

Численные методы

Математические методы в экономике 061800

Институт Международного Бизнеса и  
Экономики кафедра Математики и  
Моделирования

Ушаков А.А.

---

# Численные методы решения ОДУ

---

Лекция № 6, 7

# Численные методы решения задач для ОДУ

## Метод Эйлера. Метод Эйлера – Коши.

*Дана задача Коши для ОДУ 1–го порядка :*

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (1)$$

*Нужно найти решение данного уравнения в каждой точке отрезка  $[x_0, b]$ .*

*Разобьём отрезок  $[x_0, b]$  на  $n$  равных промежутков в длиной  $h = \frac{b - x_0}{n}$ .*

*Получим сетку  $\{x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$  с шагом  $h$ ,  $x_i = x_0 + hi$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  – узлы сетки.*

*Проинтегрируем данное уравнение на отрезке  $[x_i, x_{i+1}]$ ,*

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x)) dx. \quad (2)$$

*Уравнение (2) эквивалентно задаче Коши (1). Вычислим интеграл в (2) по квадратурной формуле прямоугольников, взяв за основной узел  $x_i$ .*

$$y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i) + O(h^2), \quad y_0 = y(x_0), \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (3)$$

Формула (3) – алгоритм метода Эйлера численного интегрирования задачи Коши.

На всем интервале численного интегрирования задачи Коши метод Эйлера имеет погрешность порядка  $O(h)$ , поэтому является методом 1–го порядка точности.

Если интеграл в (2) вычислить на отрезке  $[x_i, x_{i+1}]$  по методу трапеций с точностью  $O(h^2)$ , получим

$$y_{i+1} = y_i + 0.5h[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})] + O(h^2). \quad (4)$$

Применяют данную формулу следующим образом: сначала находят  $\tilde{y}_{i+1}$ , например, по формуле Эйлера (3), потом в (4) подставляют вместо  $y_{i+1}$ . Точность данной схемы

увеличивается до  $O(h^2)$

$$\begin{cases} \tilde{y}_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i), \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})]. \end{cases}$$

Полученную схему можно называть схемой Эйлера – Коши, схемой Эйлера с пересчетом или схемой предиктор – корректор.

# Пример.

Методами Эйлера и Эйлера – Коши с шагом  $h = 0.1$  численно проинтегрировать следующую задачу Коши для ОДУ 1-го порядка до значения  $x = 0.2$  включительно:

$$y' = x + y, \quad y(0) = 1, \quad h = 0.1.$$

Аналитическое решение –  $y(x) = 2e^x - x - 1$ .

Вычислим его в требуемых точках:  $y(0.1) = 1.1103442$ ,  $y(0.2) = 1.242806$ .

Метод Эйлера.

$$y_{i+1} = y_i + h(x_i + y_i), \quad i = 0, 1, 2.$$

$$i = 0; \quad x_0 = 0; \quad y_0 = 1: \quad y_1 = y_0 + h(x_0 + y_0) = 1 + 0.1(0 + 1) = 1.1;$$

$$i = 1; \quad x_1 = 0.1; \quad y_1 = 1.1: \quad y_2 = y_1 + h(x_1 + y_1) = 1.1 + 0.1(0.1 + 1.1) = 1.22;$$

Метод Эйлера – Коши.

$$\begin{cases} \tilde{y}_{i+1} = y_i + h(x_i + y_i), \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [(x_i + y_i) + (x_{i+1} + \tilde{y}_{i+1})], \end{cases}$$

$$i = 0; \quad x_0 = 0; \quad y_0 = 1:$$

$$\begin{cases} \tilde{y}_1 = y_0 + h(x_0 + y_0) = 1 + 0.1(0 + 1) = 1.1, \\ y_1 = 1 + \frac{0.1}{2}[(0 + 1) + (0.1 + 1.1)] = 1.11; \end{cases}$$

$$i = 1; \quad x_1 = 0.1; \quad x_2 = 0.2; \quad y_1 = 1.11:$$

$$\begin{cases} \tilde{y}_2 = 1.11 + 0.1(0.1 + 1.11) = 1.231; \\ y_2 = 1.11 + \frac{0.1}{2}[(0.1 + 1.11) + (0.2 + 1.231)] = 1.24205. \end{cases}$$

*Поскольку метод Эйлера является методом первого порядка точности, то только первая цифра после запятой является верной, а вторая – нет. Это подтверждает сравнение  $y_1$  с  $y(0.1)$  и  $y_2$  с  $y(0.2)$ .*

*Метод Эйлера – Коши является методом второго порядка точности, то первые две цифры после запятой считаются верными (сравнить  $y_1$  с  $y(0.1)$  и  $y_2$  с  $y(0.2)$ ).*

### Метод Рунге-Кутта

*Метод Рунге – Кутта имеет погрешность, пропорциональную  $h^4$  и поэтому является одним из наиболее употребительных методов численного решения задачи Коши для ОДУ.*

Для вычисления интеграла в (2) используем квадратурную формулу Симпсона. Для формулы Симпсона необходимо три узла. В качестве недостающего узла возьмем середину отрезка  $[x_i, x_{i+1}]$ , т.е.  $x_{i+1/2} = x_i + h/2$ .

Формула (2) преобразуется к виду

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6} [f(x_i, y_i) + 4f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2}) + f(x_{i+1}, y_{i+1})].$$

Два последних слагаемых вычисляем следующим образом

$$4f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2}) + f(x_{i+1}, y_{i+1}) = 2f\left(x_{i+1/2}, y_i + \frac{\tilde{\Delta}y_i}{2}\right) + 2f\left(x_{i+1/2}, y_i + \frac{\tilde{\tilde{\Delta}}y_i}{2}\right) + f(x_{i+1}, y_i + \Delta y_i).$$

Если обозначить через

$$k_i^1 = hf(x_i, y_i), \quad k_i^2 = hf\left(x_{i+1/2}, y_i + \frac{k_i^1}{2}\right),$$

$$k_i^3 = hf\left(x_{i+1/2}, y_i + \frac{k_i^2}{2}\right), \quad k_i^4 = hf\left(x_{i+1}, y_i + k_i^3\right),$$

то схема вычислений будет следующая

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, \\ \Delta y_i = \frac{1}{6} (k_i^1 + 2k_i^2 + 2k_i^3 + k_i^4). \end{array} \right.$$

## Пример.

Методом Рунге – Кутты с шагом  $h = 0.1$  численно проинтегрировать задачу Коши для ОДУ 1-го порядка из предыдущего примера до значения  $x = 0.2$  включительно:

$$y' = x + y, \quad y(0) = 1, \quad h = 0.1.$$

Аналитическое решение –  $y(x) = 2e^x - x - 1$ .

Значение точного решения:  $y(0.1) = 1.1103442$ ,  $y(0.2) = 1.242806$ .

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, \quad \Delta y_i = \frac{1}{6} (k_i^1 + 2k_i^2 + 2k_i^3 + k_i^4),$$

$$k_i^1 = hf(x_i, y_i) = h(x_i + y_i),$$

$$k_i^2 = hf\left(x_{i+1/2}, y_i + \frac{k_i^1}{2}\right) = h\left[\left(x_i + \frac{h}{2}\right) + \left(y_i + \frac{k_i^1}{2}\right)\right],$$

$$k_i^3 = hf\left(x_{i+1/2}, y_i + \frac{k_i^2}{2}\right) = h\left[\left(x_i + \frac{h}{2}\right) + \left(y_i + \frac{k_i^2}{2}\right)\right],$$

$$k_i^4 = hf(x_{i+1}, y_i + k_i^3) = h[(x_i + h) + (y_i + k_i^3)].$$

$$\left\{ \begin{array}{l} i = 0; \quad x_0 = 0; \quad x_{0+1/2} = 0.05; \quad x_1 = 0.1; \quad y_0 = 1; \\ k_0^1 = h(x_0 + y_0) = 0.1(0 + 1) = 0.1; \\ k_0^2 = h \left[ \left( x_0 + \frac{h}{2} \right) + \left( y_0 + \frac{k_0^1}{2} \right) \right] = 0.1 \left[ 0.05 + \left( 1 + \frac{0.1}{2} \right) \right] = 0.11; \\ k_0^3 = h \left[ \left( x_0 + \frac{h}{2} \right) + \left( y_0 + \frac{k_0^2}{2} \right) \right] = 0.1 \left[ 0.05 + \left( 1 + \frac{0.11}{2} \right) \right] = 0.1105; \\ k_0^4 = h \left[ (x_0 + h) + (y_0 + k_0^3) \right] = 0.1 [0.1 + (1 + 0.1105)] = 0.1211; \\ \Delta y_0 = \frac{1}{6} (k_0^1 + 2k_0^2 + 2k_0^3 + k_0^4), \quad y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1.11035. \end{array} \right.$$

*Аналогично проводим вычисления на следующем шаге*

$$\left\{ \begin{array}{l} i = 1; \quad x_1 = 0.1; \quad x_{1+1/2} = 0.15; \quad x_2 = 0.2; \quad y_1 = 1.11035; \\ k_1^1 = 0.12104, \quad k_1^2 = 0.132087, \quad k_1^3 = 0.13264, \quad k_1^4 = 0.1443, \\ \Delta y_1 = \frac{1}{6} (k_1^1 + 2k_1^2 + 2k_1^3 + k_1^4) = 0.13247, \quad y_2 = y_1 + \Delta y_1 = 1.24282. \end{array} \right.$$

*Метод Рунге – Кутта является методом четвертого порядка точности, то первые четыре цифры после запятой считаются верными (сравнить  $y_1$  с  $y(0.1)$  и  $y_2$  с  $y(0.2)$ ).*



## Численные методы решения краевых задач для ОДУ

Пусть на отрезке  $x \in [a, b]$  определена дважды непрерывно дифференцируемая функция  $y(x)$ , поведение которой описывается линейным неоднородным ОДУ 2-го порядка

$$\begin{cases} y'' + m(x)y' - r(x)y = f(x), & a < x < b; \\ y(a) = y_a, & y(b) = y_b. \end{cases} \quad (1)$$

Данная задача называется первой краевой задачей для ОДУ.

Если на границах заданы значения производных искомой функции, то такие условия называются граничными условиями 2-го рода:

$$y'(a) = y_a, \quad y'(b) = y_b,$$

а задача называется второй краевой задачей ОДУ.

Если на границах заданы линейные комбинации искомой функции и её первой производной:

$$y'(a) + \alpha y(a) = y_a, \quad y'(b) + \beta y(b) = y_b, \quad (2)$$

то такие условия называются граничными условиями третьего рода, а задача называется третьей краевой задачей ОДУ.



**Теорема.** Если функции  $m(x)$ ,  $r(x)$ ,  $f(x) \in C_2[0, 1]$ ,  $r(x) \geq 0$  на отрезке  $[0, 1]$ , то краевая задача (1) имеет единственное решение  $y(x) \in C_4[0, 1]$ .

## Решение первой краевой задачи

После дискретизации (1) получим СЛАУ с трехдиагональной матрицей

$$a_i y_{i-1} - b_i y_i + c_i y_{i+1} = f_i, \quad i = 1, \dots, n-1;$$

$$y_0 = y_a, \quad i = 0, \quad y_n = y_b, \quad i = n,$$

$$a_i = \frac{1}{h^2} - \frac{m_i}{2h}; \quad b_i = \frac{2}{h^2} + r_i; \quad c_i = \frac{1}{h^2} + \frac{m_i}{2h}.$$

Полагая  $i = 1$ . Первое слагаемое в первом уравнении перенесём в правую часть и положим  $a_1 = 0$ . В последнем уравнении ( $i = n-1$ ) последнее слагаемое перенесём в правую часть и положим  $c_{n-1} = 0$

$$\begin{cases} -b_1 y_1 + c_1 y_2 = f_1 - a_1 y_a = f_1^*, & a_1 = 0, \\ a_i y_{i-1} - b_i y_i + c_i y_{i+1} = f_i, & i = 2, \dots, n-2, \\ a_{n-1} y_{n-2} - b_{n-1} y_{n-1} = f_{n-1} - c_{n-1} y_b = f_{n-1}^*, & c_{n-1} = 0. \end{cases}$$

Теперь СЛАУ пригодна для использования метода прогонки (матрица трёхдиагональная и  $a_1 = c_{n-1} = 0$ ). Определяем прогоночные коэффициенты

$$p_i = \frac{c_i}{b_i - a_i p_{i-1}}; \quad q_i = \frac{a_i q_{i-1} - f_i}{b_i - a_i p_{i-1}}, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

$$p_1 = -\frac{c_1}{b_1}, \quad q_1 = -\frac{f_1^*}{b_1}, \quad \text{так как } a_1 = 0,$$

$$p_{n-1} = 0, \quad \text{так как } c_{n-1} = 0.$$

Значения  $y_i$  при  $i = n-1, n-2, \dots, 1$  определяются при обратном ходе по формуле  $y_i = p_i y_{i+1} + q_i$

$$\begin{cases} i = n-1: & y_{n-1} = q_{n-1}, \\ i = n-2: & y_{n-2} = p_{n-2} y_{n-1} + q_{n-2}, \\ \dots & \dots \\ i = 1: & y_1 = p_1 y_2 + q_1. \end{cases}$$

# Решение второй и третьей краевых задач

Предположим, что искомая функция дважды непрерывно дифференцируема не только во внутренних точках расчётной области, но и на границах, т.е.  $y(x) \in C_2[a, b]$ . С этой целью разложим точное решение в ряд Тейлора в окрестностях точек  $x_0 = a$  и  $x_n = b$  до третьей производной включительно

$$\begin{aligned}y_1 &= y(x_0 + h) = y_0 + y'_0 h + y''_0 h^2 / 2 + O(h^3), \\y_{n-1} &= y(x_n - h) = y_n - y'_n h + y''_n h^2 / 2 + O(h^3).\end{aligned}\quad (3)$$

Находим из уравнения вторую производную

$$y''_0 = f_0 - m_0 y'_0 + r_0 y_0, \quad y''_n = f_n - m_n y'_n + r_n y_n$$

а из разложения (3) – первую производную

$$\begin{aligned}y'_0 &= \frac{2(y_1 - y_0)}{(2 - m_0 h)h} - \frac{h}{(2 - m_0 h)}(f_0 + r_0 y_0) + O(h^2), \\y'_n &= \frac{2(y_n - y_{n-1})}{(2 + m_n h)h} + \frac{h}{(2 + m_n h)}(f_n + r_n y_n) + O(h^2).\end{aligned}$$

В результате граничные условия (2) аппроксимируются со вторым порядком точности и имеют вид

$$-b_0 y_0 + c_0 y_1 = f_0^*, \quad a_n y_{n-1} - b_n y_n = f_n^*,$$

$$\text{где } b_0 = \frac{2}{h(2-m_0 h)} + \frac{r_0 h}{2-m_0 h} - \alpha, \quad c_0 = \frac{2}{h(2-m_0 h)}, \quad f_0^* = y_a + \frac{h f_0}{2-m_0 h},$$

$$a_n = -\frac{2}{h(2-m_n h)}, \quad b_n = -\frac{2}{h(2+m_n h)} - \frac{r_n h}{2+m_n h} - \beta, \quad f_n^* = y_b - \frac{h f_n}{2+m_n h}.$$

после преобразований получаем СЛАУ

$$\begin{cases} i = 0, & -b_0 y_0 + c_0 y_1 = f_0^*, \quad a_0 = 0, \\ i = 1, \dots, n-1, & a_i y_{i-1} - b_i y_i + c_i y_{i+1} = f_i, \\ i = n, & a_n y_{n-1} - b_n y_n = f_n^*, \quad c_n = 0. \end{cases}$$

Таким образом, результирующая СЛАУ с трехдиагональной матрицей теперь будет содержать  $n+1$  уравнение, каждое из которых получено со вторым порядком точности. Для её решения используется метод прогонки, поскольку  $a_0 = c_n = 0$ .

Пример. Найти приближенное решение краевой задачи

$$\begin{cases} y'' + y = 1, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ y'(0) = 0, & y'\left(\frac{\pi}{2}\right) - y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2. \end{cases}$$

Сравнить точное решение  $y(x) = 1 + \cos x$  с приближенным, найденным

с шагом  $h = \frac{\pi}{6}$ ,  $n = 3$ . Коэффициенты уравнения  $m(x) = 0$ ,  $r(x) = -1$ ,

$f(x) = 1$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\beta = -1$ ,  $y_a = 0$ ,  $y_b = -2$ .

Используя результаты решения второй и третьей краевых задач, запишем соответствующую СЛАУ и решим её

$$\begin{cases} i = 0, & -b_0 y_0 + c_0 y_1 = f_0^*, \quad a_0 = 0, \\ i = 1, 2, & a_i y_{i-1} - b_i y_i + c_i y_{i+1} = f_i, \\ i = 3, & a_3 y_2 - b_3 y_3 = f_3^*, \quad c_3 = 0, \end{cases}$$

где  $b_0 = \frac{2-h^2}{2h}$ ,  $c_0 = \frac{1}{h}$ ,  $f_0^* = \frac{h}{2}$ ,  $a_3 = -\frac{1}{h}$ ,  $b_3 = \frac{h^2 + 2h - 2}{2h}$ ,  $f_3^* = -2 - \frac{h}{2}$ ,

$a_i = 1$ ,  $b_i = 2 - h^2$ ,  $c_i = 1$ ,  $f_i = h^2$ ,  $i = 1, 2$ .

*Вычисляем прогоночные коэффициенты*

$$p_i = \frac{c_i}{b_i - a_i p_{i-1}}; \quad q_i = \frac{a_i q_{i-1} - f_i}{b_i - a_i p_{i-1}}, \quad i = 1, 2,$$

$$p_0 = \frac{c_0}{b_0}, \quad q_0 = -\frac{f_0^*}{b_0}, \quad p_3 = 0, \quad q_3 = \frac{a_3 q_2 - f_3^*}{b_3 - a_3 p_2}.$$

*Окончательно, приближённое решение вычисляем обратным ходом и приведем для сравнения точное решение*

$$y_3 = 0.98045, \quad y_2 = 1.51692, \quad y_1 = 1.91168, \quad y_0 = 2.05650,$$

$$y_3^t = 1, \quad y_2^t = 1.5, \quad y_1^t = 1.86603, \quad y_0^t = 2.$$

*Приведём значения погрешностей ( $h^2 = 0.27415$ )*

$$\Delta y_0 = |y_0 - y_0^t| = 0.01955, \quad \Delta y_1 = |y_1 - y_1^t| = 0.01692,$$

$$\Delta y_2 = |y_2 - y_2^t| = 0.04565, \quad \Delta y_3 = |y_3 - y_3^t| = 0.0565.$$

Численные методы

Математические методы в экономике 061800

Институт Международного Бизнеса и  
Экономики кафедра Математики и  
Моделирования

Ушаков А.А.

---

# Численные методы решения уравнений в частных производных

Лекция № 8



# Метод сеток для уравнения теплопроводности

*В одномерном по пространству случаях однородное уравнение теплопроводности имеет вид*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0.$$

$$\begin{cases} u(0, t) = \varphi_1(t), & x = 0, & t > 0, \\ u(l, t) = \varphi_2(t), & x = l, & t > 0, \\ u(x, 0) = \psi(x), & 0 \leq x \leq l, & t = 0. \end{cases} \quad - \text{Первая начально – краевая задача.}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \varphi_1(t), & x = 0, & t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = \varphi_2(t), & x = l, & t > 0, \end{cases} \quad - \text{Вторая начально – краевая задача.}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) + \alpha u(0, t) = \varphi_1(t), & x = 0, & t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) + \beta u(l, t) = \varphi_2(t), & x = l, & t > 0, \end{cases} \quad - \text{Третья начально – краевая задача.}$$

Нанесем на пространственно – временную область  $0 \leq x \leq l$ ,  $0 \leq t \leq T$  конечно – разностную сетку  $w_{h,\tau}$ :

$$w_{h,\tau} = \left\{ x_j = jh, j = 0, \dots, N, t^k = k\tau, k = 0, \dots, K \right\}, \quad h = \frac{l}{N}, \quad \tau = \frac{T}{K}.$$

Определим сеточную функцию  $u_j^k = u(x_j, t^k)$  и построим явную конечно – разностную схему для первой начально – краевой задачи

$$u_j^{k+1} - u_j^k = \frac{a^2 \tau}{h^2} \cdot (u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k) + O(h^2 + \tau), \quad j = 0, \dots, N-1, k = 0, \dots, K-1;$$

$$u_0^{k+1} = \varphi_1(t^{k+1}), \quad u_N^{k+1} = \varphi_2(t^{k+1}), \quad k = 0, \dots, K;$$

$$u_j^0 = \psi(x_j), \quad j = 0, \dots, N.$$

Можно построить неявную конечно – разностную схему для той же задачи

$$u_j^{k+1} - u_j^k = \frac{a^2 \tau}{h^2} (u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}) + O(h^2 + \tau), \quad j = 0, \dots, N-1, k = 0, \dots, K-1;$$

с теми же начальными и краевыми условиями.

Решение по явной схеме получается достаточно просто

$$u_j^{k+1} = u_j^k + \sigma \cdot (u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k), \quad \sigma = \frac{a^2 \tau}{h^2}, \quad j = 0, \dots, N-1, \quad k = 0, \dots, K-1.$$

с единственным условием, называемым условием устойчивости

Куранта  $\sigma = \frac{a^2 \tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}$ . Это условие связывает шаги по времени  $\tau$

и по координате  $h$ . Поэтому разностная схема называется условно устойчивой.

Решение по неявной схеме осуществляется методом прогонки, так как разностную схему можно преобразовать в СЛАУ с трехдиагональной матрицей, а на шаги по времени  $\tau$  и по координате  $h$  не накладывается ни каких условий

$$\begin{cases} -b_1 u_1^{k+1} + c_1 u_2^{k+1} = f_1, & a_1 = 0, & j = 1, \\ a_j u_{j-1}^{k+1} - b_j u_j^{k+1} + c_j u_{j+1}^{k+1} = f_j, & j = 2, \dots, N-2, \\ a_{N-1} u_{N-2}^{k+1} - b_{N-1} u_{N-1}^{k+1} = f_{N-1}, & c_{N-1} = 0, & j = N-1, \end{cases}$$

где  $a_j = \sigma$ ,  $j = 2, \dots, N-1$ ,  $b_j = (1 + 2\sigma)$ ,  $j = 1, \dots, N-1$ ;  $c_j = \sigma$ ,  $j = 1, \dots, N-2$ ;

$$f_j = -u_j^k, \quad j = 2, \dots, N-2; \quad f_1 = -\left[ u_1^k + \sigma \cdot \varphi_1(t^{k+1}) \right]; \quad f_{N-1} = -\left[ u_{N-1}^k + \sigma \cdot \varphi_2(t^{k+1}) \right]$$



# Постановка задач для волнового уравнения

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0; \\ u(0, t) = \varphi_1(t), \quad x = 0, \quad t > 0; \\ u(l, t) = \varphi_2(t), \quad x = l, \quad t > 0; \\ u(x, 0) = \psi_1(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad t = 0; \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi_2(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad t = 0. \end{array} \right.$$

$u(x, t)$  – малые продольные или поперечные перемещения стержня,  
 $a$  – скорость звука в материале, из которого изготовлен стержень.  
Если концы стержня движутся по заданным законам, то задана первая начально – краевая задача для волнового уравнения.

Если на концах стержня заданы значения силы, которая по закону Гука пропорциональна значениям производной перемещения по пространственной переменной, то ставится вторая начально-краевая задача для волнового уравнения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0; \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \varphi_1(t), \quad x = 0, \quad t > 0; \\ \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = \varphi_2(t), \quad x = l, \quad t > 0; \\ u(x, 0) = \psi_1(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad t = 0; \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi_2(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad t = 0. \end{array} \right.$$

Если концы стержня закреплены упруго, т.е. на концевые заделки действуют силы, пропорциональные перемещениям, то ставится третья начально – краевая задача для волнового уравнения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0; \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) + \alpha u(0, t) = \varphi_1(t), \quad x = 0, \quad t > 0; \\ \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) + \beta u(l, t) = \varphi_2(t), \quad x = l, \quad t > 0; \\ u(x, 0) = \psi_1(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad t = 0; \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi_2(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad t = 0. \end{array} \right.$$

# Постановка задач для уравнений эллиптического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y).$$

Если  $f(x, y) \neq 0$ , то это уравнение Пуассона, если  $f(x, y) \equiv 0$  – уравнение Лапласа.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), & (x, y) \in \Omega \\ u(x, y)|_{\Gamma} = \varphi(x, y), & (x, y) \in \Gamma \end{cases} \quad \text{– это первая краевая задача (Дирихле).}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), & (x, y) \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma} = \varphi(x, y), & (x, y) \in \Gamma \end{cases} \quad \text{– это вторая краевая задача (Неймана).}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), & (x, y) \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma} + \alpha u \Big|_{\Gamma} = \varphi(x, y), & (x, y) \in \Gamma \end{cases} \quad \text{— это третья краевая задача .}$$

*Замечание: следует отметить, что в вышеперечисленных постановках число начальных условий равно порядку дифференциального уравнения по времени, а старший порядок производной по времени в начальных условиях единицу меньше порядка дифференциального уравнения по времени.*

*Старший порядок производной по пространственной переменной в краевых условиях на единицу меньше порядка производной в уравнении.*



# Основные понятия, связанные с конечно-разностной аппроксимацией дифференциальных задач

Запишем дифференциальную задачу в операторной форме

$$LU = f,$$

$$L = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \text{диффузионный}; \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \text{волновой}; \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \text{лапласиан}; \end{cases}$$

$U(x, y)$  – искомая функция, удовлетворяющая дифференциальной задаче;  $f$  – входные данные (начальные и краевые условия, правые части т.п.). Операторная форма  $(LU)_h = f_h$  описывает дифференциальную задачу в узлах сетки, а операторная форма  $L_h U_h = f_h$  описывает конечно – разностную схему на точном решении  $U(x, y)$ , т.е. в конечно – разностной схеме вместо значений сеточной функции подставлены точные значения искомой функции.

*Конечно – разностные операторы  $L_h$  имеют вид*

$$L_h = \begin{cases} \frac{\Delta}{\tau} - a^2 \frac{\Delta^2}{h^2} - \text{диффузионный}; \\ \frac{\Delta^2}{\tau^2} - a^2 \frac{\Delta^2}{h^2} - \text{волновой}; \\ \frac{\Delta^2}{h_1^2} + \frac{\Delta^2}{h_2^2} - \text{лапласиан.} \end{cases}$$

*$L_h u_h = f_h$  – операторная форма конечно – разностной схемы.*

*Введем норму сеточной функции –  $\|u^k\| = \max_j |u_j^k|$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$*

*Конечно – разностные схемы должны удовлетворять некоторым важным свойствам:*

*1) конечно – разностная схема должна аппроксимировать дифференциальную задачу на точном решении, при этом*

$$\|(LU)_h - L_h U_h\| \xrightarrow{\tau, h \rightarrow 0} 0;$$

2) конечно – разностная схема должна быть устойчива по входным данным, т.е. найдется  $K > 0$ , такое что

$$\|u_h - \tilde{u}_h\| \leq K \|f_h - \tilde{f}_h\|,$$

где  $\tilde{f}_h$  – значения возмущенных входных данных.

3) Решение  $u_h$ , полученное с помощью конечно – разностной схемы  $L_h u_h = f_h$  сходится к точному решению  $U$ , если какая либо норма разности  $\|U - u_h\|$  стремится к нулю при стремлении к нулю сеточных характеристик  $h, \tau$ :

$$\|U - u_h\|_{h, \tau \rightarrow 0} \rightarrow 0.$$

Теорема эквивалентности. Если конечно – разностная схема аппроксимирует на точном решении дифференциальную задачу по времени и по пространственной переменной и эта схема устойчива, то решение с помощью этой конечно – разностной схемы сходится к точному с тем же порядком по времени и по пространственной переменной.

Численные методы

Математические методы в экономике 061800

Институт Международного Бизнеса и  
Экономики кафедра Математики и  
Моделирования

Ушаков А.А.

---

# Безусловная минимизация функции двух переменных

Лекция № 9, 10

# Метод градиентного спуска

Будем рассматривать выпуклые функции двух переменных определённые на выпуклых множествах  $X$  двумерного евклидова пространства  $\bar{x} \in X \subseteq R^2$ . Для того, чтобы функция двух переменных была выпуклой, используется следующий критерий выпуклости.

Если функция  $g(\bar{x})$  - дважды дифференцируема на выпуклом множестве  $X \subseteq R^2$  и матрица её частных производных второго порядка (матрица Гесса  $(g''_{ij}(\bar{x}))$ ,  $i, j = 1, 2$ ) положительно определена для всех  $\bar{x} \in X$ , то функция  $g(\bar{x})$  является выпуклой на множестве  $X$ .

Критерий положительной определенности функции  $g(\bar{x})$ , он так же называется критерием Сильвестра, формулируется так:

«Если все диагональные миноры матрицы Гесса,

т.е.  $g''_{x_1x_1} \geq 0$ ,  $\begin{bmatrix} g''_{x_1x_1} & g''_{x_1x_2} \\ g''_{x_1x_2} & g''_{x_2x_2} \end{bmatrix} \geq 0$  для точек  $\bar{x} \in X$ , то

функция  $g(\bar{x})$  является выпуклой на  $X$ ».

Пусть  $g(\bar{x})$  - выпуклая дифференцируемая функция на всём множестве точек  $\bar{x} \in X$  в евклидовом пространстве  $R^2$ . Требуется найти точку минимума  $\bar{x}^*$  и минимум функции  $g(\bar{x}^*)$ .

Выбрав произвольное начальное приближение  $x^{(0)} \in X \subseteq R^2$ , построим следующую

итерационную последовательность:

$$\bar{x}^{(k+1)} = \bar{x}^{(k)} - \alpha_k \text{grad}(g(\bar{x}^{(k)})), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

Где величины  $\alpha_k$  (параметрические шаги) выбираются достаточно малыми из условия:

$$g(\bar{x}^{(k+1)}) < g(\bar{x}^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

Остановимся подробнее на векторном соотношении (1). Поскольку градиент функции двух переменных в ортонормированном базисе

$\bar{e}_1, \bar{e}_2$  имеет координаты  $grad f(x) = \left( \frac{\partial g}{\partial x_1}, \frac{\partial g}{\partial x_2} \right)$ , тогда

алгоритм (1) в скалярной форме принимает вид:

$$x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} - \alpha_k \frac{\partial g}{\partial x_1}(x^{(k)}), \quad x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} - \alpha_k \frac{\partial g}{\partial x_2}(x^{(k)}).$$

Окончание процесса устанавливается при выполнении неравенства:

$$\left| grad(g(x^{(k)})) \right| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (g'_{x_i})^2} \leq \varepsilon. \quad (3)$$





Если условие (2) не выполняется, то  $\alpha_k$  уменьшается вдвое и алгоритм (1) повторяется. При выполнении условия (3) полагают:  
 $\bar{x}^* \approx x^{(k)}$ ,  $g(\bar{x}^*) \approx g(x^{(k)})$ .

**Пример.** Методом градиентного спуска с точностью  $\varepsilon = 0,05$  минимизировать функцию  
 $g(\bar{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + e^{(x_1+x_2)}$ .

**Решение.** Вначале необходимо проверить выпуклость функции на множестве  $\bar{x} \in X \subseteq R^2$ , для чего составляется матрица частных производных второго порядка и по критерию Сильвестра проверяется её положительная определённость:

$$g''_{x_1x_1} = 2 + e^{(x_1+x_2)}, \quad \begin{bmatrix} g'_{x_1x_1} & g'_{x_1x_2} \\ g'_{x_1x_2} & g'_{x_2x_2} \end{bmatrix} = 8 + 6e^{(x_1+x_2)} > 0.$$

Таким образом, по критерию Сильвестра заданная функция выпукла на всей плоскости  $x_1Ox_2$ .

Начальное приближение возьмём в виде  $\bar{x}^{(0)} = (0,0)$   
и  $\alpha_0 = 1$ .

$$1\text{-й шаг: } k = 0; g(\bar{x}^{(0)}) = 1, \quad \frac{\partial g}{\partial x_1}(0,0) = 1, \quad \frac{\partial g}{\partial x_2}(0,0) = 1.$$

Из формулы (1) следует

$$x_1^{(1)} = x_1^{(0)} - a_0 \frac{\partial g}{\partial x_1}(0,0) = -1, \quad x_2^{(1)} = x_2^{(0)} - a_0 \frac{\partial g}{\partial x_2}(0,0) = -1;$$

$$g(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) = 3,145, \quad g(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) = 1,$$

т.е условие (2) не выполнено, вследствие чего необходимо уменьшить параметрический шаг вдвое,  $a_0 = 0,5$ , и повторяем вычисления с  $\bar{x}^{(0)}$ :

$$x_1^{(1)} = 0 - 0,5 \times 1 = -0,5; \quad x_2^{(1)} = 0 - 0,5 \times 1 = -0,5;$$

$$g(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) = 1,118 > g(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) = 1;$$

Условие (2) не выполнено. Уменьшаем  $a_0$  вдвое,

т.е.  $a_1 = \frac{a_0}{2} = 0,25$ . Далее

$$x_1^{(1)} = 0 - 0,25 \times 1 = -0,25; \quad x_2^{(1)} = 0 - 0,25 \times 1 = -0,25$$

$$g(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) = 0,794 < g(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) = 1.$$

Условие (2) выполнено, поэтому проверяем условие остановки процесса  $|\text{grad } g| \leq \varepsilon$ .

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}(\bar{x}^{(1)}) = 2x_1^{(1)} + e^{x_1^{(1)} + x_2^{(1)}} = 0,106,$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_2}(\bar{x}^{(1)}) = 4x_1^{(1)} + e^{x_1^{(1)} + x_2^{(1)}} = -0,393,$$

$$|\text{grad } g(\bar{x}^{(1)})| = \sqrt{0,106^2 + (-0,393)^2} = 0,407 > \varepsilon = 0,05$$

2-й шаг:  $k = 1$ ;  $x_1^{(1)} = -0,25$ ;  $x_2^{(1)} = -0,25$ ;  $a_1 = 0,25$ .

$$x_1^{(2)} = x_1^{(1)} - a_1 \frac{\partial g}{\partial x_1}(\bar{x}^{(1)}) = -0,25 - 0,25 \times 0,106 = -0,2765$$

$$x_2^{(2)} = x_2^{(1)} - \alpha_1 \frac{\partial g}{\partial x_2}(\bar{x}^{(1)}) = -0,25 - 0,25 \cdot (-0,393) = -0,1518;$$

$$g(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}) = 0,774 < g(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) = 0,794.$$

Оставляем значение  $a_1$ , приняв  $a_2 = a_1$ . Проверяем

условия остановки в точке  $\bar{x}^{(2)}$  :

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}(\bar{x}^{(2)}) = 2x_1^{(2)} + e^{x_1^{(2)} + x_2^{(2)}} = 0,0983;$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_2}(\bar{x}^{(2)}) = 4x_2^{(2)} + e^{x_1^{(2)} + x_2^{(2)}} = 0,0451;$$

$$|\text{grad } g(\bar{x}^{(2)})| = \sqrt{0,0983^2 + 0,0451^2} = 0,108 > \varepsilon$$

3-й шаг:  $k = 2$ ;  $x_1^{(2)} = -0,2765$ ;  $x_2^{(2)} = -0,1518$ ;  $a_2 = 0,25$ .

$$x_1^{(3)} = x_1^{(2)} - a_2 \frac{\partial g}{\partial x_1}(\bar{x}^{(2)}) = -0,2765 - 0,25 \times 0,0983 = -0,301;$$

$$x_2^{(3)} = x_2^{(2)} - a_2 \frac{\partial g}{\partial x_2}(\bar{x}^{(2)}) = -0,1518 + 0,25 \times 0,0451 = -0,163;$$

$$g(x_1^{(3)}, x_2^{(3)}) = 0,772 < g(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}) = 0,774.$$

Проверяем условия остановки в точке  $\bar{x}^{(3)}$  :

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}(\bar{x}^{(3)}) = 2x_1^{(3)} + e^{x_1^{(3)} + x_2^{(3)}} = 0,0262;$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_2}(\bar{x}^{(3)}) = 4x_2^{(3)} + e^{x_1^{(3)} + x_2^{(3)}} = -0,023;$$

$$|\text{grad } g(\bar{x}^{(3)})| = \sqrt{0,0262^2 + (-0,023)^2} = 0,035 < \varepsilon = 0,05$$

Точность достигнута следовательно,  $\bar{x}^* = (-0,301; -0,163)$   
а минимальное значение функции  $g^* \approx 0,772$ .

# Метод наискорейшего спуска

Метод наискорейшего спуска отличается от метода градиентного спуска *оптимальным способом определены параметрического шага  $\alpha_k$* , который находится из условия

$$\varphi_k(\alpha_k) = \min_{\alpha > 0} \varphi_k(\alpha), \quad \varphi_k(\alpha) = g(\bar{x}^{(k)} - \alpha \text{grad } g(\bar{x}^{(k)})).$$

После минимизации функции  $\varphi(\alpha)$  по переменной  $\alpha$  найденное значение  $\alpha^*$  принимается за  $\alpha_k$ , после чего реализуется метод градиентного спуска :

$$\bar{x}^{(k+1)} = \bar{x}^{(k)} - \alpha_k \text{grad } g(\bar{x}^{(k)}), \quad k = 0, 1, \square$$

Окончание итерационного процесса устанавливается при выполнении условия останова :

$$|\text{grad } g(\bar{x}^{(k)})| = \sqrt{\left[ \frac{\partial g}{\partial x_1}(\bar{x}^{(k)}) \right]^2 + \left[ \frac{\partial g}{\partial x_2}(\bar{x}^{(k)}) \right]^2} < \varepsilon$$

Таким образом, на каждом шаге метода наискорейшего спуска решается задача минимизации функции  $\varphi(\alpha)$  одной переменной  $\alpha$ .



Если  $g(\bar{x}) = \frac{1}{2}(A\bar{x}, \bar{x}) + (\bar{r}, \bar{x})$ , где  $A$  – симметричная матрица коэффициентов при квадратичных слагаемых,  $\bar{r} = (r_1, r_2, \dots, r_n)$  – коэффициенты при линейных слагаемых,  $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  – переменные,  $(\cdot, \cdot)$  – обозначение скалярного произведения, то величина параметрического шага  $\alpha_k$  может быть найдена в явном виде:

$$\alpha_k = 0.5 \frac{\left( \text{grad } g(\bar{x}^{(k)}), \text{grad } g(\bar{x}^{(k)}) \right)}{\left( A \text{ grad } g(\bar{x}^{(k)}), \text{grad } g(\bar{x}^{(k)}) \right)}, \text{ причем } \text{grad } g(\bar{x}^{(k)}) = A \cdot \bar{x}^{(k)} + \bar{r}.$$

Пример. Методом наискорейшего спуска найти минимума  $\bar{x}^*$  функции  $g(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_1x_2 - 7x_1 - 7x_2$ .  $\varepsilon = 0.01$ .

Решение.

Шаг 1:  $k = 0$ . Начальное приближение  $\bar{x}^{(0)} = (0, 0)$ ,

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}(\bar{x}) = 2x_1 + x_2 - 7, \quad \frac{\partial g}{\partial x_2}(\bar{x}) = 4x_2 + x_1 - 7,$$

$$\varphi_0(\alpha) = g(-7\alpha, -7\alpha) = 98\alpha(2\alpha + 1), \quad \varphi'_0(\alpha) = 392\alpha + 98, \quad \alpha_0 = -0.25,$$

$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0.25 \begin{pmatrix} -7 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/4 \\ -7/4 \end{pmatrix};$$

$$|\text{grad } g(\bar{x}^{(1)})| = \sqrt{\left[\frac{\partial g}{\partial x_1}(\bar{x}^{(1)})\right]^2 + \left[\frac{\partial g}{\partial x_2}(\bar{x}^{(1)})\right]^2} = \sqrt{\left(-\frac{49}{4}\right)^2 + \left(-\frac{63}{4}\right)^2} \approx 19.9531 > \varepsilon.$$

Шаг 2:  $k = 1$ ,  $\bar{x}^{(1)} = (-1.75; -1.75)$ ;  $\frac{\partial g}{\partial x_1}(\bar{x}^{(1)}) = -\frac{49}{4}$ ,  $\frac{\partial g}{\partial x_2}(\bar{x}^{(1)}) = -\frac{63}{4}$ ,

$$\alpha_1 = 0.5 \frac{(\partial g / \partial x_1)^2 + (\partial g / \partial x_2)^2}{(\partial g / \partial x_1)^2 + 2(\partial g / \partial x_2)^2 + (\partial g / \partial x_1)(\partial g / \partial x_2)} = \frac{(49^2 + 63^2)}{2(49^2 + 49 \cdot 63 + 2 \cdot 63^2)} = 0.2372$$

$$\begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/4 \\ -7/4 \end{pmatrix} - 0.2372 \cdot \begin{pmatrix} -49/4 \\ -63/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1557 \\ 1.9859 \end{pmatrix}. \text{ Очевидно, } \text{grad } g(\bar{x}^{(2)}) > \varepsilon.$$

Шаг 3:  $k = 2$ ,  $\bar{x}^{(2)} = (1.1557; 1.9859)$ ;  $\frac{\partial g}{\partial x_1}(\bar{x}^{(2)}) = -2,7027$ ,  $\frac{\partial g}{\partial x_2}(\bar{x}^{(2)}) = 2,0993$ ,

$$\alpha_2 = 0.560638, \quad \begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1557 \\ 1.9859 \end{pmatrix} - 0.560638 \cdot \begin{pmatrix} 2.7027 \\ 2.0993 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.67094 \\ 0.80895 \end{pmatrix};$$



Шаг 4.  $\kappa = 4$ ,  $\frac{\partial g}{\partial x_1}(\bar{x}^{(3)}) = -0.84917$ ,  $\frac{\partial g}{\partial x_2}(\bar{x}^{(3)}) = -1.09326$ ,

$grad g(\bar{x}^{(3)}) > \varepsilon$  — очевидно,  $\alpha_3 = 0.237173$ ;  $(x_1^{(4)}; x_2^{(4)}) = (2.87234; 1.06824)$ ;

Шаг 5.  $k = 5$ .  $\frac{\partial g}{\partial x_1}(\bar{x}^{(4)}) = -0.18708$   $\frac{\partial g}{\partial x_2}(\bar{x}^{(4)}) = 0.1453$ ,

$grad g(\bar{x}^{(4)}) > \varepsilon$ ;  $\alpha_4 = 0.56065$ ;  $(x_1^{(5)}; x_2^{(5)}) = (2.97723; 0.98678)$ ;

Шаг 6.  $k = 6$ .  $\frac{\partial g}{\partial x_1}(\bar{x}^{(5)}) = -0.05876$ ,  $\frac{\partial g}{\partial x_2}(\bar{x}^{(5)}) = -0.07565$ ,

$grad g(\bar{x}^{(5)}) > \varepsilon$ ;  $\alpha_5 = 0.23715$ ;  $(x_1^{(7)}; x_2^{(7)}) = (2.99116; 1.00472)$ ;

Шаг 7.  $k = 7$ .  $\frac{\partial g}{\partial x_1}(\bar{x}^{(7)}) = -0.01296$ ,  $\frac{\partial g}{\partial x_2}(\bar{x}^{(7)}) = 0.01004$ ,  $grad g(\bar{x}^{(7)}) > \varepsilon$ ;

$\alpha_6 = 0.561587$ ,  $(x_1^{(8)}; x_2^{(8)}) = (2.99844; 0.99908)$ ,  $grad g(\bar{x}^{(8)}) < \varepsilon$ . Конец.

# Метод сопряженных направлений

Метод сопряженных направлений состоит в построении последовательности

$$\bar{x}^{(k+1)} = \bar{x}^{(k)} - \alpha_k \bar{p}^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где  $\alpha_k$  выбирается так же, как и в методе наискорейшего спуска :

$$\varphi_k(\alpha_k) = \min_{\alpha > 0} \varphi_k(\alpha), \quad \varphi_k(\alpha) = g(\bar{x}^{(k)} - \alpha \bar{p}^{(k)}), \quad (2)$$

а направление спуска  $\bar{p}^{(k)}$  — с помощью выражения

$$\bar{p}^{(k)} = \text{grad } g(\bar{x}^{(k)}) + \beta_k \bar{p}^{(k-1)}, \quad k = 1, 2, \dots; \quad (3)$$

$$\beta_0 = 0, \quad \bar{p}^{(0)} = \text{grad } g(\bar{x}^{(0)}); \quad (4)$$

$$\beta_k = \frac{|\text{grad } g(\bar{x}^{(k)})|^2}{|\text{grad } g(\bar{x}^{(k-1)})|^2}. \quad (5)$$

Критерием останова является условие

$$|\text{grad } g(\bar{x}^{(k)})| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial g}{\partial x_i}(\bar{x}^{(k)}) \right]^2} \leq \varepsilon. \quad (6)$$

Заметим, что вектор  $\bar{p}^{(k)}$  определяется не только антиградиентом  $\left(-grad g(\bar{x}^{(k)})\right)$ , но и направлением спуска  $\left(-\bar{p}^{(k-1)}\right)$  на предыдущем шаге. Это позволяет более полно, чем в методах градиентного и наискорейшего, учитывать особенности функции  $g(\bar{x})$  при построении итерационного процесса. Для квадратичных функций, определенных в  $R^n$ , требуется не больше  $n$  итераций метода сопряженных направлений.

### Пример.

Методом сопряженных направлений найти точки минимума  $\bar{x}^*$  функции  $g(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_1x_2 - 7x_1 - 7x_2$ .

**Решение.** Поскольку  $g(\bar{x})$  – квадратичная функция, то точка минимума  $\bar{x}^*$  может быть найдена после двух шагов метода сопряженных направлений.

Шаг 1:  $k = 0$ . Выбрав начальное приближение  $\bar{x}^{(0)} = (0; 0)$ , по формулам (2), (4) находим

$$\bar{p}^{(0)} = \text{grad } g(\bar{x}^{(0)}) = (2x_1 + x_2 - 7; 4x_2 + x_1 - 7)|_{\bar{x}^{(0)}} = (-7; -7);$$

$$\varphi_0(\alpha) = g(\bar{x}^{(0)} - \alpha \bar{p}^{(0)}) = 98(2\alpha^2 - \alpha).$$

Из условия минимума функции  $\varphi_0(\alpha)$  получим  $\alpha_0 = 0.25$ .

Отсюда

$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} - \alpha_0 \begin{pmatrix} p_1^{(0)} \\ p_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 0.25 \begin{pmatrix} -7 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/4 \\ 7/4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Шаг 2. } k = 1. \text{ grad } g(\bar{x}^{(1)}) = \left( 2 \cdot \frac{7}{4} + \frac{7}{4} - 7; 4 \cdot \frac{7}{4} + \frac{7}{4} - 7 \right) = \left( -\frac{7}{4}; \frac{7}{4} \right).$$

$$\beta_1 = \frac{|\text{grad } g(\bar{x}^{(1)})|}{|\text{grad } g(\bar{x}^{(0)})|} = \frac{2 \cdot 49/16}{2 \cdot 49} = \frac{1}{16}.$$

Вычисляем направление спуска  $\begin{pmatrix} p_1^{(1)} \\ p_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial g / \partial x_1 \\ \partial g / \partial x_2 \end{pmatrix}(\bar{x}^{(1)}) + \beta_1 \begin{pmatrix} p_1^{(0)} \\ p_2^{(0)} \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} -7/4 \\ 7/4 \end{pmatrix} + \frac{1}{16} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -35/16 \\ 21/16 \end{pmatrix}.$$

Поэтому  $\varphi_1(\alpha) = \frac{49}{32} \left( \frac{7}{2} \alpha^2 - 4\alpha - 392 \right)$  и  $\alpha_1 = \frac{4}{7}$ .

Окончательно :

$$\begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix} - \alpha_1 \begin{pmatrix} p_1^{(1)} \\ p_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/4 \\ 7/4 \end{pmatrix} - \frac{4}{7} \cdot \begin{pmatrix} -35/16 \\ 21/16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Итак,  $\bar{x}^* = (3; 1)$ ;  $g^* = g(\bar{x}^*) = -14$



Математические методы в экономике 061800

Институт Международного Бизнеса и  
Экономики кафедра Математики и  
Моделирования

Ушаков А.А.

---

# Численные методы

---

Список литературы

# Основная литература

- 1). Численные методы в примерах и задачах : Учеб. пособие/  
В.И.Киреев, А.В.Пантелеев. – 2 – е изд. стер. – М. : Высш. шк., 2006 – 480 с.
- 2). Численные методы. – М. : ФИЗМАТЛИТ, Формалев В.Ф.,  
Ревизников Д.Л., 2004. – 400 с.
- 3). Основы численных методов : Учебник для вузов/ В.М.Вержбицкий.  
– М. : Высш. шк., 2002. – 840 с.