

Вычислительная математика

Математические методы в экономике 061800

Институт Международного Бизнеса и  
Экономики кафедра Математики и  
Моделирования

Ушаков А.А.

---

# Численные методы решения СЛАУ

Лекция № 1,2

# Предмет вычислительной математики

1. Вычислительная математика имеет дело в основном с дискретными объектами : вместо отрезка прямой часто рассматривается система точек  $\{t_k\}_{k=0}^N$ , вместо непрерывной функции  $f(x)$  – табличная функция  $\{f_k\}_{k=0}^M$ . Такие замены естественно порождают погрешности метода.
2. В машинных вычислениях присутствуют числа с ограниченным количеством знаков после запятой из-за конечности длины мантииссы при представлении действительного числа в памяти ЭВМ. Другими словами, в вычислениях присутствует машинная погрешность  $\delta_m$ . Это приводит к вычислительным эффектам, неизвестным, например, в математическом анализе, в классической теории обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) или в уравнениях математической физики.

3. В вычислительной практике большое значение имеет *обусловленность* задачи, т.е. чувствительность её решения к малым изменениям входных данных.
4. В отличие от "классической математики" выбор вычислительного алгоритма влияет на результаты вычислений.
5. Существенная черта численного метода – *экономичность* вычислительного алгоритма, т.е. минимизация числа элементарных операций при выполнении его на ЭВМ.
6. Погрешности при численном решении задач делятся на две категории – *неустранимые* и *устранимые*. К первым относят погрешности, связанные с построением математической модели объекта и приближенным заданием входных данных, ко вторым – погрешности метода решения задачи и ошибки округления, которые являются источником малых возмущений, вносимых в решение задачи.

# Методы решения СЛАУ

- Метод Гаусса
- $Ax=f, |A| \neq 0$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \square & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \square & a_{2n} \\ \square & \square & \square & \square \\ a_{n1} & a_{n2} & \square & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \square \\ f_n \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \square \\ x_n \end{pmatrix}$$

# Теорема Крамера

- Если определитель матрицы не равен нулю  $|A| \neq 0$ , то решение СЛАУ существует и единственно.

Метод Гаусса, первый шаг

$$A_p = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \square & a_{1n} & f_1 \\ a_{21} & a_{22} & \square & a_{2n} & f_2 \\ \square & \square & \square & \square & \square \\ a_{n1} & a_{n2} & \square & a_{nn} & f_n \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \square & a_{1n} & f_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \square & a_{2n}^{(1)} & f_2^{(1)} \\ \square & \square & \square & \square & \square \\ 0 & a_{2n}^{(1)} & \square & a_{nn}^{(1)} & f_n^{(1)} \end{pmatrix}$$

$$a_{kj}^{(1)} = a_{kj} - a_{k1} \frac{a_{1j}}{a_{11}}, \quad f_k^{(1)} = f_k - a_{k1} \frac{f_1}{a_{11}}, \quad k = 2, \dots, n, \quad j = 2, \dots, n$$

# Метод Гаусса, шаг-s

$$\square \approx A_p^{(s)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \square & a_{1s} & \square & a_{1n} & f_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \square & a_{2s}^{(1)} & \square & a_{2n}^{(1)} & f_2^{(1)} \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ 0 & 0 & a_{ss}^{(s)} & a_{ss+1}^{(s)} & \square & a_{sn}^{(s)} & f_s^{(s)} \\ \square & \square & 0 & a_{s+1s+1}^{(s+1)} & \square & a_{s+1n}^{(s+1)} & f_{s+1}^{(s+1)} \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ 0 & 0 & 0 & a_{ns+1}^{(s+1)} & \square & a_{nn}^{(s+1)} & f_n^{(s+1)} \end{pmatrix}$$

$$a_{kj}^{(s+1)} = a_{kj}^{(s)} - \frac{a_{ks}^{(s)}}{a_{ss}^{(s)}} a_{sj}^{(s)}, \quad f_k^{(s+1)} = f_k^{(s)} - \frac{f_k^{(s)}}{a_{ss}^{(s)}} a_{sj}^{(s)},$$

$$k = s+1, \square, n-1, \quad j = s+1, \square, n-1$$

# Решение СЛАУ методом Гаусса

$$x_n = \frac{f_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}, \quad x_{n-1} = \frac{f_{n-1}^{(n-1)} - a_{n-1n}^{(n-1)} x_n}{a_{n-1n-1}^{(n-1)}}, \quad \text{и т.д.}$$

$$x_1 = \frac{f_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \dots - a_{1n}x_n}{a_{11}}$$

*Пример. Решить методом Гаусса СЛАУ*

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 = 16$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 16$$

# Преобразуем расширенную матрицу

*Прямой ход.*

$$A_p = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 16 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 3 & 3 & 16 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 16 \\ 0 & 1 & -10 & -28 \\ 0 & 5 & 2 & 16 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 16 \\ 0 & 1 & -10 & -28 \\ 0 & 0 & 52 & 156 \end{pmatrix}$$

*Обратный ход.*

$$x_3 = \frac{156}{52} = 3, \quad x_2 = 10x_3 - 28 = 2, \quad x_1 = 8 - 0.5x_2 - 2x_3 = 1$$



# Метод LU-разложения

- $A = LU, \quad LU \cdot x = f.$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \square & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \square & a_{2n} \\ \square & \square & \square & \square \\ a_{n1} & a_{n2} & \square & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 & \square & 0 \\ L_{21} & L_{22} & \square & 0 \\ \square & \square & \square & \square \\ L_{n1} & L_{n2} & \square & L_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & \square & u_{1n} \\ 0 & 1 & \square & u_{2n} \\ \square & \square & \square & \square \\ 0 & 0 & \square & 1 \end{pmatrix}$$

*элементы матриц  $L$  и  $U$  вычисляются по формулам*

$$L_{ij} = a_{ij} - \sum_{s=1}^{j-1} L_{is} u_{sj}, \quad i \geq j, \quad u_{ij} = \frac{1}{L_{ji}} \left( a_{ij} - \sum_{s=1}^{i-1} L_{is} u_{sj} \right), \quad i < j$$

*изменённые элементы  
матрицы  $A$  хранятся  
в виде :*

$$A = \begin{pmatrix} L_{11} & u_{12} & u_{13} & \square & u_{1n} \\ L_{21} & L_{22} & u_{23} & \square & u_{2n} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & \square & u_{3n} \\ \square & \square & \square & \square & \square \\ L_{n1} & L_{n2} & L_{n3} & \square & L_{nn} \end{pmatrix}$$

# Прямой и обратный ходы

- Решить систему (прямой ход)

$$Ly = f$$

- Чтобы найти  $x$ , надо решить систему (обратный ход)

$$Ux = y$$

- Пример: решить СЛАУ:

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 = 16$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 16$$

• Найдем матрицы  $U, L$

$$L_{11} = a_{11} = 2; \quad L_{21} = a_{21} = 3; \quad L_{31} = a_{31} = 1$$

$$u_{12} = 0.5a_{12} = 0.5; \quad u_{13} = 0.5a_{13} = 0.5 \cdot 4 = 2$$

$$L_{22} = a_{22} - L_{21}u_{12} = 0.5; \quad L_{32} = a_{32} - L_{31}u_{12} = 2.5$$

$$u_{23} = \frac{1}{L_{22}}(a_{23} - L_{21}u_{13}) = -10$$

$$L_{33} = a_{33} - L_{31}u_{13} - L_{32}u_{23} = 26$$

# Прямой ход

- Решим систему  $Ly = f$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0.5 & 0 \\ 1 & 2.5 & 26 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 10 \\ 16 \end{pmatrix} \rightarrow y_1 = 8, \quad y_2 = (10 - 3y_1) \cdot 2 = -28,$$

$$y_3 = \frac{16 - y_1 - 2.5y_2}{26} = 3$$

# Обратный ход

- Решим систему  $Ux = y$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 2 \\ 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -28 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow x_3 = 3, \quad x_2 = 10x_3 - 28 = 2,$$

$$x_1 = 8 - 0.5x_2 - 2x_3 = 1$$

# Метод прогонки

- Матрица  $A$  - трёхдиагональная

$$A = \begin{pmatrix} -b_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & \square & f_1 \\ a_2 & -b_2 & c_2 & 0 & 0 & \square & f_2 \\ 0 & a_3 & -b_3 & c_3 & 0 & \square & f_3 \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ 0 & 0 & \square & \square & a_n & -b_n & f_n \end{pmatrix}$$

*Развёрнутая запись системы:*

$$a_i x_{i-1} - b_i x_i + c_i x_{i+1} = f_i, \quad a_1 = c_n = 0, \quad i = 1, \square, n. \quad (1)$$

*Используя метод Гаусса, систему (1) можно представить в виде*

$$x_i = p_i x_{i+1} + q_i, \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (2)$$

$$(2) \rightarrow (1): \quad a_i(p_{i-1}x_i + q_{i-1}) - b_i x_i + c_i x_{i+1} = f_i$$

*преобразуя полученное уравнение, получим рекуррентные соотношения для прогоночных коэффициентов (прямой ход)*

$$p_i = \frac{c_i}{b_i - a_i p_{i-1}}, \quad q_i = \frac{a_i q_{i-1} - f_i}{b_i - a_i p_{i-1}}, \quad i = 1, \dots, n-1$$

- Обратный ход  
метода прогонки

*из уравнений (1),(2)*

$$x_{n-1} = p_{n-1}x_n + q_{n-1}$$

$$a_n x_{n-1} - b_n x_n + 0 \cdot x_{n+1} = f_n$$

*находим  $x_n$  :*

$$x_n = \frac{a_n q_{n-1} - f_n}{b_n - a_n p_{n-1}}$$

*по (2) находим остальные неизвестные*



- Достаточное условие корректности и устойчивости метода прогонки:

$$a_i \neq 0, \quad c_i \neq 0, \quad i = 2, \dots, n-1$$

$$|b_i| \geq |a_i| + |c_i|. \quad (3)$$

*и в (3) имеет место строгое неравенство хотя бы при одном  $i$*

*Пример. Дана система уравнений с трехдиагональной матрицей  $A$*

$$A_p = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 6 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

*Матрица  $A$  удовлетворяет условию диагонального преобладания.*

- Прямой ход.

$$b_1 = -5, \quad b_2 = -6, \quad b_3 = -4, \quad b_4 = 3$$

$$p_1 = \frac{c_1}{b_1} = -\frac{3}{5}; \quad q_1 = -\frac{f_1}{b_1} = \frac{8}{5};$$

$$p_2 = \frac{c_2}{b_2 - a_2 p_1} = -\frac{5}{21}; \quad q_2 = \frac{a_2 q_1 - f_2}{b_2 - a_2 p_1} = \frac{26}{21};$$

$$p_3 = \frac{c_3}{b_3 - a_3 p_2} = \frac{42}{79}; \quad q_3 = \frac{a_3 q_2 - f_3}{b_3 - a_3 p_2} = \frac{37}{79};$$

$$x_4 = \frac{a_4 q_3 - f_4}{b_4 - a_4 p_3} = 1; \quad x_3 = p_3 x_4 + q_3 = 1;$$

$$x_2 = p_2 x_3 + q_2 = 1; \quad x_1 = p_1 x_2 + q_1 = 1.$$

# Итерационные методы

- Метод простых итераций (МПИ)

$$Ax = f \Leftrightarrow x = Bx + g, \quad (1)$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & \square & b_{1n} \\ b_{21} & 0 & \square & b_{2n} \\ \square & \square & \square & \square \\ b_{n1} & b_{n2} & \square & 0 \end{pmatrix}, \quad b_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, \quad i \neq j, \quad g = \begin{pmatrix} f_1 / a_{11} \\ f_2 / a_{22} \\ \square \\ f_n / a_{nn} \end{pmatrix}$$

Задаём вектор  $x^{(0)}$  на первой итерации

Компоненты следующего вектора  $x^{(1)}$   
находим из системы уравнений (1)

$$x_i^{(1)} = g_i + \sum_{j=1}^n b_{ij} x_j^{(0)}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Зная компоненты вектора  $x^{(k)}$ ,  
находим компоненты  $x^{(k+1)}$  по аналогичной схеме

$$x_i^{(k+1)} = g_i + \sum_{j=1}^n b_{ij} x_j^{(k)}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Останов при  $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < \varepsilon$ ,  $\varepsilon$  – задано

- Теорема 1 (о достаточном условии сходимости МПИ:

*МПИ сходится к единственному решению исходной системы  $Ax = f$  при любом начальном приближении  $x^{(0)}$  со скоростью не медленнее геометрической прогрессии, если какая-либо норма матрицы  $B$  меньше единицы,*

*т.е.  $\|B\| < 1$ .  $\|B\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij}^2}$  – норма матрицы.*

- Условия сходимости выполняются, если

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|, \text{ в матрице } A \text{ выполняются}$$

*условия диагонального преобладания*

*Сходимость МПИ гарантирована условием*

$$\|x^{(k+1)} - x^{(0)}\| \leq \frac{\|B\|^{(k+1)}}{1 - \|B\|} \|g\| \leq \varepsilon, \quad \|g\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n g_i^2}. \quad (1)$$

# Пример.

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13, \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14, \end{cases} \quad \varepsilon = 0.01$$

*Условия диагонального преобладания для матрицы  $A$  выполняются*

$$\begin{cases} x_1 = 1.2 - 0.1x_2 - 0.1x_3, \\ x_2 = 1.3 - 0.2x_1 - 0.1x_3, \\ x_3 = 1.4 - 0.2x_1 - 0.2x_2. \end{cases} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -0.1 & -0.1 \\ -0.2 & 0 & -0.1 \\ -0.2 & -0.2 & 0 \end{pmatrix}; \quad g = \begin{pmatrix} 1.2 \\ 1.3 \\ 1.4 \end{pmatrix}.$$

$$\|B\| = 0.4 < 1, \quad x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1.2 \\ 1.3 \\ 1.4 \end{pmatrix}.$$

Количество итераций вычисляется по (1) и  $K=5$

$$x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 0 & -0.1 & -0.1 \\ -0.2 & 0 & -0.1 \\ -0.2 & -0.2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1.2 \\ 1.3 \\ 1.4 \end{pmatrix}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.9300 \\ 0.9200 \\ 0.9000 \end{pmatrix}, \quad x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1.0180 \\ 1.0240 \\ 1.0300 \end{pmatrix}, \quad x^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.9946 \\ 0.9934 \\ 0.9916 \end{pmatrix},$$

$$x^{(4)} = \begin{pmatrix} 1.0015 \\ 1.0020 \\ 1.0024 \end{pmatrix}, \quad x^{(5)} = \begin{pmatrix} 0.9996 \\ 0.9995 \\ 0.9993 \end{pmatrix}, \quad \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| = 0.0027 < \varepsilon.$$

Приближенное решение  $\hat{x} = (0.9996, 0.9995, 0.9993)$ ,

Точное решение  $x^* = (1, 1, 1)$ .

# Задание к первой лабораторной работе

*Дана расширенная матрица*

$$A_p = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & f_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & f_1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & f_1 \end{pmatrix}.$$

*Необходимо решить СЛАУ методами :*

- 1) Гаусса,*
- 2) LU – разложения ,*
- 3) простой итерации (Якоби) с точностью  $\varepsilon = 10^{-4}$ ,*
- 4) методом прогонки решить систему с трехдиагональной матрицей .*



Вычислительная математика

Математические методы в экономике 061800

Институт Международного Бизнеса и  
Экономики кафедра Математики и  
Моделирования

Ушаков А.А.

---

# Методы решения нелинейных уравнений

Лекция № 3

## Отделение корней

### Теорема.

*Если функция  $f(x)$ , определяющая уравнение  $f(x) = 0$  на концах отрезка  $[a, b]$  принимает значения разных знаков, т.е.  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , то на этом отрезке содержится по крайней мере один корень уравнения. Если же  $f(x)$  непрерывна и дифференцируема и её первая производная сохраняет знак внутри отрезка  $[a, b]$ , то на  $[a, b]$  находится только один корень  $x^*$  уравнения.*

*в вычислительной практике находят  $[a, b]$ :*

- 1. средствами машинной графики строят график функции  $f(x)$  и приближенно находят интервал, на котором находится корень;*
- 2. средствами математического анализа с помощью исследования функции и построения графиков.*

# Метод половинного деления

1. Уравнение  $f(x) = 0$ .
2. Отрезок  $[a, b]$ , т.е.  $f(a) \cdot f(b) < 0$ .
3. На  $[a, b]$  один корень, т.е.  $f'(x) > 0$  или  $f'(x) < 0$  для всех  $x \in [a, b]$
4. Величина  $\varepsilon$ .

Полагаем  $k = 0$ .

1-ый шаг:  $c_k = \frac{a_k + b_k}{2}$ , где  $a_0 = a$ ,  $b_0 = b$ .

2-ой шаг: если  $f(a_k) \cdot f(c_k) < 0$ , то  $a_{k+1} = a_k$ ,  $b_{k+1} = c_k$ , если  $f(a_k) \cdot f(c_k) = 0$ , то  $c_k$  – корень, иначе –  $a_{k+1} = c_k$ ,  $b_{k+1} = b_k$ ,  $[a_{k+1}, b_{k+1}]$  – новый отрезок.

3-ий шаг: если  $(b_{k+1} - a_{k+1}) \leq \varepsilon$ , то значение корня

равно  $x^* \cong \frac{a_{k+1} + b_{k+1}}{2}$  и завершаем процесс, иначе

полагаем  $k = k + 1$  и переходим к шагу 1.

- Оценка числа итераций  $|b_0 - a_0| \cdot 2^{-k} < \varepsilon; \quad k \geq \log_2 \frac{(b_0 - a_0)}{\varepsilon}.$

- Пример.  $x^2 - e^{-x} = 0, \quad \varepsilon = 0.01, \quad [0.5, 1].$

k	$f(a_k)$	$a_k$	$b_k$	$f(b_k)$	$c_k = \frac{a_k + b_k}{2}$	$f(c_k)$	$b_k - a_k$
0	-0.3565	0.5	1	0.6321	<b>0.75</b>	0.09013	<b>0.5</b>
1	-0.3565	0.5	0.75	0.09013	<b>0.625</b>	-0.1446	<b>0.25</b>
2	-0.1446	0.625	0.75	0.09013	<b>0.6875</b>	-0.0301	<b>0.125</b>
3	-0.0301	0.6875	0.75	0.09013	<b>0.7187</b>	0.0292	<b>0.0625</b>
4	-0.0301	0.6875	0.7187	0.0292	<b>0.7031</b>	-0.00069	<b>0.0312</b>
5	-0.00069	0.7031	0.7187	0.0292	<b>0.7109</b>	0.0142	<b>0.0156</b>
6	-0.00069	0.7031	0.7109	0.0142	<b>0.7070</b>	0.0067	<b>0.0078</b>

$$b_6 - a_6 = 0.0078 < \varepsilon = 0.01, \quad x^* = c_6 = 0.707$$



# Метод хорд

- К условиям 1), 2), 3), 4) МДП добавляется условие

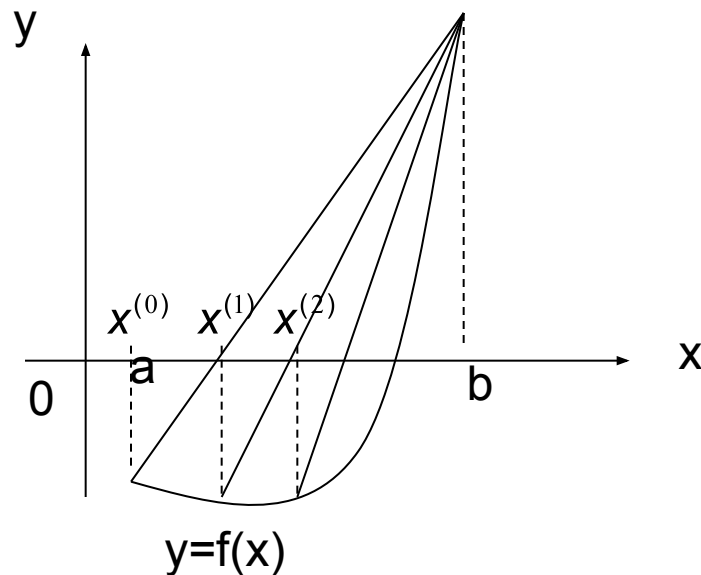
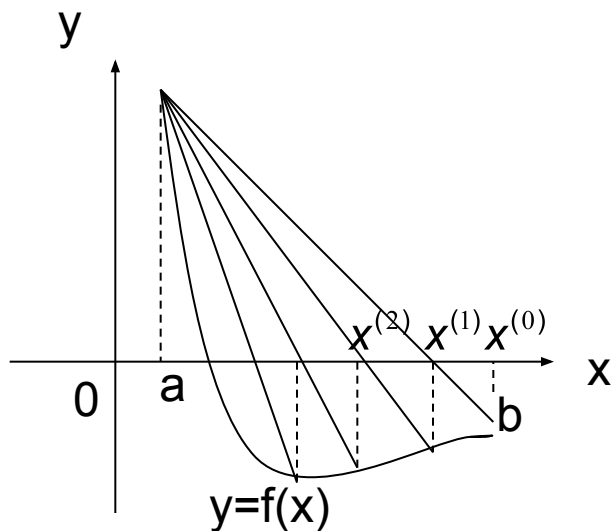
$$f''(x) > 0 \quad (f''(x) < 0) \quad \text{для всех } x \in [a, b]$$

$$x^{(0)} = \begin{cases} a, & \text{если } f(a) \cdot f''(a) > 0, \\ b, & \text{если } f(b) \cdot f''(b) > 0, \end{cases} \quad \text{то корень уравнения находится}$$

по схеме

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f(x^{(k)}) - f(x^{(0)})} (x^{(k)} - x^{(0)}), \quad k = 0, 1, \dots,$$

Итерационный процесс прерывается, если  $|f(x^{(k)})| \leq \varepsilon$ .



*Если  $f''(x) < 0$ , то уравнение можно изменить на  $-f(x) = 0$ , и повторить все сначала.*

**ЗАМЕЧАНИЕ :** Для выявления неподвижного конца используется условие  $f''(x) \cdot f(t) > 0$ , где  $t = a$  или  $t = b$ .

• Пример.

$$f(x) = x^2 - e^{-x} = 0, \quad \varepsilon = 0.001, \quad [0.5; 1],$$

$$f'(x) = 2x + e^{-x}, \quad f''(x) = 2 - e^{-x} > 0, \quad f(1) \cdot f''(x) > 0.$$

$$x^{(0)} = 0.5, \quad x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{(x^{(k)})^2 - e^{-x^{(k)}}}{(x^{(k)})^2 - e^{-x^{(k)}} - 1 + e^{-1}} (x^{(k)} - 1), \quad k = 0, 1 \square$$

*Вычисляем следующую последовательность:*

$$x^{(1)} = 0.680312, \quad x^{(2)} = 0.700954, \quad x^{(3)} = 0.7032.$$

*Проверяем условие остановки:*

$$|f(x^{(3)})| = 5.14 \cdot 10^{-4} < \varepsilon$$

# Метод Ньютона

- Теорема (достаточные условия сходимости метода Ньютона).

*Пусть выполняются следующие условия :*

1. *Функция  $f(x)$  определена и дважды дифференцируема на  $[a, b]$*
2. *Отрезку  $[a, b]$  принадлежит только один корень  $x^*$ .*
3. *Производные  $f'(x)$ ,  $f''(x)$  на  $[a, b]$  сохраняют знак,  $f'(x) \neq 0$ .*
4. *За начальное приближение  $x^{(0)}$  принимается один из концов отрезка  $[a, b]$ , а именно*

$$x^{(0)} = \begin{cases} a, & \text{если } f(a) \cdot f''(a) > 0, \\ b, & \text{если } f(b) \cdot f''(b) > 0. \end{cases}$$

*Тогда метод Ньютона для уравнения  $f(x) = 0$  выглядит следующим образом*

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 1, 2, \dots$$



- Пример.

$$x^2 - e^{-x} = 0, \quad \varepsilon = 0.001, \quad [0.5, 1].$$

*На этом отрезке один корень  $x^*$ .*

$$f(0.5) = 0.25 - \frac{1}{\sqrt{e}} < 0, \quad f(1) = 1 - \frac{1}{e} > 0,$$

$$f''(x) = 2 - e^{-x} > 0 \Rightarrow f''(x)f(1) > 0.$$

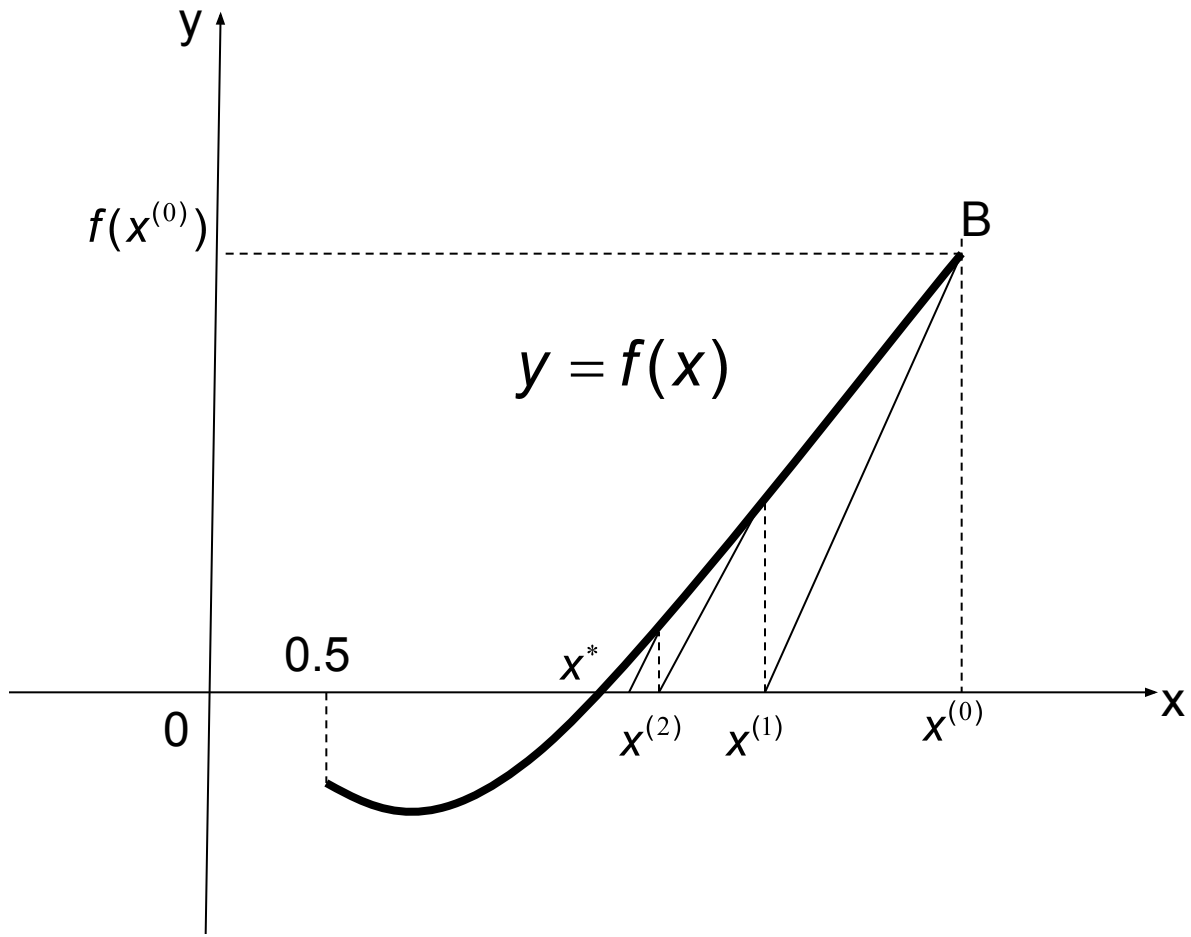
$$x^{(0)} = 1, \quad x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{(x^{(k)})^2 - e^{-x^{(k)}}}{2x^{(k)} + e^{-x^{(k)}}}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

$$x^{(1)} = 0.73304, \quad x^{(2)} = 0.70381, \quad x^{(3)} = 0.703467,$$

$$|x^{(1)} - x^{(0)}| = 0.27, \quad |x^{(2)} - x^{(1)}| = 0.029, \quad |x^{(3)} - x^{(2)}| = 0.00034,$$

$$f(x^{(0)}) = 0.63212, \quad f(x^{(1)}) = 0.05690, \quad f(x^{(2)}) = 0.00065,$$

$$f(x^{(3)}) = 8.25 \cdot 10^{-7}.$$



# Метод простых итераций

1-й шаг:  $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \varphi(x)$ ,  $|\varphi'(x)| < 1$  на  $[a, b]$ .

2-й шаг: задаём  $x^{(0)} \in [a, b]$ ,  $k = 0$ .

3-й шаг:  $x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)})$ .

4-й шаг: если  $|x^{(k+1)} - x^{(k)}| < \varepsilon \Rightarrow x^* = x^{(k+1)}$ ,

иначе  $k = k + 1$  и переходим к шагу 3.

*Пример.*

$$x^2 - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x = e^{-\frac{x}{2}}, \quad \varepsilon = 0.001, \quad [0.5, 1], \quad x^{(0)} = 0.75.$$

$$x^{(1)} = 0.6873, \quad x^{(2)} = 0.7091, \quad x^{(3)} = 0.7015, \quad x^{(4)} = 0.7042, \quad x^{(5)} = 0.7032.$$

$$|x^{(1)} - x^{(0)}| = 0.0627, \quad |x^{(2)} - x^{(1)}| = 0.0218, \quad |x^{(3)} - x^{(2)}| = 0.0076,$$

$$|x^{(4)} - x^{(3)}| = 0.0027, \quad |x^{(5)} - x^{(4)}| = 0.0010.$$

# Задание ко второй лабораторной работе

*Задание состоит в следующем :*

- 1) определить отрезок  $[a, b]$ , который содержит корень  $x^*$  уравнения и в точках которого  $f'(x)$  и  $f''(x)$  одного знака;*
- 2) методом половинного деления найти корень  $x^*$  уравнения  $f(x) = 0$  с точностью  $\varepsilon = 10^{-4}$ ;*
- 3) методом хорд найти тот же корень  $x^*$ ;*
- 4) методом Ньютона найти тот же корень  $x^*$ ;*
- 5) методом итераций найти же корень  $x^*$ .*

Вычислительная математика

Математические методы в экономике 061800

Институт Международного Бизнеса и  
Экономики кафедра Математики и  
Моделирования

Ушаков А.А.

---

# Численные методы приближения сеточных функций

Лекция № 4

Для восполнения сеточных функций  $y_i = f(x_i)$ ,  $x_i \in [a, b]$ ,  $i = 1, \dots, n$  аппроксимируемыми функциями  $\tilde{y} = \tilde{f}_m(x, \bar{a})$  используются, как правило, алгебраические многочлены

$$\tilde{f}_m(x, \bar{a}) = \sum_{s=0}^m a_s x^s = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m.$$

*Условия согласования.*

1. *Условия интерполяции:*

$$\delta \tilde{f}_m(x_i, \bar{a}) = \tilde{f}_m(x_i, \bar{a}) - f(x_i) = 0.$$

2. *Дискретные условия согласования:*

$$\delta \tilde{f}_m^{(p)}(x_i, \bar{a}) = \tilde{f}_m^{(p)}(x_i, \bar{a}) - f_m^{(p)}(x_i) = 0, \quad p - \text{порядок производной.}$$

3. *Интегральные условия:*

$$\delta_m(\bar{a}) = \sqrt{\frac{1}{n+1} \sum_{s=0}^n [\tilde{f}_m(x_s, \bar{a}) - f(x_s)]^2} \rightarrow \min_{\bar{a}} \delta_m(\bar{a}) \quad (m \leq n).$$

Условие 3) выражает минимум среднеквадратичной погрешности величины  $|\tilde{f}_m(x_s, \bar{a}) - f(x_s)|$ .

$$4. \delta \tilde{f}(I_a^b) = \int_a^b (\tilde{f}_m(x, \bar{a}) - f(x)) dx = 0. \quad I_a^b = \int_a^b f(x) dx.$$

Условие 4) соответствует равенству площадей под кривыми  $\tilde{f}(x, \bar{a})$  и  $f(x)$ .

## Методы функциональной интерполяции

### Многочлен Лагранжа

Сеточная функция задана в  $(n+1)$ -й точках:

$$y_i = f(x_i), \quad i = 1, \dots, n, \quad x_i \in [a, b] = [x_0, x_n],$$

$h = x_{i+1} - x_i$  – шаг сетки.

$$\text{Многочлен Лагранжа } \tilde{f}_n(x, \bar{a}) = L_n(f, x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j = \sum_{j=0}^n f_j P_{nj}(x),$$

$$\text{где } P_{nj}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \dots (x - x_n)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1) \dots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \dots (x_j - x_n)}.$$

Справедливо следующее равенство  $\sum_{j=0}^n P_{nj}(x) = 1$ .

## Пример.

Построить многочлен Лагранжа второй степени для сеточной функции, заданной таблицей :

j	0	1	2	3
$x_j$	2	3	4	5
$f_j = f(x_j)$	7	5	8	7

Вычислить значение функции в точке  $x^* = 2.5$ .

а). Так как точка интерполяции  $x^* \in [2,4]$ , то строим многочлен Лагранжа на этом отрезке.

$$\begin{aligned} L_2(f, x) &= 7 \frac{(x-3)(x-4)}{(2-3)(2-4)} + 5 \frac{(x-2)(x-4)}{(3-2)(3-4)} + 8 \frac{(x-2)(x-3)}{(4-2)(4-3)} = \\ &= 26 - \frac{29}{2}x + \frac{5}{2}x^2, \quad L_2(f, x^*) = \frac{43}{8} = 5.375. \end{aligned}$$



b). По данному количеству точек можно построить многочлен максимально третьей степени:

$$L_3(f, x) = -\frac{3}{2}x^3 + 16x^2 - \frac{107}{2}x + 62, \quad L_3(f, x^*) = 4.8125.$$

Оценка погрешности интерполяции в произвольной точке  $x^* \in [a, b]$  имеет вид

$$|f(x^*) - L_n(f, x^*)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega_n(x^*)|, \quad \text{где } M_{n+1} = \max_{[a, b]} |f^{(n+1)}(x)|,$$

$$\omega_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n).$$

### МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Найдем коэффициенты  $\bar{a} = (a_0, a_1, \dots, a_n)$  многочлена  $\tilde{f}_m(x, \bar{a})$ , гарантирующие минимум величине

$$\delta_m(\bar{a}) = \sqrt{\frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^n [\tilde{f}_m(x_j, \bar{a}) - f_j]^2} \rightarrow \min_{\bar{a}} \delta_m(\bar{a}).$$

В общем случае многочлен  $\tilde{f}_m(x, \bar{a})$  имеет вид

$$\tilde{f}_m(x, \bar{a}) = a_0 + a_1x + \square + a_mx^m.$$

Зададим точность  $\varepsilon$ . Составляем среднеквадратичную погрешность

$$\delta_m(\bar{a}) = \sum_{i=1}^n [a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + \square + a_mx_i^m - f_i]^2.$$

Минимум реализуется при  $\frac{\partial(\delta_m(\bar{a}))}{\partial a_j} = 0$ .

$$\frac{\partial(\delta_m(\bar{a}))}{\partial a_0} = 2 \sum_{j=1}^n [a_0 + a_1x_j + \square + a_mx_j^m - f_j] \cdot 1 = 0,$$

$$\frac{\partial(\delta_m(\bar{a}))}{\partial a_1} = 2 \sum_{j=1}^n [a_0 + a_1x_j + \square + a_mx_j^m - f_j] x_j = 0,$$

$$\frac{\partial(\delta_m(\bar{a}))}{\partial a_2} = 2 \sum_{j=1}^n [a_0 + a_1x_j + \square + a_mx_j^m - f_j] x_j^2 = 0,$$

$\square \square \square$

$$\frac{\partial(\delta_m(\bar{a}))}{\partial a_m} = 2 \sum_{j=1}^n [a_0 + a_1x_j + \square + a_mx_j^m - f_j] x_j^m = 0.$$

Преобразуем систему линейных алгебраических уравнений к виду

$$(1) \begin{cases} s_0 a_0 + s_1 a_1 + \dots + s_m a_m = t_0, \text{ где } s_0 = n + 1, s_1 = \sum_{i=1}^n x_i, \\ s_1 a_0 + s_2 a_1 + \dots + s_{m+1} a_m = t_1, \quad s_k = \sum_{i=1}^n x_i^k, \quad k = 1, \dots, 2m, \quad t_0 = \sum_{i=1}^n f_i, \\ \dots \dots \dots \\ s_m a_0 + s_{m+1} a_1 + \dots + s_{2m} a_m = t_m, \quad t_k = \sum_{i=1}^n x_i^k f_i, \quad k = 1, \dots, m. \end{cases}$$

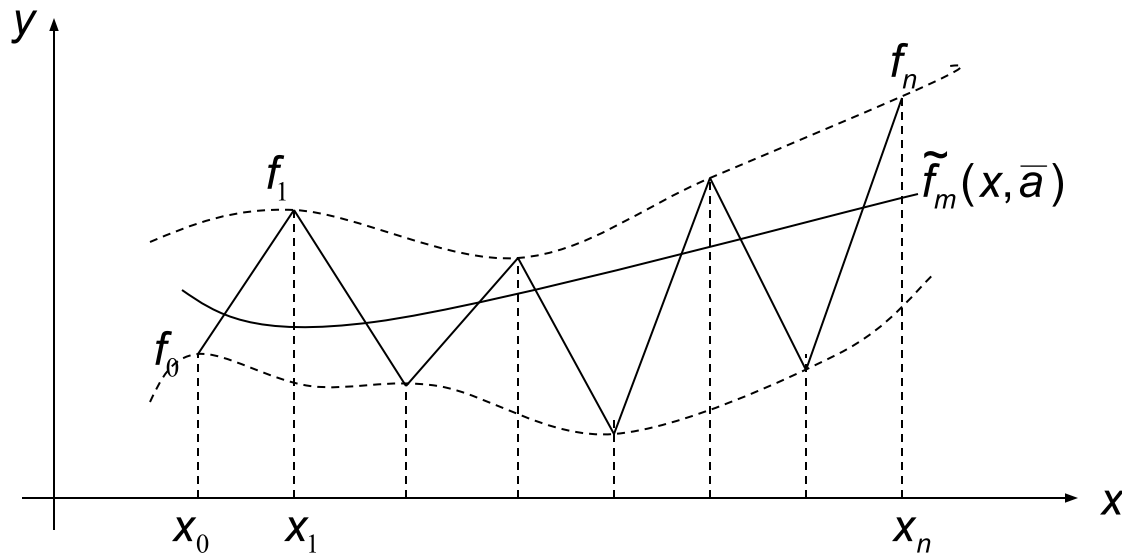


Рис.1.

## МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СГЛАЖИВАНИЯ

1. Вычислить коэффициенты  $s_k$ ,  $k = 0, \dots, 2m$ ,  $t_k$ ,  $k = 0, \dots, m$ .
2. Решить полученную систему каким – либо методом и найти коэффициенты  $a_0, a_1, \dots, a_m$ .
3. Зададим  $m = 1$ .
  - a) если  $\delta_1(\bar{a}) \gg \varepsilon$  – аппроксимация слишком грубая,  $m = m + 1$ ,
  - b) если  $\delta_m(\bar{a}) \ll \varepsilon$  – аппроксимация недостоверна, надо уменьшить  $m$ .
  - c) если  $\delta_m(\bar{a}) \approx \varepsilon$  – степень многочлена оптимальна.
4. При  $m \gg 1$  система уравнений становится плохо обусловленной и определить полином  $\tilde{f}_m(x, \bar{a})$  практически невозможно.
5. Метод наименьших квадратов реализует наилучшее в среднем приближение на всей области определения сеточной функции  $f_i = f(x_i)$  и в некоторых случаях не учитывает локальных свойств аппроксимируемой функции.

5. Отметим, что  $\tilde{f}_m(x, \bar{a})$  (рис.1) расположена внутри полосы "разброса" функции и является более плавной по сравнению с ломаной, проведенной через экспериментальные точки.
6. С изменением степени  $m$  все коэффициенты  $\bar{a}$  нужно определять заново.

*Пример.*

Сеточная функция  $y = \ln x$  задана на отрезке  $[1; 5]$  с точностью  $\varepsilon = 0.1$ . По этим данным найти сглаживающий многочлен  $\tilde{f}_m(x, \bar{a})$  МНК с использованием выбора степени  $m = 1, 2, \dots$

$i$	0	1	2	3	4
$x_i$	1	2	3	4	5
$f_i$	-0.070	0.760	1.000	1.526	1.449



Примем сначала  $m = 1$

1. Искомая функция  $\tilde{f}_1(x, \bar{a}) = a_0 + a_1x$  определяется из системы

$$\begin{cases} \left( \sum_{i=0}^4 1 \right) a_0 + \left( \sum_{i=0}^4 x_i \right) a_1 = \sum_{i=0}^4 f_i, \\ \left( \sum_{i=0}^4 x_i \right) a_0 + \left( \sum_{i=0}^4 x_i^2 \right) a_1 = \sum_{i=0}^4 x_i f_i, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5a_0 + 15a_1 = 4.665, \\ 15a_0 + 55a_1 = 17.799. \end{cases}$$

$a_0 = -2.2082$ ;  $a_1 = 0.3804$ . Сглаживающий многочлен

$\tilde{f}_1(x, \bar{a}) = -2.2082 + 0.3804x$ . Среднеквадратичная погрешность

$$\delta_1 = 0.205 > \varepsilon = 0.1$$

Так как условие  $\delta_1 \approx \varepsilon$  не выполнено, то  $m = 2$  и

$\tilde{f}_2(x, \bar{a}) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ . Определяя коэффициенты из системы

(1) при  $m = 2$ , получаем

$$\tilde{f}_2(x, \bar{a}) = -0.9726 + 1.0356x - 0.1092x^2.$$

Среднеквадратичная погрешность  $\delta_2 = 0.094 \leq \varepsilon = 0.1$

Следовательно, задача решена.

# Сглаживание на основе сплайнов

- Интерполяционные кубические сплайны

Задачу восполнения сеточной функции  $y_i = f(x_i)$ ,  $i = 0, \dots, n$ ,  $x \in [a, b]$  решает интерполяционный кубический сплайн дефекта один, т.е.  $S_3^q(x) \in C_2[a, b]$ . Дефектом  $q$  сплайна называется число  $q = m - r$ , где  $m$  – степень интерполяционного многочлена,  $r$  – наибольший порядок производной, непрерывной на  $[a, b]$ . В данном случае  $m = 3$ ,  $r = 2$ . Предполагается, что восполняемая функция достаточно гладкая.

Функция  $S_3^q(x) = \sum_{i=0}^{n-1} S_{3,i}(x)$  определена на отрезке  $[a, b]$  принадлежит классу гладкости  $C_2[a, b]$  и составлена из совокупности звеньев  $S_{3,i}(x)$ , являющихся полиномами третьей степени, определенных на частичных отрезках  $[x_i, x_{i+1}]$ . Вид многочлена

$$S_{3,i}(x) = a_0^{(i)} + a_1^{(i)}x + a_2^{(i)}x^2 + a_3^{(i)}x^3.$$

Для определения  $4n$  неизвестных коэффициентов используются следующие условия в узлах интерполяции :

1)  $S_{3,i}(x_i) = y_i, i = 0, \dots, n$  – условия интерполяции;

2)  $S_{3,i}(x_i) = S_{3,i+1}(x_i), i = 1, \dots, n-1$  – условия непрерывности сплайна;

3)  $S'_{3,i}(x_i) = S'_{3,i+1}(x_i), i = 1, \dots, n-1$  – условия непрерывности первых производных;

4)  $S''_{3,i}(x_i) = S''_{3,i+1}(x_i), i = 1, \dots, n-1$  – условия непрерывности вторых производных.

Обозначим  $S''_3(x) = D(x)$ , полагаем, что  $D(x_0) = D_0 = D(x_n) = D_n = 0$ . тогда для  $D_i = D(x_i)$  получаем СЛАУ

$$D_{i-1} \frac{h_i}{6} + D_i \frac{h_i + h_{i+1}}{3} + D_{i+1} \frac{h_{i+1}}{6} = \frac{\Delta y_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{\Delta y_i}{h_i}, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (1)$$

$$D_0 = D_n = 0, \quad \Delta y_i = y_i - y_{i-1}, \quad h_i = x_i - x_{i-1}.$$



Выражение сплайна  $S_{3,i}(x)$  на  $[x_{i-1}, x_i]$  через коэффициенты  $D_i$  имеет вид

$$S_{3,i}(x) = D_{i-1} \frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + D_i \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + \left( \frac{y_{i-1}}{h_i} - D_{i-1} \frac{h_i}{6} \right) (x_i - x) + \left( \frac{y_i}{h_i} - D_i \frac{h_i}{6} \right) (x - x_{i-1}), \quad x \in [x_{i-1}, x_i] \quad (2)$$

Система уравнений (1) относительно неизвестных  $D_i$  решается методом прогонки.

**ПРИМЕР.**

Для данной таблицы значений функции  $f(x)$  с шагом  $h_i = x_i - x_{i-1} = \text{const}$  определить кубические сплайны дефекта 1 на каждом отрезке  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Проверить непрерывность сплайна и всех его производных в узле  $x^* = 2$ .

$i$	0	1	2	3	4
$x_i$	1	2	3	4	5
$y_i$	1	3	6	9	21
$D_i$	0	18\7	-30\7	102\7	0

Относительно неизвестных  $D_1, D_2, D_3$  из (1) получаем СЛАУ :

$$\begin{cases} \frac{2}{3}D_1 + \frac{1}{6}D_2 = \frac{y_2 - y_1}{1} - \frac{y_1 - y_0}{1} = 1, \\ \frac{1}{6}D_1 + \frac{2}{3}D_2 + \frac{1}{6}D_3 = \frac{y_3 - y_2}{1} - \frac{y_2 - y_1}{1} = 0, \\ \frac{1}{6}D_2 + \frac{2}{3}D_3 = \frac{y_4 - y_3}{1} - \frac{y_3 - y_2}{1} = 9. \end{cases}$$

Вычисляем прогоночные коэффициенты  $p_i, q_i$

$$p_i = \frac{c_i}{b_i - a_i p_{i-1}}, \quad q_i = \frac{a_i q_{i-1} - f_i}{b_i - a_i p_{i-1}}, \quad i = 1, 2, 3.$$

$$p_1 = -\frac{1}{4}, \quad q_1 = \frac{3}{2}; \quad p_2 = -\frac{4}{15}, \quad q_2 = -\frac{2}{5}; \quad p_3 = 0, \quad q_3 = \frac{102}{7}.$$

$$D_3 = p_3 D_4 + q_3 = \frac{102}{7}, \quad D_2 = p_2 D_3 + q_2 = -\frac{30}{7}, \quad D_1 = p_1 D_2 + q_1 = \frac{18}{7}.$$

Выражение сплайна на каждом отрезке  $[x_{i-1}, x_i]$  из (2)

имеет вид

$$S_{3,1}(x) = \frac{18}{42}(x-1)^3 + \frac{108}{42}(x-1) + 2 - x, \quad x \in [1,2];$$

$$S_{3,2}(x) = \frac{18}{42}(3-x)^3 - \frac{30}{42}(x-2)^3 + \frac{108}{42}(3-x) + \frac{282}{42}(x-2), \quad x \in [2,3]$$

$$S_{3,3}(x) = \frac{30}{42}(x-4)^3 + \frac{102}{42}(x-3)^3 + \frac{282}{42}(4-x) + \frac{276}{42}(x-3), \quad x \in [3,4];$$

$$S_{3,4}(x) = \frac{102}{42}(5-x)^3 + \frac{276}{42}(5-x) + 21(x-4), \quad x \in [4,5].$$

Проверим правильность построения сплайна:

$$S_{3,1}(2) = \frac{126}{42} = 3, \quad S_{3,2}(2) = \frac{126}{42} = 3.$$

$$S'_{3,1}(2) = \frac{120}{42}, \quad S'_{3,2}(2) = \frac{120}{42}.$$

$$S''_{3,1}(2) = \frac{108}{42}, \quad S''_{3,2}(2) = \frac{108}{42}.$$

# Задание к третьей лабораторной работе

По данной таблице значений  $(x_i, f(x_i))$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  построить :

1) многочлены Лагранжа  $L_2(x)$ ,  $L_6(x)$ , сравнить значения

$L_2(x^*)$ ,  $L_6(x^*)$ ,  $f(x^*)$  и построить графики этих функций;

2) методом наименьших квадратов найти сглаживающий

многочлен  $\tilde{f}_m(x, \bar{a})$ . Сравнить значения  $\tilde{f}_m(x^*, \bar{a})$ ,  $f(x^*)$  и

построить графики этих функций.;

3) методом сплайн – аппроксимации построить кубический

сплайн  $S_3(x)$ , сравнить значения  $S_3(x^*)$ ,  $f(x^*)$  и построить

графики этих функций.

Вычислительная математика

Математические методы в экономике 061800

Институт Международного Бизнеса и  
Экономики кафедра Математики и  
Моделирования

Ушаков А.А.

---

# Методы численного дифференцирования и интегрирования

Лекция № 5

# Методы численного дифференцирования и интегрирования

Трехточечный шаблон. Выберем шаблон  $(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$  на произвольной сетке. Предположим  $f(x) \in C_3[a, b]$ , разложим функцию  $f(x)$  по формуле Тейлора второго порядка относительно точки  $x_i$  с остаточным слагаемым в форме Лагранжа и найдем выражения для  $f_{i+1} = f(x_{i+1})$ ,  $f_{i-1} = f(x_{i-1})$ :

$$f_{i+1} = f_i + h f'_i + \frac{1}{2} h^2 f''_i + \frac{1}{6} h^3 f'''(\xi_1), \quad f_{i-1} = f_i - h f'_i + \frac{1}{2} h^2 f''_i - \frac{1}{6} h^3 f'''(\xi_2), \quad (3)$$

где  $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (x_{i-1}, x_{i+1})$ ,  $h = x_{i+1} - x_i = \text{const}$ .

Из (3) следуют три аппроксимации для  $f'_i$ :

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} - \text{правосторонняя аппроксимация,} \quad \left( \frac{h}{2} M_{2,i} \right) - \text{погрешность,}$$
$$f'_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} - \text{левосторонняя аппроксимация,} \quad \left( \frac{h}{2} M_{2,i} \right) - \text{погрешность,}$$

Используя разложение функции  $f(x) \in C_3[a, b]$  по формуле Тейлора, можно получить так же

$$f'_{i-1} = \frac{1}{2h}(-3f_{i-1} + 4f_i - f_{i+1}), \quad \left( \frac{h^2}{3} M_{3,i} \right) - \text{погрешность},$$

$$f'_{i+1} = \frac{1}{2h}(f_{i-1} - 4f_i + 3f_{i+1}), \quad \left( \frac{h^2}{3} M_{3,i} \right) - \text{погрешность},$$

$$f'_i = \frac{1}{2h}(f_{i+1} - f_{i-1}), \quad \left( \frac{h^2}{6} M_{3,i} \right) - \text{погрешность}.$$

Аппроксимацию второй производной получаем из представления

$$f_{i+1} = f_i + h f'_i + \frac{h^2}{2} f''_i + \frac{h^3}{6} f'''_i + \frac{h^4}{24} f^{(4)}(\xi_1),$$

$$f_{i-1} = f_i - h f'_i + \frac{h^2}{2} f''_i - \frac{h^3}{6} f'''_i + \frac{h^4}{24} f^{(4)}(\xi_2),$$

$$f''_i = \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{h^2}, \quad \left( \frac{h^2}{12} M_{4,i} \right) - \text{погрешность}.$$

# Квадратурные формулы Ньютона-Котеса

## Формулы прямоугольников

*Одним из классических методов вычисления определенных интегралов является применение функциональных квадратурных формул*

$$I_a^b(f) = \int_a^b f(x)dx = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx \cong \sum_{j=1}^n q_j f(x_j), \quad (4)$$

*где  $q_j$  – весовые коэффициенты;  $x_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , – некоторые точки отрезка  $[a, b]$ ,  $n$  – число узлов квадратурной формулы.*



Квадратурная формула называется точной для многочленов степени  $m$ , если при замене функции  $f(x)$  на произвольный алгебраический многочлен степени не выше  $m$  приближенное равенство (4) становится точным.

Вычислим интеграл на отрезке  $[x_i, x_{i+1}]$  следующим образом

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx \int_{x_i}^{x_{i+1}} L_0(x) dx = h f(c_i), \quad c_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}, \quad h = x_{i+1} - x_i = \text{const.}$$

Тогда квадратурная формула прямоугольников имеет вид

$$I_a^b(f) \approx \Pi_a^b(f, n) = h \sum_{i=1}^n f(c_i), \quad c_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}.$$

Оценка точности формулы прямоугольников

$$\left| I_a^b(f) - \Pi_a^b(f, n) \right| \leq \frac{M_2}{24} (b - a) h^2, \quad M_2 = \max_{[a,b]} |f''(x)|.$$

# Формула трапеций

Вычислим интеграл на отрезке  $[x_i, x_{i+1}]$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx \int_{x_i}^{x_{i+1}} L_1(x) dx = \int_0^1 [(1-q)f_i + qf_{i+1}] h dq = h \left( \frac{f_i + f_{i+1}}{2} \right),$$

где  $q = \frac{x - x_i}{h}$ ,  $dx = h dq$ ,  $0 \leq q \leq 1$ .

Квадратурная формула трапеций имеет вид

$$I_a^b(f) \approx T_a^b(f, n) = \frac{h}{2} [f_0 + f_n + 2(f_1 + f_2 + \dots + f_{n-1})].$$

Оценка точности по формуле трапеций

$$|I_a^b(f) - T_a^b(f, n)| \leq \frac{M_2}{12} (b - a) h^2, \quad M_2 = \max_{[a,b]} |f''(x)|.$$

# Формула Симпсона

Вычислим интеграл на отрезке  $[x_{i-1}, x_{i+1}]$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} L_2(x) dx = \frac{h}{3} (f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1}),$$

где  $h = x_{i+1} - x_{i-1} = \text{const}$ .

Квадратурная формула Симпсона имеет вид

$$I_a^b(f) \approx S_a^b(f, n) = \frac{h}{3} \left[ f_0 + 4 \sum_{i=1}^k f_{2i-1} + 2 \sum_{j=1}^{k-1} f_{2j} + f_{2k} \right]. \quad n = 2k.$$

Оценка точности по формуле Симпсона

$$\left| I_a^b(f) - S_a^b(f, n) \right| \leq \frac{M_4}{180} (b-a) h^4, \quad M_4 = \max_{[a,b]} |f^{(4)}(x)|.$$

# Вычисление определенного интеграла с заданной точностью

Обычно точность  $\varepsilon$  задана, тогда из неравенства

$$\frac{M_p}{A} (b-a) h^p \leq \varepsilon,$$

где  $h$  – шаг интегрирования,  $M_p = \max_{[a,b]} |f^{(p)}(x)|$ .

Определяем шаг  $h \leq \sqrt{\frac{A\varepsilon}{M_p(b-a)}}$ . Потом используется

какая – либо квадратурная формула с найденным шагом  $h$ .

# Пример.

Вычислить интеграл  $I_1^2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}$  на основе квадратурной

формулы Симпсона с точностью  $\varepsilon = 10^{-4}$ .

Воспользуемся неравенством

$$\frac{h^4(b-a)}{180} M_4 < \varepsilon, \quad M_4 = \max_{[1,2]} \left| \frac{24}{x^5} \right| = 24,$$

$$h \leq \sqrt{\frac{180\varepsilon}{(b-a)M_4}} = 0.52. \quad \text{Примем } h = 0.5.$$

$$I_1^2 \approx S_1^2\left(\frac{1}{x}, 2\right) = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) = 0.69444,$$

$$\text{Абсолютная погрешность } \delta = |0.69444 - 0.69317| = 0.001293$$

# Задание к четвертой лабораторной работе

По данной функции  $f(x)$ , определенной на  $[a, b]$ , вычислить приближенное значение  $\int_a^b f(x) dx$  с точностью  $\varepsilon = 10^{-4}$  по

формулам :

- а) прямоугольников,
- б) трапеций,
- в) Симпсона.

Шаг интегрирования определить из соотношения :

$$h \leq \sqrt{\frac{A\varepsilon}{M_p(b-a)}}$$

Сравнить полученные приближенные значения интеграла с точным.

# Квадратурная формула Чебышева

*Общий вид этой линейной квадратурной формулы*

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t\right) dt \approx \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n A_i f\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t_i\right),$$

*где  $t_i$  – значения узлов,  $A_i$  – значения весовых коэффициентов.*

*Для различных  $n$  получаются различные квадратурные формулы*

*Чебышева с указанной погрешностью*

$$\int_a^b f(x) dx \approx G_a^b(f, 2) = \frac{b-a}{2} \left[ f\left(\frac{b+a}{2} - \frac{b-a}{2}t_0\right) + f\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t_0\right) \right], \quad r_2^u = \frac{1}{135} \varphi''(\xi_1),$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx G_a^b(f, 3) = \frac{b-a}{2} \left[ f\left(\frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2}t_1\right) + f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t_1\right) \right],$$

$$r_3^u = \frac{1}{360} \varphi^{(4)}(\xi_2), \quad \text{где } t_0 = 0.577350, \quad t_1 = 0.707107.$$