > 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(l,t) + \beta\, u(l,t) = \varphi_2(t), \ x = l, \ t > 0, \end{cases} \qquad - \textit{Третья начально} - \textit{краевая задача.}$$

ВГУЭС

Нанесем на пространственно – временную область $0 \le x \le l,\ 0 \le t \le T$ *конечно – разностную сетку* $w_{h,\tau}$:

$$w_{h,\tau} = \{x_j = jh,\ j = 0,\ldots,N,\ t^k = k\tau,\ k = 0,\ldots,K\},\ h = \frac{l}{N},\ \tau = \frac{T}{K}.$$

Определим сеточную функцию $u_j^k = u(x_j, t^k)$ *и построим явную конечно – разностную схему для первой начально – краевой задачи*

$$u_j^{k+1} - u_j^k = \frac{a^2\tau}{h^2}\cdot\left(u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k\right) + O\left(h^2 + \tau\right),\quad j = 0,\ldots,N-1,\ k = 0,\ldots,K-1;$$

$$u_0^{k+1} = \varphi_1(t^{k+1}),\quad u_N^{k+1} = \varphi_2(t^{k+1}),\quad k = 0,\ldots,K;$$

$$u_j^0 = \psi\left(x_j\right),\quad j = 0,\ldots,N.$$

Можно построить неявную конечно – разностную схему для той же задачи

$$u_j^{k+1} - u_j^k = \frac{a^2\tau}{h^2}\left(u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}\right) + O\left(h^2 + \tau\right),\ j = 0,\ldots,N-1,\ k = 0,\ldots,K-1;$$

с теми же начальными и краевыми условиями.

Решение по явной схеме получается достаточно просто

$$u_j^{k+1} = u_j^k + \sigma \cdot \left(u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k\right), \ \ \sigma = \frac{a^2\tau}{h^2}, \ \ j = 0,\ldots,N-1, \ \ k = 0,\ldots,K-1.$$

с единственным условием, называемым условием устойчивости Куранта $\sigma = \dfrac{a^2\tau}{h^2} \le \dfrac{1}{2}$. *Это условие связывает шаги по времени* τ *и по координате* h. *Поэтому разностная схема называется условно устойчивой.*

Решение по неявной схеме осуществляется методом прогонки, так как разностную схему можно преобразовать в СЛАУ с трехдиагональной матрицей, а на шаги по времени τ *и по координате* h *не накладывается ни каких условий*

$$\begin{cases} -b_1u_1^{k+1} + c_1u_2^{k+1} = f_1, \ \ a_1 = 0, \ \ j = 1, \\ a_ju_{j-1}^{k+1} - b_ju_j^{k+1} + c_ju_{j+1}^{k+1} = f_j, \ \ j = 2,\ldots,N-2, \\ a_{N-1}u_{N-2}^{k+1} - b_{N-1}u_{N-1}^{k+1} = f_{N-1}, \ \ c_{N-1} = 0, \ \ j = N-1, \end{cases}$$

где $a_j = \sigma, \ \ j = 2,\ldots N-1, \ \ b_j = (1+2\sigma), \ \ j = 1,\ldots,N-1; \ \ c_j = \sigma, \ \ j = 1,\ldots,N-2;$

$f_j = -u_j^k, \ \ j = 2,\ldots,N-2; \ \ f_1 = -\left[u_1^k + \sigma \cdot \varphi_1(t^{k+1})\right]; \ \ f_{N-1} = -\left[u_{N-1}^k + \sigma \cdot \varphi_2(t^{k+1})\right]$

Постановка задач для волнового уравнения

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < l, \quad t > 0\,; \\ u(0,t) = \varphi_1(t), & x = 0, \quad t > 0; \\ u(l,t) = \varphi_2(t), & x = l, \quad t > 0; \\ u(x,0) = \psi_1(x), & 0 \le x \le l, \quad t = 0; \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi_2(x), & 0 \le x \le l, \quad t = 0\,. \end{cases}$$

$u(x,t)$ – *малые продольные или поперечные перемещения стержня,*

a – *скорость звука в материале, из которого изготовлен стержень.*

Если концы стержня движутся по заданным законам, то задана первая начально – краевая задача для волнового уравнения.

Если на концах стержня заданы значения силы, которая по закону Гука пропорциональна значениям производной перемещения по пространственной переменной, то ставится вторая начально–краевая задача для волнового уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < l, \quad t > 0; \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \varphi_1(t), & x = 0, \quad t > 0; \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(l,t) = \varphi_2(t), & x = l, \quad t > 0; \\ u(x,0) = \psi_1(x), & 0 \le x \le l, \quad t = 0; \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi_2(x), & 0 \le x \le l, \quad t = 0. \end{cases}$$

Если концы стержня закреплены упруго, т.е. на концевые заделки действуют силы, пропорциональные перемещениям, то ставится третья начально–краевая задача для волнового уравнения:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < l, \quad t > 0; \\[2mm]
\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) + \alpha u(0,t) = \varphi_1(t), & x = 0, \quad t > 0; \\[2mm]
\dfrac{\partial u}{\partial x}(l,t) + \beta u(l,t) = \varphi_2(t), & x = l, \quad t > 0; \\[2mm]
u(x,0) = \psi_1(x), & 0 \le x \le l, \quad t = 0; \\[2mm]
\dfrac{\partial u}{\partial t}\left(x,0\right) = \psi_2(x), & 0 \le x \le l, \quad t = 0.
\end{cases}
$$

Постановка задач для уравнений эллиптического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y).$$

Если $f(x,y)\neq 0$, *то это уравнение Пуассона, если* $f(x,y)\equiv 0$ *– уравнение Лапласа.*

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y), & (x,y)\in\Omega\\ u(x,y)\big|_{\Gamma}=\varphi(x,y), & (x,y)\in\Gamma\end{cases}$$

– это первая краевая задача (Дирихле).

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y), & (x,y)\in\Omega\\ \dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma}=\varphi(x,y), & (x,y)\in\Gamma\end{cases}$$

– это вторая краевая задача (Неймана).

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma} + \alpha u\Big|_{\Gamma} = \varphi(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma \end{cases}$$ *– это третья краевая задача .*

Замечание: следует отметить, что в вышеперечисленных постановках число начальных условий равно порядку дифференциального уравнения по времени, а старший порядок производной по времени в начальных условиях единицу меньше порядка дифференциального уравнения по времени.

Старший порядок производной по пространственной переменной в краевых условиях на единицу меньше порядка производной в уравнении.

Основные понятия, связанные с конечно-разностной аппроксимацией дифференциальных задач

Запишем дифференциальную задачу в операторной форме

$$LU = f,$$

$$L = \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} - \text{диффузионный}; \\ \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} - \text{волновой}; \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} - \text{лапласиан}; \end{cases}$$

$U(x, y)$ *– искомая функция, удовлетворяющая дифференциальной задаче;* f *– входные данные (начальные и краевые условия, правые части т.п.). Операторная форма* $(LU)_h = f_h$ *описывает дифференциальную задачу в узлах сетки, а операторная форма* $L_h U_h = f_h$ *описывает конечно – разностную схему на точном решении* $U(x, y)$*, т.е. в конечно – разностной схеме вместо значений сеточной функции подставлены точные значения искомой функции.*

Конечно – разностные операторы L_h *имеют вид*

$$L_h = \begin{cases} \dfrac{\Delta}{\tau} - a^2 \dfrac{\Delta^2}{h^2} - \textit{диффузионный}; \\ \dfrac{\Delta^2}{\tau^2} - a^2 \dfrac{\Delta^2}{h^2} - \textit{волновой}; \\ \dfrac{\Delta^2}{h_1^2} + \dfrac{\Delta^2}{h_2^2} - \textit{лапласиан}. \end{cases}$$

$L_h u_h = f_h$ *– операторная форма конечно – разностной схемы.*

Введем норму сеточной функции – $\left\| u^k \right\| = \max_j \left| u_j^k \right|,\ k = 0, 1, 2, \dots$

Конечно – разностные схемы должны удовлетворять некоторым важным свойствам:

1) *конечно – разностная схема должна аппроксимировать дифферен – циальную задачу на точном решении, при этом*

$$\left\| (LU)_h - L_h U_h \right\| \to_{\tau, h \to 0} \to 0;$$

2) *конечно – разностная схема должна быть устойчива по входным данным, т.е. найдется* $K > 0$, *такое что*

$$\|u_h - \tilde{u}_h\| \le K \|f_h - \tilde{f}_h\|,$$

где $\tilde{f}_h$ – *значения возмущенных входных данных.*

3) *Решение* u_h, *полученное с помощью конечно – разностной схемы* $L_h u_h = f_h$ *сходится к точному решению* U, *если какая либо норма разности* $\|U - u_h\|$ *стремится к нулю при стремлении к нулю сеточных характеристик* h, τ:

$$\|U - u_h\|_{h,\tau \to 0} \to 0.$$

Теорема эквивалентности. *Если конечно – разностная схема апп – роксимирует на точном решении дифференциальную задачу по времени и по пространственной переменной и эта схема устой – чива, то решение с помощью этой конечно – разностной схемы сходится к точному с тем же порядком по времени и по пространственной переменной.*

Вычислительная математика

Математические методы в экономике 061800

Институт Международного Бизнеса и Экономики кафедра Математики и Моделирования

Ушаков А.А.

Безусловная минимизация функции двух переменных

Лекция № 9, 10

Метод градиентного спуска

Будем рассматривать выпуклые функции двух переменных определённые на выпуклых множествах X двумерного евклидова пространства $\bar{x} \in X \subseteq R^2$. Для того, чтобы функция двух переменных была выпуклой, используется следующий критерий выпуклости.

Если функция $g(\bar{x})$ - дважды дифференцируема на выпуклом множестве $X \subseteq R^2$ и матрица её частных производных второго порядка (матрица Гесса $\left(g''_{ij}(\bar{x})\right)$, $i, j = 1,2$) положительно определена для всех $\bar{x} \in X$, то функция $g(\bar{x})$ является выпуклой на множестве X.

Критерий положительной определенности функции $g(\bar{x})$, он так же называется критерием Сильвестра, формулируется так:
«Если все диагональные миноры матрицы Гесса, т.е. $g''_{x_1x_1} \geq 0$, $\begin{bmatrix} g''_{x_1x_1} & g''_{x_1x_2} \\ g''_{x_1x_2} & g''_{x_2x_2} \end{bmatrix} \geq 0$ для точек $\bar{x} \in X$, то функция $g(\bar{x})$ является выпуклой на X».
Пусть $g(\bar{x})$ - выпуклая дифференцируемая функция на всём множестве точек $\bar{x} \in X$ в евклидовом пространстве R^2. Требуется найти точку минимума $\bar{x}^*$ и минимум функции $g(\bar{x}^*)$.
Выбрав произвольное начальное приближение $x^{(0)} \in X \subseteq R^2$, построим следующую итерационную последовательность:

$$\bar{x}^{(k+1)} = \bar{x}^{(k)} - \alpha_k grad\left(g(\bar{x}^{(k)})\right),\ k = 0,1,2,\ldots, \qquad (1)$$

Где величины α_k (параметрические шаги) выбираются достаточно малыми из условия:

$$g\left(\bar{x}^{(k+1)}\right) < g\left(\bar{x}^{(k)}\right),\ k = 0,1,2,... \qquad (2)$$

Остановимся подробнее на векторном соотношении (1). Поскольку градиент функции двух переменных в ортонормированном базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ имеет координаты $grad\, f(x) = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}, \frac{\partial g}{\partial x_2}\right)$, тогда алгоритм (1) в скалярной форме принимает вид:

$$x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} - \alpha_k \frac{\partial g}{\partial x_1}(x^{(k)}),\ x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} - \alpha_k \frac{\partial g}{\partial x_2}(x^{(k)}).$$

Окончание процесса устанавливается при выполнении неравенства:

$$\left|grad\left(g(x^{(k)})\right)\right| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(g'_{x_1})^2 + (g'_{x_2})^2} \le \varepsilon\,. \qquad (3)$$

Если условие (2) не выполняется, то α_k уменьшается вдвое и алгоритм (1) повторяется. При выполнении условия (3) полагают:
$\bar{x}^* \approx x^{(k)}$, $g(\bar{x}^*) \approx g(x^{(k)})$.

Пример. Методом градиентного спуска с точностью $\varepsilon = 0{,}05$ минимизировать функцию
$g(\bar{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + e^{(x_1 + x_2)}$.

Решение. Вначале необходимо проверить выпуклость функции на множестве $\bar{x} \in X \subseteq R^2$, для чего составляется матрица частных производных второго порядка и по критерию Сильвестра проверяется её положительная определённость:

$$g''_{x_1x_1} = 2 + e^{(x_1+x_2)}, \begin{bmatrix} g'_{x_1x_1} & g'_{x_1x_2} \\ g'_{x_1x_2} & g'_{x_2x_2} \end{bmatrix} = 8 + 6e^{(x_1+x_2)} > 0.$$

Таким образом, по критерию Сильвестра заданная функция выпукла на всей плоскости x_1Ox_2.

Начальное приближение возьмём в виде $\overline{x}^{(0)} = (0,0)$ и $\alpha_0 = 1$.

1-й шаг: $k = 0; g(\overline{x}^{(0)}) = 1,\ \dfrac{\partial g}{\partial x_1}(0,0) = 1,\ \dfrac{\partial g}{\partial x_2}(0,0) = 1.$

Из формулы (1) следует

$$x_1^{(1)} = x_1^{(0)} - a_0 \frac{\partial g}{\partial x_1}(0{,}0) = -1, \;\; x_2^{(1)} = x_2^{(0)} - a_0 \frac{\partial g}{\partial x_2}(0{,}0) = -1;$$

$$g(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) = 3{,}145, \;\; g(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) = 1,$$

т.е условие (2) не выполнено, вследствие чего необходимо уменьшить параметрический шаг вдвое, $a_0 = 0{,}5$, и повторяем вычисления с $\bar{x}^{(0)}$:

$$x_1^{(1)} = 0 - 0{,}5 \times 1 = -0{,}5; \;\; x_2^{(1)} = 0 - 0{,}5 \times 1 = -0{,}5;$$

$$g(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) = 1{,}118 > g(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) = 1;$$

Условие (2) не выполнено. Уменьшаем a_0 вдвое,

т.е. $a_1 = \frac{a_0}{2} = 0{,}25$. Далее

$$x_1^{(1)} = 0 - 0{,}25 \times 1 = -0{,}25; \; x_2^{(1)} = 0 - 0{,}25 \times 1 = -0{,}25$$

$$g(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) = 0{,}794 < g(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) = 1.$$

Условие (2) выполнено, поэтому проверяем условие

остановки процесса $\left| grad\, g \right| \le \varepsilon$.

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}(\bar{x}^{(1)}) = 2x_1^{(1)} + e^{x_1^{(1)} + x2^{(1)}} = 0{,}106,$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_2}(\bar{x}^{(1)}) = 4x_1^{(1)} + e^{x_1^{(1)} + x_2^{(1)}} = -0{,}393,$$

$$\left| grad\ \mathrm{g}(\bar{x}^{(1)}) \right| = \sqrt{0{,}106^2 + (-0{,}393)^2} = 0.407 > \varepsilon = 0.05$$

2-й шаг: $k = 1$; $x_1^{(1)} = -0{,}25$; $x_2^{(1)} = -0{,}25$; $a_1 = 0{,}25$.

ВГУЭС

$$x_1^{(2)} = x_1^{(1)} - a_1 \frac{\partial g}{\partial x_1}(\overline{x}^{(1)}) = -0{,}25 - 0{,}25 \times 0{,}106 = -0{,}2765$$

$$x_2^{(2)} = x_2^{(1)} - \alpha_1 \frac{\partial g}{\partial x_2}\left(\overline{x}^1\right) = -0.25 - 0.25 \cdot \left(-0.393\right) = -0.1518;$$

$$g(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}) = 0{,}774 < g(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) = 0{,}794.$$

Оставляем значение a_1, приняв $a_2 = a_1$. Проверяем

условия остановки в точке $\overline{x}^{(2)}$:

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}(\overline{x}^{(2)}) = 2x_1^{(2)} + e^{x_1^{(2)} + x_2^{(2)}} = 0{,}0983;$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_2}(\overline{x}^{(2)}) = 4x_2^{(2)} + e^{x_1^{(2)} + x_2^{(2)}} = 0{,}0451;$$

$$\left|grad\ \mathrm{g}(\overline{x}^{(2)})\right| = \sqrt{0{,}0983^2 + 0{,}0451^2} = 0.108 > \varepsilon$$

3-й шаг: $k = 2$; $x_1^{(2)} = -0{,}2765$; $x_2^{(2)} = -0{,}1518$; $a_2 = 0{,}25$.

$$x_1^{(3)} = x_1^{(2)} - a_2 \frac{\partial g}{\partial x_1}(\bar{x}^{(2)}) = -0{,}2765 - 0{,}25 \times 0{,}0983 = -0{,}301;$$

$$x_2^{(3)} = x_2^{(2)} - a_2 \frac{\partial g}{\partial x_2}(\bar{x}^{(2)}) = -0{,}1518 + 0{,}25 \times 0{,}0451 = -0{,}163;$$

$$g(x_1^{(3)}, x_2^{(3)}) = 0{,}772 < g(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}) = 0{,}774.$$

Проверяем условия остановки в точке $\bar{x}^{(3)}$:

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}(\bar{x}^{(3)}) = 2x_1^{(3)} + e^{x_1^{(3)} + x_2^{(3)}} = 0{,}0262;$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_2}(\bar{x}^{(3)}) = 4x_2^{(3)} + e^{x_1^{(3)} + x_2^{(3)}} = -0{,}023;$$

$$\left| grad\ \mathrm{g}(\bar{x}^{(3)}) \right| = \sqrt{0{,}0262^2 + (-0{,}023)^2} = 0.035 < \varepsilon = 0.05$$

Точность достигнута следовательно, $\bar{x}^* = (-0.301; -0.163)$
а минимальное значение функции $g^* \approx 0{,}772$.

Метод наискорейшего спуска

Метод наискорейшего спуска отличается от метода градиентного спуска *оптимальным способом определения параметрического шага* α_k, который находится из условия

$$\varphi_{\mathrm{k}}(\alpha_k) = \min_{\alpha>0} \varphi_k(\alpha), \quad \varphi_k(\alpha) = g\left(\overline{x}^{(k)} - \alpha \, grad \; g\left(\overline{x}^{(k)}\right)\right).$$

После минимизации функции $\varphi(\alpha)$ по переменной α найденное значение α^* принимается за α_k, после чего реализуется метод градиентного спуска:

$$\overline{x}^{(k+1)} = \overline{x}^{(k)} - \alpha_k grad \; g\left(\overline{x}^{(k)}\right), \; k = 0,1,\ldots$$

Окончание итерационного процесса устанавливается при выполнении условия останова:

$$\left|grad \; g(\overline{x}^{(k)})\right| = \sqrt{\left[\frac{\partial g}{\partial x_1}\left(\overline{x}^{(k)}\right)\right]^2 + \left[\frac{\partial g}{\partial x_2}\left(\overline{x}^{(k)}\right)\right]^2} < \varepsilon$$

Таким образом, на каждом шаге метода наискорейшего спуска решается задача минимизации функции $\varphi(\alpha)$ одной переменной α.

Если $g(\bar{x}) = \frac{1}{2}(A\bar{x}, \bar{x}) + (\bar{r}, \bar{x})$, где A – симметричная матрица коэффициентов при квадратичных слагаемых, $\bar{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ – коэффициенты при линейных слагаемых, $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – переменные, $(\, , \,)$ – обозначение скалярного произведения, то величина параметрического шага α_k может быть найдена в явном виде:

$$\alpha_k = 0.5 \frac{\left(grad\, g\left(\bar{x}^{(k)}\right), grad\, g\left(\bar{x}^{(k)}\right)\right)}{\left(A\, grad\, g\left(\bar{x}^{(k)}\right), grad\left(\bar{x}^{(k)}\right)\right)}, \text{ причем } grad\, g\left(\bar{x}^{(k)}\right) = A \cdot \bar{x}^{(k)} + \bar{r}.$$

Пример. Методом наискорейшего спуска найти минимума $\bar{x}^*$ функции $g(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_1x_2 - 7x_1 - 7x_2$. $\varepsilon = 0.01$.

Решение.

Шаг 1: $k = 0$. Начальное приближение $\bar{x}^{(0)} = (0, 0)$,

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}(\bar{x}) = 2x_1 + x_2 - 7, \quad \frac{\partial g}{\partial x_2}(\bar{x}) = 4x_2 + x_1 - 7,$$

$$\varphi_0(\alpha) = g(-7\alpha, -7\alpha) = 98\alpha(2\alpha+1),\ \varphi_0'(\alpha) = 392\alpha + 98,\ \alpha_0 = -0.25,$$

$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0.25 \begin{pmatrix} -7 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/4 \\ -7/4 \end{pmatrix};$$

$$\left|grad\ g(\bar{x}^{(1)}\right| = \sqrt{\left[\frac{\partial g}{\partial x_1}\left(\bar{x}^{(1)}\right)\right]^2 + \left[\frac{\partial g}{\partial x_2}\left(\bar{x}^{(1)}\right)\right]^2} = \sqrt{\left(-\frac{49}{4}\right)^2 + \left(-\frac{63}{4}\right)^2} \approx 19.9531 > \varepsilon.$$

Шаг 2 : $k = 1,\ \bar{x}^{(1)} = (-1.75; -1.75);\ \frac{\partial g}{\partial x_1}\left(\bar{x}^{(1)}\right) = -\frac{49}{4},\ \ \frac{\partial g}{\partial x_2}\left(\bar{x}^{(1)}\right) = -\frac{63}{4},$

$$\alpha_1 = 0.5 \frac{(\partial g/\partial x_1)^2 + (\partial g/\partial x_2)^2}{(\partial g/\partial x_1)^2 + 2(\partial g/\partial x_2)^2 + (\partial g/\partial x_1)(\partial g/\partial x_2)} = \frac{(49^2 + 63^2)}{2(49^2 + 49\cdot 63 + 2\cdot 63^2)} = 0.2372$$

$$\begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/4 \\ -7/4 \end{pmatrix} - 0.2372 \cdot \begin{pmatrix} -49/4 \\ -63/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1557 \\ 1.9859 \end{pmatrix}.$$ *Очевидно,* $grad\ g(\bar{x}^{(2)}) > \varepsilon.$

Шаг 3 : $k = 2,\ \bar{x}^{(2)} = (1.1557; 1.9859);\ \frac{\partial g}{\partial x_1}\left(\bar{x}^{(2)}\right) = -2{,}7027,\ \ \frac{\partial g}{\partial x_2}\left(\bar{x}^{(2)}\right) = 2{,}0993,$

$$\alpha_2 = 0.560638,\ \begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1557 \\ 1.9859 \end{pmatrix} - 0.560638 \cdot \begin{pmatrix} 2.7027 \\ 2.0993 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.67094 \\ 0.80895 \end{pmatrix};$$

Шаг 4. $\kappa = 4$, $\dfrac{\partial g}{\partial x_1}\left(\bar{x}^{(3)}\right) = -0.84917$, $\dfrac{\partial g}{\partial x_2}\left(\bar{x}^{(3)}\right) = -1.09326$,

$grad\ g\left(\bar{x}^{(3)}\right) > \varepsilon$ – очевидно, $\alpha_3 = 0.237173$; $\left(x_1^{(4)};\ x_2^{(4)}\right) = (2.87234;\ 1.06824)$;

Шаг 5. $k = 5$. $\dfrac{\partial g}{\partial x_1}\left(\bar{x}^{(4)}\right) = -0.18708$ $\dfrac{\partial g}{\partial x_2}\left(\bar{x}^{(4)}\right) = 0.1453$,

$grad\ g\left(\bar{x}^{(4)}\right) > \varepsilon$; $\alpha_4 = 0.56065$; $\left(x_1^{(5)};\ x_2^{(5)}\right) = (2.97723;\ 0.98678)$;

Шаг 6. $k = 6$. $\dfrac{\partial g}{\partial x_1}\left(\bar{x}^{(5)}\right) = -0.05876$, $\dfrac{\partial g}{\partial x_2}\left(\bar{x}^{(5)}\right) = -0.07565$,

$grad\ g\left(\bar{x}^{(5)}\right) > \varepsilon$; $\alpha_5 = 0.23715$; $\left(x_1^{(7)};\ x_2^{(7)}\right) = (2.99116;\ 1.00472)$;

Шаг 7. $k = 7$. $\dfrac{\partial g}{\partial x_1}\left(\bar{x}^{(7)}\right) = -0.01296$, $\dfrac{\partial g}{\partial x_2}\left(\bar{x}^{(7)}\right) = 0.01004$, $grad\ g\left(\bar{x}^{(7)}\right) > \varepsilon$;

$\alpha_6 = 0.561587$, $\left(x_1^{(8)};\ \ x_2^{(8)}\right) = (2.99844;\ 0.99908)$, $grad\ g\left(\bar{x}^{(8)}\right) < \varepsilon$. Конец.

Метод сопряженных направлений

Метод сопряженных направлений состоит в построении последовательности

$$\overline{x}^{(k+1)} = \overline{x}^{(k)} - \alpha_k \overline{p}^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \,, \tag{1}$$

где α_k выбирается так же, как и в методе наискорейшего спуска:

$$\varphi_k(\alpha_k) = \min_{\alpha > 0} \varphi_k(\alpha), \quad \varphi_k(\alpha) = g\left(\overline{x}^{(k)} - \alpha\, \overline{p}^{(k)}\right), \tag{2}$$

а направление спуска $\overline{p}^{(k)}$ – с помощью выражения

$$\overline{p}^{(k)} = grad\, g\left(\overline{x}^{(k)}\right) + \beta_k\, \overline{p}^{(k-1)}, \; k = 1, 2, \ldots \,; \tag{3}$$

$$\beta_0 = 0, \quad \overline{p}^{(0)} = grad\; g\left(\overline{x}^{(0)}\right); \tag{4}$$

$$\beta_k = \frac{\left|grad\, g\left(\overline{x}^{(k)}\right)\right|^2}{\left|grad\; g\left(\overline{x}^{(k-1)}\right)\right|^2}. \tag{5}$$

Критерием останова является условие

$$\left|grad\, g\left(\overline{x}^{(k)}\right)\right| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial g}{\partial x_i}\left(\overline{x}^{(k)}\right)\right]^2} \le \varepsilon. \tag{6}$$

Заметим, что вектор $\bar{p}^{(k)}$ определяется не только антиградиентом $\left(-grad\, g(\bar{x}^{(k)})\right)$, но и направлением спуска $\left(-\bar{p}^{(k-1)}\right)$ на предыдущем шаге. Это позволяет более полно, чем в методах градиентного и наискорейшего, учитывать особенности функции $g(\bar{x})$ при построении итерационного процесса. Для квадратичных функций, определенных в R^n, требуется не больше n итераций метода сопряженных направлений.

Пример.

Методом сопряженных направлений найти точки минимума $\bar{x}^*$ функции $g(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_1 x_2 - 7x_1 - 7x_2$.

Решение. Поскольку $g(\bar{x})$ – квадратичная функция, то точка минимума $\bar{x}^*$ может быть найдена после двух шагов метода сопряженных направлений.

Шаг 1: $k=0$. Выбрав начальное приближение $\bar{x}^{(0)}=(0;0)$, по формулам (2), (4) находим

$$\bar{p}^{(0)}=grad\,g(\bar{x}^{(0)})=\left(2x_1+x_2-7;\ 4x_2+x_1-7\right)\Big|_{\bar{x}^{(0)}}=(-7;-7);$$

$$\varphi_0(\alpha)=g\left(\bar{x}^{(0)}-\alpha\bar{p}^{(0)}\right)=98\left(2\alpha^2-\alpha\right).$$

Из условия минимума функции $\varphi_0(\alpha)$ получим $\alpha_0=0.25$.

Отсюда

$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix}-\alpha_0\begin{pmatrix} p_1^{(0)} \\ p_2^{(0)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}-0.25\begin{pmatrix} -7 \\ -7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7/4 \\ 7/4 \end{pmatrix}.$$

Шаг 2. $k=1$. $grad\,g\left(\bar{x}^{(1)}\right)=\left(2\cdot\frac{7}{4}+\frac{7}{4}-7;\ 4\cdot\frac{7}{4}+\frac{7}{4}-7\right)=\left(-\frac{7}{4};\frac{7}{4}\right).$

$$\beta_1=\frac{\left|grad\,g\left(\bar{x}^{(1)}\right)\right|}{\left|grad\,g\left(\bar{x}^{(0)}\right)\right|}=\frac{2\cdot 49/16}{2\cdot 49}=\frac{1}{16}.$$

Вычисляем направление спуска $\begin{pmatrix} p_1^{(1)} \\ p_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial g / \partial x_1 \\ \partial g / \partial x_2 \end{pmatrix} \left(\bar{x}^{(1)}\right) + \beta_1 \begin{pmatrix} p_1^{(0)} \\ p_2^{(0)} \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} -7/4 \\ 7/4 \end{pmatrix} + \frac{1}{16} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -35/16 \\ 21/16 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\varphi_1(\alpha) = \dfrac{49}{32}\left(\dfrac{7}{2}\alpha^2 - 4\alpha - 392\right)$ *и* $\alpha_1 = \dfrac{4}{7}$.

Окончательно :

$$\begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix} - \alpha_1 \begin{pmatrix} p_1^{(1)} \\ p_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/4 \\ 7/4 \end{pmatrix} - \frac{4}{7} \cdot \begin{pmatrix} -35/16 \\ 21/16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, $\bar{x}^* = (3;1)$; $g^* = g\left(\bar{x}^*\right) = -14$

Математические методы в экономике 061800

Институт Международного Бизнеса и Экономики кафедра Математики и Моделирования

Ушаков А.А.

Вычислительная математика

Список литературы

Основная литература

1). Численные методы в примерах и задачах : Учеб. пособие/
В.И.Киреев, А,В.Пантелеев. – 2 – е изд. стер. – М. : Высш. шк., 2006 – 480 с.
2). Основы численных методов : Учебник для вузов/ В.М.Вержбицкий.
– М. : Высш. шк., 2002. – 840 с.
3). Численные методы. – М. : ФИЗМАТЛИТ, Формалев В.Ф.,
Ревизников Д.Л., 2004. – 400 с.

4). Лекции по вычислительной математике : Учебное пособие \
И.Б. Петров, А.И. Лобанов. – М. : Интернет– Университет Информациолнных
Технологий; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. – 523 с.