Вычислительная математика

Математические методы в экономике 061800

Институт Международного Бизнеса и Экономики кафедра Математики и Моделирования

Ушаков А.А.

Численные методы решения СЛАУ

Лекция № 1,2

Предмет вычислительной математики

1. Вычислительная математика имеет дело в основном с дискретными объектами : вместо отрезка прямой часто рассматривается система точек $\{t_k\}_{k=0}^{N}$, вместо непрерывной функции $f(x)$ – табличная функция $\{f_k\}_{k=0}^{M}$. Такие замены естественно порождают погрешности метода.

2. В машинных вычислениях присутствуют числа с ограниченным количеством знаков после запятой из-за конечности длины мантиссы при представлении действительного числа в памяти ЭВМ. Другими словами, в вычислениях присутствует машинная погрешность $\delta_{м}$.
Это приводит к вычислительным эффектам, неизвестным, например, в математическом анализе, в классической теории обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) или в уравнениях матьематической физики.

3. В вычислительной практике большое значение имеет *обусловленность* задачи, т.е. чувствительность её решения к малым изменениям входных данных.

4. В отличие от "классической математики" выбор вычислительного алгоритма влияет на результаты вычислений.

5. Существенная черта численного метода – *экономичность* вычислительного алгоритма, т.е. минимизация числа элементарных операций при выполнении его на ЭВМ.

6. Погрешности при численном решении задач делятся на две категории – *неустранимые* и *устранимые*. К первым относят погрешности, связанные с построением математической модели объекта и приближенным заданием входных данных, ко вторым – погрешности метода решения задачи и ошибки округления, которые являются источником малых возмущений, вносимых в решение задачи.

Методы решения СЛАУ

- Метод Гаусса
- Ax=f, $|A| \neq 0$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Теорема Крамера

- Если определитель матрицы не равен нулю $|A| \neq 0$, то решение СЛАУ существует и единственно.

Метод Гаусса, первый шаг

$$A_p = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & f_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & f_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & f_n \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & f_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & f_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{2n}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & f_n^{(1)} \end{pmatrix}$$

$$a_{kj}^{(1)} = a_{kj} - a_{k1}\frac{a_{1j}}{a_{11}}, \quad f_k^{(1)} = f_k - a_{k1}\frac{f_1}{a_{11}}, \quad k = 2,\ldots,n, \quad j = 2,\ldots,n$$

Метод Гаусса, шаг-s

$$\square \approx A_p^{(s)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1n} & f_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2s}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & f_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{ss}^{(s)} & a_{ss+1}^{(s)} & \cdots & a_{sn}^{(s)} & f_s^{(s)} \\ \vdots & \vdots & 0 & a_{s+1s+1}^{(s+1)} & \cdots & a_{s+1n}^{(s+1)} & f_{s+1}^{(s+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{ns+1}^{(s+1)} & \cdots & a_{nn}^{(s+1)} & f_n^{(s+1)} \end{pmatrix}$$

$$a_{kj}^{(s+1)} = a_{kj}^{(s)} - \frac{a_{ks}^{(s)}}{a_{ss}^{(s)}} a_{sj}^{(s)}, \quad f_k^{(s+1)} = f_k^{(s)} - \frac{f_k^{(s)}}{a_{ss}^{(s)}} a_{sj}^{(s)},$$

$$k = s+1, \ldots, n-1, \quad j = s+1, \ldots, n-1$$

Решение СЛАУ методом Гаусса

$$x_n = \frac{f_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}, \quad x_{n-1} = \frac{f_{n-1}^{(n-1)} - a_{n-1n}^{(n-1)} x_n}{a_{n-1n-1}^{(n-1)}}, \quad и \; т.д.$$

$$x_1 = \frac{f_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \cdots - a_{1n}x_n}{a_{11}}$$

Пример. Решить методом Гаусса СЛАУ

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 = 16$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10$$
$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 16$$

Преобразуем расширенную матрицу

Прямой ход.

$$A_p = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 16 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 3 & 3 & 16 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 16 \\ 0 & 1 & -10 & -28 \\ 0 & 5 & 2 & 16 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 16 \\ 0 & 1 & -10 & -28 \\ 0 & 0 & 52 & 156 \end{pmatrix}$$

Обратный ход.

$$x_3 = \frac{156}{52} = 3, \quad x_2 = 10x_3 - 28 = 2, \quad x_1 = 8 - 0.5x_2 - 2x_3 = 1$$

Метод LU- разложения

- $A = LU, \quad LU \cdot x = f.$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ L_{21} & L_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{n1} & L_{n2} & \cdots & L_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

элементы матриц L и U вычисляются по формулам

$$L_{ij} = a_{ij} - \sum_{s=1}^{j-1} L_{is} u_{sj}, \quad i \geq j, \qquad u_{ij} = \frac{1}{L_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{s=1}^{i-1} L_{is} u_{sj} \right), \quad i < j$$

изменённые элементы матрицы A хранятся в виде:

$$A = \begin{pmatrix} L_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ L_{21} & L_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{n1} & L_{n2} & L_{n3} & \cdots & L_{nn} \end{pmatrix}$$

Прямой и обратный ходы

- Решить систему (прямой ход) $Ly = f$
- Чтобы найти x, надо решить систему (обратный ход) $Ux = y$
- Пример: решить СЛАУ:

$$
\begin{aligned}
2x_1 + x_2 + 4x_3 &= 16 \\
3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 10 \\
x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 16
\end{aligned}
$$

- Найдем матрицы U, L

$$L_{11} = a_{11} = 2; \quad L_{21} = a_{21} = 3; \quad L_{31} = a_{31} = 1$$

$$u_{12} = 0.5a_{12} = 0.5; \quad u_{13} = 0.5a_{13} = 0.5 \cdot 4 = 2$$

$$L_{22} = a_{22} - L_{21}u_{12} = 0.5; \; L_{32} = a_{32} - L_{31}u_{12} = 2.5$$

$$u_{23} = \frac{1}{L_{22}}\left(a_{23} - L_{21}u_{13}\right) = -10$$

$$L_{33} = a_{33} - L_{31}u_{13} - L_{32}u_{23} = 26$$

Прямой ход

- Решим систему $Ly = f$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0.5 & 0 \\ 1 & 2.5 & 26 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 10 \\ 16 \end{pmatrix} \to y_1 = 8, \quad y_2 = (10 - 3y_1) \cdot 2 = -28,$$

$$y_3 = \frac{16 - y_1 - 2.5y_2}{26} = 3$$

Обратный ход

- Решим систему $Ux = y$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 2 \\ 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -28 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\to x_3 = 3, \quad x_2 = 10x_3 - 28 = 2,$$

$$x_1 = 8 - 0.5x_2 - 2x_3 = 1$$

Метод прогонки

- Матрица А - трёхдиагональная

$$A = \begin{pmatrix} -b_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & f_1 \\ a_2 & -b_2 & c_2 & 0 & 0 & \cdots & f_2 \\ 0 & a_3 & -b_3 & c_3 & 0 & \cdots & f_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & a_n & -b_n & f_n \end{pmatrix}$$

$$\text{Развёрнутая запись системы}:$$

$$a_i x_{i-1} - b_i x_i + c_i x_{i+1} = f_i, \quad a_1 = c_n = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \quad (1)$$

Используя метод Гаусса, систему (1) *можно представить в виде*

$$x_i = p_i x_{i+1} + q_i, \quad i = 1, \ldots, n-1. \quad (2)$$

$$(2) \to (1): \qquad a_i\left(p_{i-1}x_i + q_{i-1}\right) - b_i x_i + c_i x_{i+1} = f_i$$

преобразуя полученное уравнение, получим рекуррентные соотношения для прогоночных коэффициентов

(прямой ход)

$$p_i = \frac{c_i}{b_i - a_i p_{i-1}}, \quad q_i = \frac{a_i q_{i-1} - f_i}{b_i - a_i p_{i-1}}, \quad i = 1, \ldots, n-1$$

- Обратный ход метода прогонки

из уравнений $(1),(2)$

$$x_{n-1} = p_{n-1}x_n + q_{n-1}$$

$$a_n x_{n-1} - b_n x_n + 0 \cdot x_{n+1} = f_n$$

находим x_n :

$$x_n = \frac{a_n q_{n-1} - f_n}{b_n - a_n p_{n-1}}$$

по (2) *находим остальные неизвестные*

- Достаточное условие корректности и устойчивости метода прогонки:

$$a_i \neq 0, \;\; c_i \neq 0, \;\; i = 2,\ldots,n-1$$

$$|b_i| \geq |a_i| + |c_i|. \qquad (3)$$

и в (3) *имеет место строгое неравенство хотя бы при одном i*

Пример. Дана система уравнений с трехдиагональной матрицей A

$$A_p = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 6 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Матрица A удовлетворяет условию диагонального преобладания.

- Прямой ход.

$$b_1 = -5,\ b_2 = -6,\ b_3 = -4,\ b_4 = 3$$

$$p_1 = \frac{c_1}{b_1} = -\frac{3}{5}; \qquad q_1 = -\frac{f_1}{b_1} = \frac{8}{5};$$

$$p_2 = \frac{c_2}{b_2 - a_2 p_1} = -\frac{5}{21}; \qquad q_2 = \frac{a_2 q_1 - f_2}{b_2 - a_2 p_1} = \frac{26}{21};$$

$$p_3 = \frac{c_3}{b_3 - a_3 p_2} = \frac{42}{79}; \qquad q_3 = \frac{a_3 q_2 - f_3}{b_3 - a_3 p_2} = \frac{37}{79};$$

$$x_4 = \frac{a_4 q_3 - f_4}{b_4 - a_4 p_3} = 1; \qquad x_3 = p_3 x_4 + q_3 = 1;$$

$$x_2 = p_2 x_3 + q_2 = 1; \qquad x_1 = p_1 x_2 + q_1 = 1.$$

Итерационные методы

- Метод простых итераций (МПИ)

$$Ax = f \Leftrightarrow \qquad x = Bx + g, \qquad (1)$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & 0 & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \qquad b_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, \qquad i \neq j, \qquad g = \begin{pmatrix} f_1 / a_{11} \\ f_2 / a_{22} \\ \vdots \\ f_n / a_{nn} \end{pmatrix}$$

Задаём вектор $x^{(0)}$ *на первой итерации*

Компонеты следующего вектора $x^{(1)}$ *находим из системы уравнений* (1)

$$x_i^{(1)} = g_i + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j^{(0)}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Зная компоненты вектора $x^{(k)}$,
находим компонеты $x^{(k+1)}$ *по аналогичной схеме*

$$x_i^{(k+1)} = g_i + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j^{(k)}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Останов при $\left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\| < \varepsilon$, ε – *задано*

- Теорема 1 (о достаточном условии сходимости МПИ:

МПИ сходится к единственному решению исходной системы $Ax = f$ *при любом начальном приближении* $x^{(0)}$ *со скоростью не медленнее геометрической прогрессии, если какая – либо норма матрицы B меньше единицы,*

т.е. $\|B\| < 1$. $\|B\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}^2}$ *– норма матрицы.*

- Условия сходимости выполняются, если

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1,\ i \neq j}^{n} |a_{ij}|,$$ *в матрице А выполняются*

условия диагонального преобладания

Сходимость МПИ гарантирована условием

$$\left\|x^{(k+1)} - x^{(0)}\right\| \leq \frac{\|B\|^{(k+1)}}{1 - \|B\|}\|g\| \leq \varepsilon, \qquad \|g\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} g_i^2}. \qquad (1)$$

Пример.

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13, \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14, \end{cases} \qquad \varepsilon = 0.01$$

Условия диагонального преобладания для матрицы А выполняются

$$\begin{cases} x_1 = 1.2 - 0.1x_2 - 0.1x_3, \\ x_2 = 1.3 - 0.2x_1 - 0.1x_3, \\ x_3 = 1.4 - 0.2x_1 - 0.2x_2. \end{cases} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -0.1 & -0.1 \\ -0.2 & 0 & -0.1 \\ -0.2 & -0.2 & 0 \end{pmatrix}; \qquad g = \begin{pmatrix} 1.2 \\ 1.3 \\ 1.4 \end{pmatrix}.$$

$$\|B\| = 0.4 < 1, \qquad x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1.2 \\ 1.3 \\ 1.4 \end{pmatrix}.$$

Количество итераций вычисляется по (1) и K=5

$$x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 0 & -0.1 & -0.1 \\ -0.2 & 0 & -0.1 \\ -0.2 & -0.2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1.2 \\ 1.3 \\ 1.4 \end{pmatrix}, \quad k = 0,\ 1, \ldots ,$$

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.9300 \\ 0.9200 \\ 0.9000 \end{pmatrix}, \quad x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1.0180 \\ 1.0240 \\ 1.0300 \end{pmatrix}, \quad x^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.9946 \\ 0.9934 \\ 0.9916 \end{pmatrix},$$

$$x^{(4)} = \begin{pmatrix} 1.0015 \\ 1.0020 \\ 1.0024 \end{pmatrix}, \quad x^{(5)} = \begin{pmatrix} 0.9996 \\ 0.9995 \\ 0.9993 \end{pmatrix}, \quad \left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\| = 0.0027 < \varepsilon .$$

Приближенное решение $\hat{x} = (0.9996, \quad 0.9995, \quad 0.9993)$,

Точное решение $x^* = (1, \quad 1, \quad 1)$.

Задание к первой лабораторной работе

Дана расширенная матрица

$$A_p = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & f_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & f_1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & f_1 \end{pmatrix}.$$

Необходимо решить СЛАУ методами:

1) *Гаусса*,

2) *LU – разложения*,

3) *простой итерации (Якоби) с точностью* $\varepsilon = 10^{-4}$,

4) *методом прогонки решить систему с трехдиагональной матрицей*.

Вычислительная математика

Математические методы в экономике 061800

Институт Международного Бизнеса и Экономики кафедра Математики и Моделирования

Ушаков А.А.

Методы решения нелинейных уравнений

Лекция № 3

Отделение корней

Теорема.

Если функция $f(x)$, *определяющая уравнение* $f(x)=0$ *на концах отрезка* $[a,b]$ *принимает значения разных знаков, т.е.* $f(a)\cdot f(b)<0$, *то на этом отрезке содержится по крайней один корень уравнения. Если же* $f(x)$ *непрерывна и дифференцируема и её первая производная сохраняет знак внутри отрезка* $[a,b]$, *то на* $[a,b]$ *находится только один корень* x^* *уравнения.*

в вычислительной практике находят $[a,b]$:

1. *средствами машинной графики строят график функции* $f(x)$ *и приближенно находят интервал, на котором находится корень;*
2. *средствами математического анализа с помощью исследования функции и построения графиков.*

Метод половинного деления

1. *Уравнение* $f(x) = 0$.

2. *Отрезок* $[a, b]$, *т.е.* $f(a) \cdot f(b) < 0$.

3. *На* $[a, b]$ *один корень, т.е.* $f'(x) > 0$ *или* $f'(x) < 0$ *для всех* $x \in [a, b]$.

4. *Величина* ε.

Полагаем $k = 0$.

$1-$*ый шаг*: $c_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$, *где* $a_0 = a$, $b_0 = b$.

$2-$*ой шаг*: *если* $f(a_k) \cdot f(c_k) < 0$, *то* $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = c_k$, *если* $f(a_k) \cdot f(c_k) = 0$, *то* $c_k -$ *корень, иначе* $-$ $a_{k+1} = c_k$, $b_{k+1} = b_k$, $[a_{k+1}, b_{k+1}] -$ *новый отрезок.*

$3-$*ий шаг*: *если* $(b_{k+1} - a_{k+1}) \le \varepsilon$, *то значение корня равно* $x^* \cong \dfrac{a_{k+1} + b_{k+1}}{2}$ *и завершаем процесс, иначе полагаем* $k = k + 1$ *и переходим к шагу* 1.

- Оценка числа итераций $$|b_0 - a_0| \cdot 2^{-k} < \varepsilon; \qquad k \ge \log_2 \frac{(b_0 - a_0)}{\varepsilon}.$$

- Пример. $$x^2 - e^{-x} = 0, \qquad \varepsilon = 0.01, \qquad [0.5, 1].$$

k	$f(a_k)$	a_k	b_k	$f(b_k)$	$c_k = \frac{a_k + b_k}{2}$	$f(c_k)$	$b_k - a_k$
0	-0.3565	0.5	1	0.6321	0.75	0.09013	0.5
1	-0.3565	0.5	0.75	0.09013	0.625	-0.1446	0.25
2	-0.1446	0.625	0.75	0.09013	0.6875	-0.0301	0.125
3	-0.0301	0.6875	0.75	0.09013	0.7187	0.0292	0.0625
4	-0.0301	0.6875	0.7187	0.0292	0.7031	-0.00069	0.0312
5	-0.00069	0.7031	0.7187	0.0292	0.7109	0.0142	0.0156
6	-0.00069	0.7031	0.7109	0.0142	0.7070	0.0067	0.0078

$$b_6 - a_6 = 0.0078 < \varepsilon = 0.01, \quad x^* = c_6 = 0.707$$

Метод хорд

- К условиям 1), 2), 3), 4) МДП добавляется условие

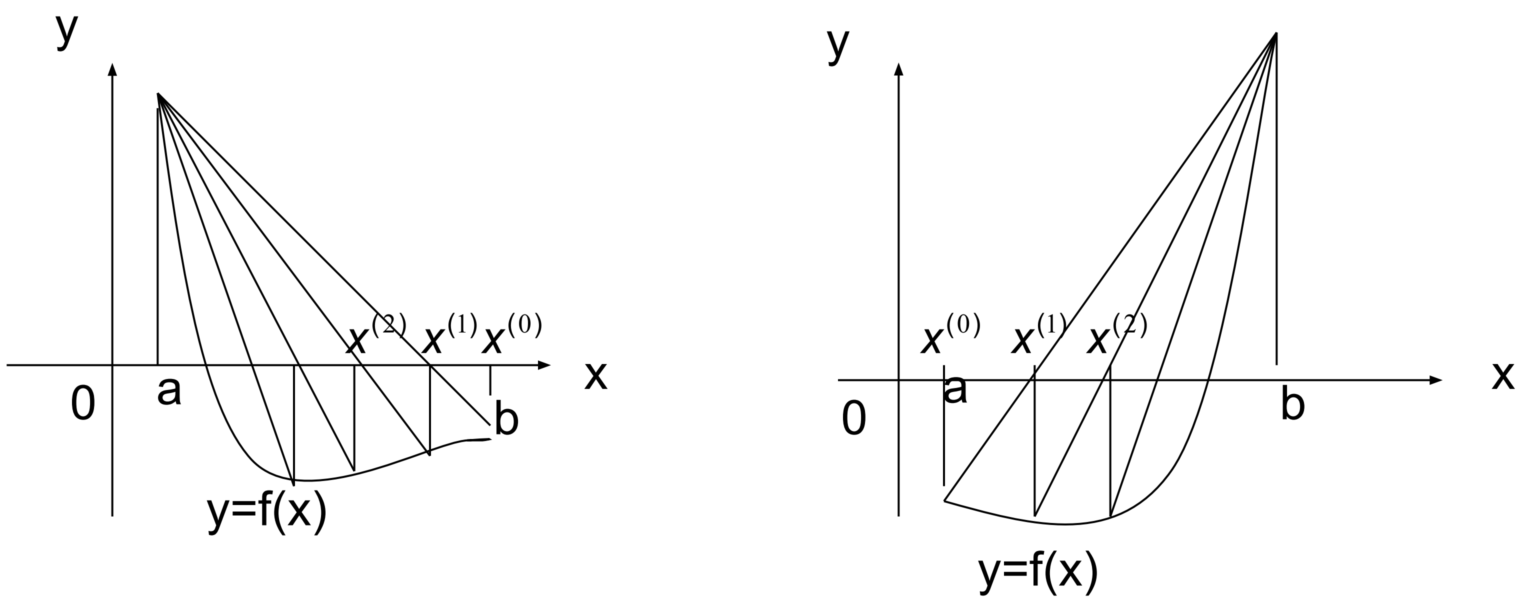
$f''(x) > 0$ $(f''(x) < 0)$ *для всех* $x \in [a, b]$

$$x^{(0)} = \begin{cases} a, \ \text{если} \ \ f(a) \cdot f''(a) > 0, \\ b, \ \text{если} \ \ f(b) \cdot f''(b) > 0, \end{cases} \quad \text{то корень уравнения находится}$$

по схеме

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f(x^{(k)}) - f(x^{(0)})} \left(x^{(k)} - x^{(0)} \right), \quad k = 0, 1 \square \ ,$$

$$\text{Итерационный процесс прерывается, если} \ \left| f\left(x^{(k)} \right) \right| \leq \varepsilon.$$



Если $f''(x) < 0$, *то уравнение можно изменить на* $-f(x) = 0$, *и повторить все сначала*.

ЗАМЕЧАНИЕ : *Для выявления неподвижного конца используется условие* $f''(x) \cdot f(t) > 0$, *где* $t = a$ *или* $t = b$.

- Пример.

$$f(x) = x^2 - e^{-x} = 0, \quad \varepsilon = 0.001, \quad [0.5;\, 1],$$

$$f'(x) = 2x + e^{-x}, \quad f''(x) = 2 - e^{-x} > 0, \quad f(1) \cdot f''(x) > 0.$$

$$x^{(0)} = 0.5, \quad x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{\left(x^{(k)}\right)^2 - e^{-x^{(k)}}}{\left(x^{(k)}\right)^2 - e^{-x^{(k)}} - 1 + e^{-1}} \left(x^{(k)} - 1\right), \quad k = 0, 1\ldots$$

Вычисляем следующую последовательность:

$$x^{(1)} = 0.680312, \quad x^{(2)} = 0.700954, \quad x^{(3)} = 0.7032.$$

Проверяем условие остановки:

$$\left| f\left(x^{(3)}\right) \right| = 5.14 \cdot 10^{-4} < \varepsilon$$

Метод Ньютона

- Теорема (достаточные условия сходимости метода Ньютона).

Пусть выполняются следующие условия:

1. *Функция* $f(x)$ *определена и дважды дифференцируема на* $[a,b]$.

2. *Отрезку* $[a,b]$ *принадлежит только один корень* x^*.

3. *Производные* $f'(x)$, $f''(x)$ *на* $[a,b]$ *сохраняют знак*, $f'(x) \neq 0$.

4. *За начальное приближение* $x^{(0)}$ *принимается один из концов отрезка* $[a,b]$, *а именно*

$$x^{(0)} = \begin{cases} a, \text{ если } f(a)\cdot f''(a) > 0, \\ b, \text{ если } f(b)\cdot f''(b) > 0. \end{cases}$$

Тогда метод Ньютона для уравнения $f(x)=0$ *выглядит следующим образом*

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

- Пример.

$$x^2 - e^{-x} = 0, \quad \varepsilon = 0.001, \quad [0.5, 1].$$

На этом отрезке один корень x^*.

$$f(0.5) = 0.25 - \frac{1}{\sqrt{e}} < 0, \; f(1) = 1 - \frac{1}{e} > 0,$$

$$f''(x) = 2 - e^{-x} > 0 \Rightarrow f''(x) f(1) > 0.$$

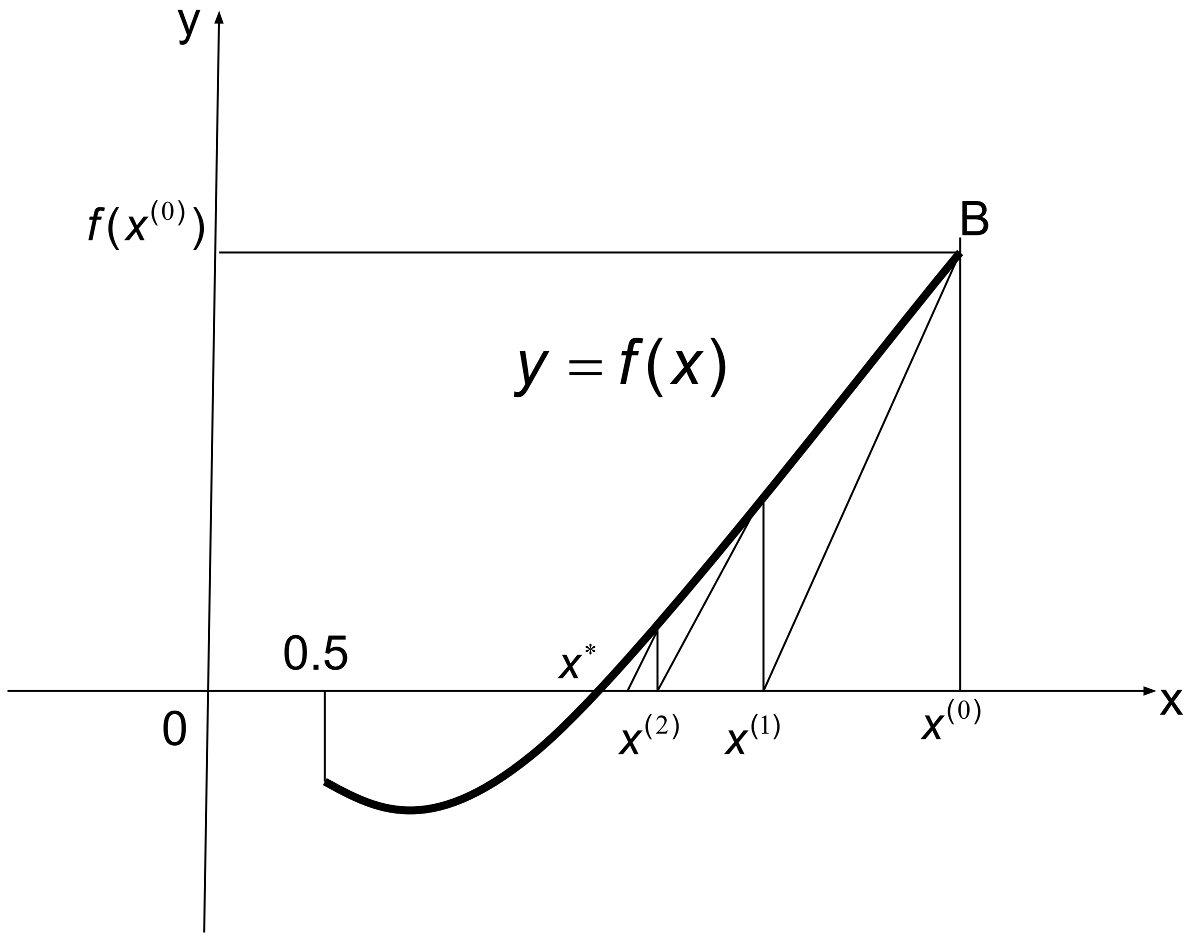
$$x^{(0)} = 1, \quad x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{(x^{(k)})^2 - e^{-x^{(k)}}}{2x^{(k)} + e^{-x^{(k)}}}, \quad k = 0, 1 \ldots,$$

$$x^{(1)} = 0.73304, \; x^{(2)} = 0{,}70381, \; x^{(3)} = 0.703467,$$

$$\left|x^{(1)} - x^{(0)}\right| = 0.27, \; \left|x^{(2)} - x^{(1)}\right| = 0.029, \; \left|x^{(3)} - x^{(2)}\right| = 0.00034,$$

$$f(x^{(0)}) = 0.63212, \; f(x^{(1)}) = 0.05690, \; f(x^{(2)}) = 0.00065,$$

$$f(x^{(3)}) = 8.25 \cdot 10^{-7}.$$


y
$f(x^{(0)})$
B
$y = f(x)$
0.5
x^*
0
$x^{(2)}$
$x^{(1)}$
$x^{(0)}$
x

Метод простых итераций

$1-й \;\; шаг: \quad f(x)=0 \Leftrightarrow x=\varphi(x), \;\; |\varphi'(x)|<1 \;\; на \;\; [a,b].$

$2-й \;\; шаг: \quad задаём \quad x^{(0)} \in [a,b], \quad k=0.$

$3-й \;\; шаг: \quad x^{(k+1)}=\varphi(x^{(k)}).$

$4-й \;\; шаг: \quad если \;\; \left|x^{(k+1)}-x^{(k)}\right|<\varepsilon \Rightarrow x^*=x^{(k+1)},$

$иначе \;\; k=k+1 \;\; и \;\; переходим \;\; к \;\; шагу \; 3.$

Пример.

$$x^2-e^{-x}=0 \Leftrightarrow x=e^{-\frac{x}{2}}, \;\; \varepsilon=0.001, \;\; [0.5,1], \;\; x^{(0)}=0.75.$$

$$x^{(1)}=0.6873, \;\; x^{(2)}=0.7091, \;\; x^{(3)}=0.7015, \;\; x^{(4)}=0.7042, \;\; x^{(5)}=0.7032.$$

$$\left|x^{(1)}-x^{(0)}\right|=0.0627, \;\; \left|x^{(2)}-x^{(1)}\right|=0.0218, \;\; \left|x^{(3)}-x^{(2)}\right|=0.0076,$$

$$\left|x^{(4)}-x^{(3)}\right|=0.0027, \;\; \left|x^{(5)}-x^{(4)}\right|=0.0010.$$

Задание ко второй лабораторной работе

Задание состоит в следующем :

1) *определить отрезок* $[a,b]$, *который содержит корень* x^* *уравнения и в точках которого* $f'(x)$ *и* $f''(x)$ *одного знака*;

2) *методом половинного деления найти корень* x^* *уравнения* $f(x)=0$ *с точностью* $\varepsilon = 10^{-4}$;

3) *методом хорд найти тот же корень* x^*;

4) *методом Ньютона найти тот же корень* x^*;

5) *методом итераций найти же корень* x^*.

Вычислительная математика

Математические методы в экономике 061800

Институт Международного Бизнеса и Экономики кафедра Математики и Моделирования

Ушаков А.А.

Численные методы приближения сеточных функций

Лекция № 4

Для восполнения сеточных функций $y_i = f(x_i)$, $x_i \in [a,b]$, $i = 1, \dots, n$ аппроксимирующими функциями $\tilde{y} = \tilde{f}_m(x, \bar{a})$ используются, как правило, алгебраические многочлены

$$\tilde{f}_m(x, \bar{a}) = \sum_{s=0}^{m} a_s x^s = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m.$$

Условия согласования.

1. Условия интеполяции:

$$\delta\tilde{f}_m(x_i, \bar{a}) = \tilde{f}_m(x_i, \bar{a}) - f(x_i) = 0.$$

2. Дискретные условия согласования:

$$\delta\tilde{f}_m^{(p)}(x_i, \bar{a}) = \tilde{f}_m^{(p)}(x_i, \bar{a}) - f_m^{(p)}(x_i) = 0, \quad p - \text{порядок производной}.$$

3. Интегральные условия:

$$\delta_m(\bar{a}) = \sqrt{\frac{1}{n+1} \sum_{s=0}^{n} \left[\tilde{f}_m(x_s, \bar{a}) - f(x_s)\right]^2} \to \min_{\bar{a}} \delta_m(\bar{a}) \quad (m \le n).$$

Условие 3) выражает минимум среднеквадратичной погрешности величины $\left|\widetilde{f}_m(x_s,\overline{a})-f(x_s)\right|$.

4. $\delta\widetilde{f}(I_a^b)=\int\limits_a^b\left(\widetilde{f}_m(x,\overline{a})-f(x)\right)dx=0. \quad I_a^b=\int\limits_a^b f(x)dx.$

Условие 4) соответствует равенству площадей под кривыми $\widetilde{f}(x,\overline{a})$ и $f(x)$.

Методы функциональной интерполяции

Многочлен Лагранжа

Сеточная функция задана в $(n+1)$ – й точках:

$y_i=f(x_i),\ i=1,\ldots,n,\quad x_i\in[a,b]=[x_0,x_n],$

$h=x_{i+1}-x_i$ – шаг сетки.

Многочлен Лагранжа $\widetilde{f}_n(x,\overline{a})=L_n(f,x)=\sum\limits_{j=0}^{n}a_jx^j=\sum\limits_{j=0}^{n}f_jP_{nj}(x)$,

где $P_{nj}(x)=\dfrac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\ldots(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\ldots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\ldots(x_j-x_n)}$.

Справедливо следующее равенство $\sum\limits_{j=0}^{n}P_{nj}(x)=1.$

Пример.

Построить многочлен Лагранжа второй степени для сеточной функции, заданной таблицей :

j	0	1	2	3
x_i	2	3	4	5
$f_i = f(x_i)$	7	5	8	7

Вычислить значение функции в точке $x^* = 2.5$.

а). *Так как точка интерполяции* $x^* \in [2,4]$, *то строим многочлен Лагранжа на этом отрезке*.

$$L_2(f,x) = 7\frac{(x-3)(x-4)}{(2-3)(2-4)} + 5\frac{(x-2)(x-4)}{(3-2)(3-4)} + 8\frac{(x-2)(x-3)}{(4-2)(4-3)} =$$

$$= 26 - \frac{29}{2}x + \frac{5}{2}x^2, \;\; L_2(f,x^*) = \frac{43}{8} = 5.375.$$

b). *По данному количеству точек можно построить многочлен максимально третьей степени* :

$$L_3(f,x) = -\frac{3}{2}x^3 + 16x^2 - \frac{107}{2}x + 62, \qquad L_3(f,x^*) = 4.8125.$$

Оценка погрешности интерполяции в произвольной точке $x^* \in [a,b]$ *имеет вид*

$$\left|f(x^*) - L_n(f,x^*)\right| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left|\omega_n(x^*)\right|, \text{ где } M_{n+1} = \max_{[a,b]}\left|f^{(n+1)}(x)\right|,$$

$$\omega_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n).$$

МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Найдем коэффициенты $\overline{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ *многочлена* $\tilde{f}_m(x,\overline{a})$, *гарантирующие минимум величине*

$$\delta_m(\overline{a}) = \sqrt{\frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n}\left[\tilde{f}_m(x_j,\overline{a}) - f_j\right]^2} \to \min_{\overline{a}} \delta_m(\overline{a}).$$

В общем случае многочлен $\tilde{f}_m(x,\bar{a})$ *имеет вид*

$$\tilde{f}_m(x,\bar{a}) = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m.$$

Зададим точность ε. *Составляем среднеквадратичную погрешность*

$$\delta_m(\bar{a}) = \sum_{i=1}^{n} \left[a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \dots + a_m x_i^m - f_i\right]^2.$$

Минимум реализуется при $\dfrac{\partial(\delta_m(\bar{a}))}{\partial a_j} = 0.$

$$\frac{\partial(\delta_m(\bar{a}))}{\partial a_0} = 2\sum_{j=1}^{n} \left[a_0 + a_1 x_j + \dots + a_m x_j^m - f_j\right]1 = 0,$$

$$\frac{\partial(\delta_m(\bar{a}))}{\partial a_1} = 2\sum_{j=1}^{n} \left[a_0 + a_1 x_j + \dots + a_m x_j^m - f_j\right]x_j = 0,$$

$$\frac{\partial(\delta_m(\bar{a}))}{\partial a_2} = 2\sum_{j=1}^{n} \left[a_0 + a_1 x_j + \dots + a_m x_j^m - f_j\right]x_j^2 = 0,$$

$$\dots$$

$$\frac{\partial(\delta_m(\bar{a}))}{\partial a_m} = 2\sum_{j=1}^{n} \left[a_0 + a_1 x_j + \dots + a_m x_j^m - f_j\right]x_j^m = 0.$$

Преобразуе м систему линейных алгебраиче ских уравнений к виду

$$
(1)\quad \begin{cases}
s_0 a_0 + s_1 a_1 + \cdots + s_m a_m = t_0, \text{ где } s_0 = n+1,\ s_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i, \\
s_1 a_0 + s_2 a_1 + \cdots + s_{m+1} a_m = t_1, \quad s_k = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^k,\ k = 1,\cdots,2m,\ t_0 = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i, \\
\cdots\ \cdots\ \cdots \\
s_m a_0 + s_{m+1} a_1 + \cdots + s_{2m} a_m = t_m, \ t_k = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^k f_i, \quad k = 1,\cdots,m.
\end{cases}
$$

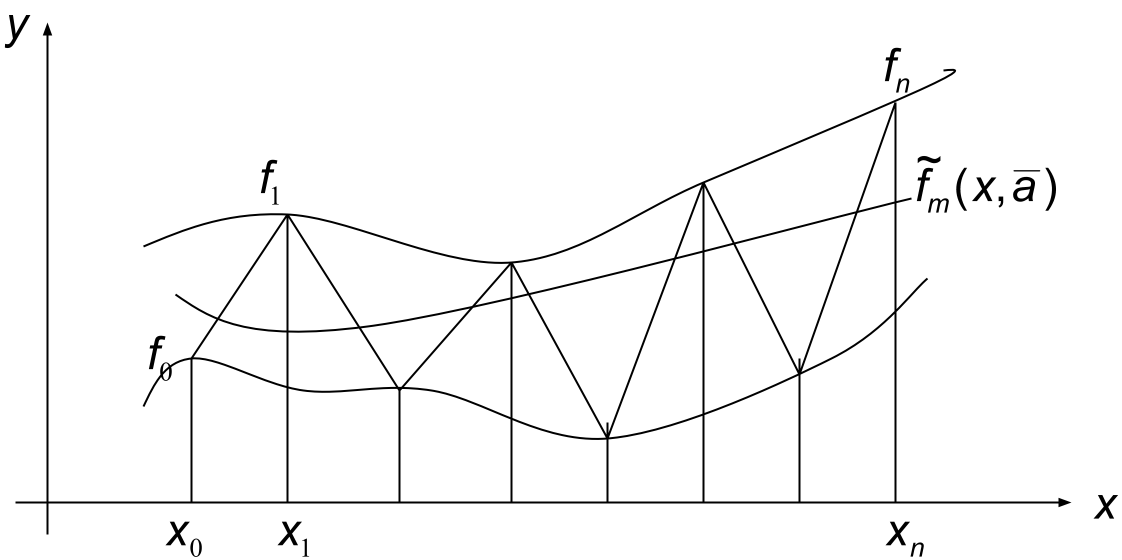


*Рис.*1.

МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СГЛАЖИВАНИЯ

1. Вычислить коэффициенты s_k, $k = 0, \ldots, 2m$, t_k, $k = 0, \ldots, m$.

2. Решить полученную систему каким – либо методом и найти коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_m$.

3. Зададим $m = 1$.

   a) если $\delta_1(\overline{a}) >> \varepsilon$ – аппроксимация слишком грубая, $m = m + 1$,

   b) если $\delta_m(\overline{a}) << \varepsilon$ – аппроксимация недостоверна, надо уменьшить m.

   c) если $\delta_m(\overline{a}) \approx \varepsilon$ – степень многочлена оптимальна.

4. При $m >> 1$ система уравнений становится плохо обусловленной и определить полином $\tilde{f}_m(x, \overline{a})$ практически невозможно.

5. Метод наименьших квадратов реализует наилучшее в среднем приближение на всей области определения сеточной функции $f_i = f(x_i)$ и в некоторых случаях не учитывает локальных свойств аппроксимируемой функции.

5. *Отметим, что* $\tilde{f}_m(x,\bar{a})$ (*рис.*1) *расположена внутри полосы* "*разброса*" *функции и является более плавной по сравнению с ломаной, проведенной через экспериментальные точки.*

6. *С изменением степени* m *все коэффициенты* $\bar{a}$ *нужно определять заново.*

Пример.

Сеточная функция $y=\ln x$ *задана на отрезке* $[1;\,5]$ *с толчностью* $\varepsilon=0.1$. *По этим данным найти сглаживающий многочлен* $\tilde{f}_m(x,\bar{a})$ *МНК с использованием выбора степени* $m=1,\,2,\ldots$

i	0	1	2	3	4
x_i	1	2	3	4	5
f_i	-0.070	0.760	1.000	1.526	1.449

Примем сначала $m = 1$

1. *Искомая функция* $\tilde{f}_1(x, \bar{a}) = a_0 + a_1 x$ *определяется из системы*

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=0}^{4} 1\right) a_0 + \left(\sum_{i=0}^{4} x_i\right) a_1 = \sum_{i=0}^{4} f_i, \\ \left(\sum_{i=0}^{4} x_i\right) a_0 + \left(\sum_{i=0}^{4} x_i^2\right) a_1 = \sum_{i=0}^{4} x_i f_i, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5a_0 + 15a_1 = 4.665, \\ 15a_0 + 55a_1 = 17.799. \end{cases}$$

$a_0 = -2.2082$; $a_1 = 0.3804$. *Сглаживающий многочлен*

$\tilde{f}_1(x, \bar{a}) = -2.2082 + 0.3804x$. *Среднеквадратичная погрешность*

$\delta_1 = 0.205 > \varepsilon = 0.1$

Так как условие $\delta_1 \approx \varepsilon$ *не выполнено, то* $m = 2$ *и*

$\tilde{f}_2(x, \bar{a}) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$. *Определяя коэффициенты из системы*

(1) *при* $m = 2$, *получаем*

$$\tilde{f}_2(x, \bar{a}) = -0.9726 + 1.0356x - 0.1092x^2.$$

Среднеквадратичная погрешность $\delta_2 = 0.094 \le \varepsilon = 0.1$

Следовательно, задача решена.

Сглаживание на основе сплайнов

- Интерполяционные кубические сплайны

Задачу восполнения сеточной функции $y_i = f(x_i),\ i = 0,\ldots,n,$ $x \in [a,b]$ *решает интерполяционный кубический сплайн дефекта один, т.е.* $S_3^q(x) \in C_2[a,b]$. *Дефектом* q *сплайна называется число* $q = m - r$, *где* m *– степень интерполяционного многочлена,* r *– наибольший порядок производной, непрерывной на* $[a,b]$. *В данном случае* $m = 3,\ r = 2$. *Предполагается, что восполняемая функция достаточно гладкая.*

Функция $S_3^q(x) = \sum_{i=0}^{n-1} S_{3,i}(x)$ *определена на отрезке* $[a,b]$ *принадлежит классу гладкости* $C_2[a,b]$ *и составлена из совокупности звеньев* $S_{3,i}(x)$, *являющихся полиномами третьей степени, определенных на частичных отрезках* $[x_i, x_{i+1}]$. *Вид многочлена*

$$S_{3,i}(x) = a_0^{(i)} + a_1^{(i)}x + a_2^{(i)}x^2 + a_3^{(i)}x^3.$$

Для определения $4n$ неизвестных коэффициентов используются следующие условия в узлах интерполяции :

1) $S_{3,i}(x_i) = y_i,\ i = 0,\ldots,n$ – *условия интерполяции*;

2) $S_{3,i}(x_i) = S_{3,i+1}(x_i),\ i = 1,\ldots,n-1$ – *условия непрерывности сплайна*;

3) $S'_{3,i}(x_i) = S'_{3,i+1}(x_i),\ \ i = 1,\ldots,n-1$ – *условия непрерывности первых производных*;

4) $S''_{3,i}(x_i) = S''_{3,i+1}(x_i),\ \ i = 1,\ldots,n-1$ – *условия непрерывности вторых производных*.

Обозначим $S''_3(x) = D(x)$, *полагаем*, *что* $D(x_0) = D_0 = D(x_n) = D_n = 0.$ *тогда для* $D_i = D(x_i)$ *получаем СЛАУ*

$$D_{i-1}\frac{h_i}{6} + D_i\frac{h_i + h_{i+1}}{3} + D_{i+1}\frac{h_{i+1}}{6} = \frac{\Delta y_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{\Delta y_i}{h_i},\ \ i = 1,\ldots,n-1, \qquad (1)$$

$$D_0 = D_n = 0,\quad \Delta y_i = y_i - y_{i-1},\quad h_i = x_i - x_{i-1}.$$

Выражение сплайна $S_{3,i}(x)$ на $[x_{i-1}, x_i]$ через коэффициенты D_i имеет вид

$$S_{3,i}(x) = D_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + D_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + \left(\frac{y_{i-1}}{h_i} - D_{i-1}\frac{h_i}{6}\right)(x_i - x) +$$

$$+\left(\frac{y_i}{h_i} - D_i\frac{h_i}{6}\right)(x - x_{i-1}), \qquad x \in [x_{i-1}, x_i]. \qquad (2)$$

Система уравнений (1) относительно неизвестных D_i решается методом прогонки.

ПРИМЕР.

Для данной таблицы значений функции $f(x)$ с шагом $h_i = x_i - x_{i-1} = const$ определить кубические сплайны дефекта 1 на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, 3, 4$. Проверить непрерывность сплайна и всех его производных в узле $x^* = 2$.

i	0	1	2	3	4
x_i	1	2	3	4	5
y_i	1	3	6	9	21
D_i	0	18\7	-30\7	102\7	0

Относительно неизвестных D_1, D_2, D_3 *из* (1) *получаем СЛАУ* :

$$\begin{cases} \frac{2}{3}D_1 + \frac{1}{6}D_2 = \frac{y_2 - y_1}{1} - \frac{y_1 - y_0}{1} = 1, \\ \frac{1}{6}D_1 + \frac{2}{3}D_2 + \frac{1}{6}D_3 = \frac{y_3 - y_2}{1} - \frac{y_2 - y_1}{1} = 0, \\ \frac{1}{6}D_2 + \frac{2}{3}D_3 = \frac{y_4 - y_3}{1} - \frac{y_3 - y_2}{1} = 9. \end{cases}$$

Вычисляем прогоночные коэффициенты p_i, q_i

$$p_i = \frac{c_i}{b_i - a_i p_{i-1}}, \quad q_i = \frac{a_i q_{i-1} - f_i}{b_i - a_i p_{i-1}}, \quad i = 1,2,3.$$

$$p_1 = -\frac{1}{4}, \; q_1 = \frac{3}{2}; \; p_2 = -\frac{4}{15}, \; q_2 = -\frac{2}{5}; \; p_3 = 0, \; q_3 = \frac{102}{7}.$$

$$D_3 = p_3 D_4 + q_3 = \frac{102}{7}, \quad D_2 = p_2 D_3 + q_2 = -\frac{30}{7}, \quad D_1 = p_1 D_2 + q_1 = \frac{18}{7}.$$

Выражение сплайна на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ *из* (2)

имеет вид

$$S_{3,1}(x) = \frac{18}{42}(x-1)^3 + \frac{108}{42}(x-1) + 2 - x, \qquad x \in [1,2];$$

$$S_{3,2}(x) = \frac{18}{42}(3-x)^3 - \frac{30}{42}(x-2)^3 + \frac{108}{42}(3-x) + \frac{282}{42}(x-2), \quad x \in [2,3];$$

$$S_{3,3}(x) = \frac{30}{42}(x-4)^3 + \frac{102}{42}(x-3)^3 + \frac{282}{42}(4-x) + \frac{276}{42}(x-3), \quad x \in [3,4];$$

$$S_{3,4}(x) = \frac{102}{42}(5-x)^3 + \frac{276}{42}(5-x) + 21(x-4), \quad x \in [4,5].$$

Проверим правильность построения сплайна :

$$S_{3,1}(2) = \frac{126}{42} = 3, \quad S_{3,2}(2) = \frac{126}{42} = 3.$$

$$S'_{3,1}(2) = \frac{120}{42}, \qquad S'_{3,2}(2) = \frac{120}{42}.$$

$$S''_{3,1}(2) = \frac{108}{42}, \qquad S''_{3,2}(2) = \frac{108}{42}.$$

ВГУЭС

Задание к третьей лабораторной работе

По данной таблице значений $(x_i, f(x_i))$, $i = 0,1,\ldots, n$ *построить*:

1) *многочлены Лагранжа* $L_2(x)$, $L_6(x)$, *сравнить значения* $L_2(x^*)$, $L_6(x^*)$, $f(x^*)$ *и построить графики этих функций*;

2) *методом наименьших квадратов найти сглаживающий многочлен* $\tilde{f}_m(x,\bar{a})$. *Сравнить значения* $\tilde{f}_m(x^*,\bar{a})$, $f(x^*)$ *и построить графики этих функций*.;

3) *методом сплайн – аппроксимации построить кубический сплайн* $S_3(x)$, *сравнить значения* $S_3(x^*)$, $f(x^*)$ *и построить графики этих функций*.

ВГУЭС

Вычислительная математика

Математические методы в экономике 061800

Институт Международного Бизнеса и Экономики кафедра Математики и Моделирования

Ушаков А.А.

Методы численного дифференцирования и интегрирования

Лекция № 5

Методы численного дифференцирования и интегрирования

Трехточечный шаблон. *Выберем шаблон* (x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) *на произвольной сетке. Предположим* $f(x) \in C_3[a,b]$, *разложим функцию* $f(x)$ *по формуле Тейлора второго порядка относительно точки* x_i *с остаточным слагаемым в форме Лагранжа и найдем выражения для* $f_{i+1} = f(x_{i+1})$, $f_{i-1} = f(x_{i-1})$:

$$f_{i+1} = f_i + h f_i' + \frac{1}{2} h^2 f_i'' + \frac{1}{6} h^3 f'''(\xi_1), \quad f_{i-1} = f_i - h f_i' + \frac{1}{2} h^2 f_i'' - \frac{1}{6} h^3 f'''(\xi_2), \quad (3)$$

где $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (x_{i-1}, x_{i+1})$, $h = x_{i+1} - x_i = const$.

Из (3) следуют три аппроксимации для f_i':

$$f_i' = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} - \text{правосторонняя аппроксимация}, \quad \left(\frac{h}{2} M_{2,i}\right) - \text{погрешность},$$

$$f_i' = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} - \text{левосторонняя аппроксимация}, \quad \left(\frac{h}{2} M_{2,i}\right) - \text{погрешность},$$

Используя разложение функции $f(x) \in C_3[a,b]$ *по формуле Тейлора, можно получить так же*

$$f'_{i-1} = \frac{1}{2h}\left(-3f_{i-1} + 4f_i - f_{i+1}\right), \qquad \left(\frac{h^2}{3}M_{3,\,i}\right) - \textit{погрешност ь},$$

$$f'_{i+1} = \frac{1}{2h}\left(f_{i-1} - 4f_i + 3f_{i+1}\right), \qquad \left(\frac{h^2}{3}M_{3,\,i}\right) - \textit{погрешност ь},$$

$$f'_i = \frac{1}{2h}\left(f_{i+1} - f_{i-1}\right), \qquad \left(\frac{h^2}{6}M_{3,\,i}\right) - \textit{погроешнос ть}.$$

Аппроксимацию второй производной получаем из представления

$$f_{i+1} = f_i + h f'_i + \frac{h^2 f''_i}{2} + \frac{h^3 f'''_i}{6} + \frac{h^4 f^{(4)}(\xi_1)}{24},$$

$$f_{i-1} = f_i - h f'_i + \frac{h^2 f''_i}{2} - \frac{h^3 f'''_i}{6} + \frac{h^4 f^{(4)}(\xi_2)}{24},$$

$$f''_i = \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{h^2}, \qquad \left(\frac{h^2}{12}M_{4,\,i}\right) - \textit{погрешность}.$$

Квадратурные формулы Ньютона-Котеса

Формулы прямоугольников

Одним из классических методов вычисления определенных интегралов является применение функциональных квадратурных формул

$$I_a^b(f) = \int_a^b f(x)dx = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx \cong \sum_{j=1}^{n} q_j f(x_j), \qquad (4)$$

где q_j *– весовые коэффициенты;* x_j, $j = 1, \ldots, n$, *– некоторые точки отрезка* $[a, b]$, n *– число узлов квадратурной формулы.*

Квадратурная формула называется точной для многочленов степени m, если при замене функции $f(x)$ на произвольный алгебраический многочлен степени не выше m приближенное равенство (4) становится точным.

Вычислим интеграл на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ следующим образом

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx \int_{x_i}^{x_{i+1}} L_0(x)dx = h f(c_i), \quad c_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}, \quad h = x_{i+1} - x_i = const.$$

Тогда квадратурная формула прямоугольников имеет вид

$$I_a^b(f) \approx \Pi_a^b(f, n) = h\sum_{i=1}^{n} f(c_i), \quad c_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}.$$

Оценка точности формулы прямоугольников

$$\left|I_a^b(f) - \Pi_a^b(f, n)\right| \le \frac{M_2}{24}(b-a)h^2, \qquad M_2 = \max_{[a,b]}\left|f''(x)\right|.$$

Формула трапеций

Вычислим интеграл на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx \int_{x_i}^{x_{i+1}} L_1(x)dx = \int_0^1 [(1-q)f_i + q f_{i+1}]h\,dq = h\left(\frac{f_i + f_{i+1}}{2}\right),$$

где $q = \dfrac{x - x_i}{h}, \quad dx = hdq, \quad 0 \le q \le 1.$

Квадратурная формула трапеций имеет вид

$$I_a^b(f) \approx T_a^b(f, n) = \frac{h}{2}[f_0 + f_n + 2(f_1 + f_2 + \dots + f_{n-1})].$$

Оценка точности по формуле трапеций

$$\left|I_a^b(f) - T_a^b(f,n)\right| \le \frac{M_2}{12}(b-a)h^2, \qquad M_2 = \max_{[a,b]}|f''(x)|.$$

Формула Симпсона

Вычислим интеграл на отрезке $\left[x_{i-1}, x_{i+1}\right]$

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx \int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} L_2(x)dx = \frac{h}{3}\left(f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1}\right),$$

где $h = x_{i+1} - x_{i-1} = const$.

Квадратурная формула Симпсона имеет вид

$$I_a^b(f) \approx S_a^b(f,n) = \frac{h}{3}\left[f_0 + 4\sum_{i=1}^{k} f_{2i-1} + 2\sum_{j=1}^{k-1} f_{2j} + f_{2k}\right]. \qquad n = 2k.$$

Оценка точности по формуле Симпсона

$$\left|I_a^b(f) - S_a^b(f,n)\right| \le \frac{M_4}{180}(b-a)h^4, \qquad M_4 = \max_{[a,b]}\left|f^{(4)}(x)\right|.$$

Вычисление определенного интеграла с заданной точностью

Обычно точность ε *задана, тогда из неравенства*

$$\frac{M_p}{A}(b-a)h^p \le \varepsilon,$$

где h – *шаг интегрирования,* $M_p = \max_{[a,b]}\left|f^{(p)}(x)\right|.$

Определяем шаг $h \le \sqrt{\dfrac{A\varepsilon}{M_p(b-a)}}.$ *Потом используется*

какая – либо квадратурная формула с найденным шагом $h.$

Пример.

Вычислить интеграл $I_1^2 = \int\limits_1^2 \frac{dx}{x}$ *на основе квадратурной формулы Симпсона с точностью* $\varepsilon = 10^{-4}$.

Воспользуемся неравенством

$$\frac{h^4(b-a)}{180}M_4 < \varepsilon, \quad M_4 = \max_{[1,2]}\left|\frac{24}{x^5}\right| = 24,$$

$$h \le \sqrt{\frac{180\varepsilon}{(b-a)M_4}} = 0.52. \text{ Примем } h = 0.5.$$

$$I_1^2 \approx S_1^2\left(\frac{1}{x},2\right) = \frac{h}{3}\left(f_0 + 4f_1 + f_2\right) = 0.69444,$$

Абсолютная погрешность $\delta = \left|0.69444 - 0.69317\right| = 0.001293$

Задание к четвертой лабораторной работе

По данной функции $f(x)$, *определенн ой на* $[a,b]$, *вычислить*

приближенн ое значение $\int_a^b f(x)dx$ *с точностью* $\varepsilon = 10^{-4}$ *по*

формулам :

а) *прямоуголь ников*,

б) *трапеций* ,

с) *Симпсона* .

Шаг интегриров ания определить из соотношени я :

$$h \le \sqrt{\frac{A\varepsilon}{M_p(b-a)}}.$$

Сравнить полученные приближенн ые значения интеграла

с точным .

Квадратурная формула Чебышева

Общий вид этой линейной квадратурной формулы

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t\right)dt \approx \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} A_i\, f\left(\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}t_i\right),$$

где t_i *– значения узлов,* A_i *– значения весовых коффициентов.*

Для различных n получаются различные квадратурные формулы Чебышева с указанной погрешностью

$$\int_a^b f(x) \approx G_a^b(f,2) = \frac{b-a}{2}\left[f\left(\frac{b+a}{2}-\frac{b-a}{2}t_0\right)+f\left(\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}t_0\right)\right],\quad r_2^{ч} = \frac{1}{135}\varphi''(\xi_1),$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx G_a^b(f,3) = \frac{b-a}{2}\left[f\left(\frac{a+b}{2}-\frac{b-a}{2}t_1\right)+f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t_1\right)\right],$$

$$r_3^{Ч} = \frac{1}{360}\varphi^{(4)}(\xi_2),\quad \text{где}\ t_0 = 0.577350,\ t_1 = 0.707107.$$