

**Числовые  
характеристики  
(параметры)  
распределений  
случайных величин**

# литература

« QUE SAIS-JE ? »  
LE POINT DES CONNAISSANCES ACTUELLES

## PROBABILITÉ ET CERTITUDE

par

Émile BOREL

*Membre de l'Institut et des Écoles des Sciences  
Directeur honoraire de l'École Normale Supérieure*



PRESSES UNIVERSITAIRES DE FRANCE  
108, BOULEVARD SAINT-GERMAIN, PARIS

1956

QUATROZIÈME MILLE

ЭМИЛЬ БОРЕЛЬ

## ВЕРОЯТНОСТЬ И ДОСТОВЕРНОСТЬ

Перевод  
со второго французского издания  
И. Б. ПОГРЕБИССКОГО

Под редакцией и с предисловием  
Б. В. ГНЕДЕНКО

ИЗДАНИЕ ТРЕТЬЕ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
МОСКВА 1969

Математическое ожидание:  
центр <<тяжести >> распределения

---

Дискретные распределения

$$M[X] = \sum_i p_i \cdot x_i$$

Непрерывные распределения

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$$

### Свойства математического ожидания:

1.  $M[C]=C$ , т.е. математическое ожидание постоянной равно самой постоянной;
2.  $M[C \cdot X] = C \cdot M[X]$  для любой случайной величины  $X$  и произвольного числа  $C$ ;
3.  $M[X + Y] = M[X] + M[Y]$  для произвольных случайных величин  $X, Y$ ;
4.  $M[X_1 \cdot X_2 \cdots X_n] = M[X_1] \cdot M[X_2] \cdots M[X_n]$  для  $n$  независимых случайных величин  $X_1, X_2, \dots, X_n$ .

Размерность математического ожидания равна размерности случайной величины  $X$ .

# Виды параметров

---

- Моменты
  - начальные
  - центральные
- Параметры сдвига
  - математическое ожидание
  - медиана
  - мода
- Параметры формы
  - дисперсия
  - асимметрия
  - эксцесс

# Моменты

---

Различают *начальные моменты*  $k$ -го порядка

$$\alpha_k = M[x^k]$$

и *центральные моменты*  $k$ -го порядка

$$\mu_k = M[(x - M[x])^k].$$

# Связь между центральными и начальными моментами

---

Положим  $(M[x] = m)$ .

Применим формулу бинома Ньютона

$$(x - M[x])^k = ((-m) + x)^k = \sum_{i=0}^k (-1)^i \cdot C_k^i \cdot m^i \cdot x^{k-i}.$$

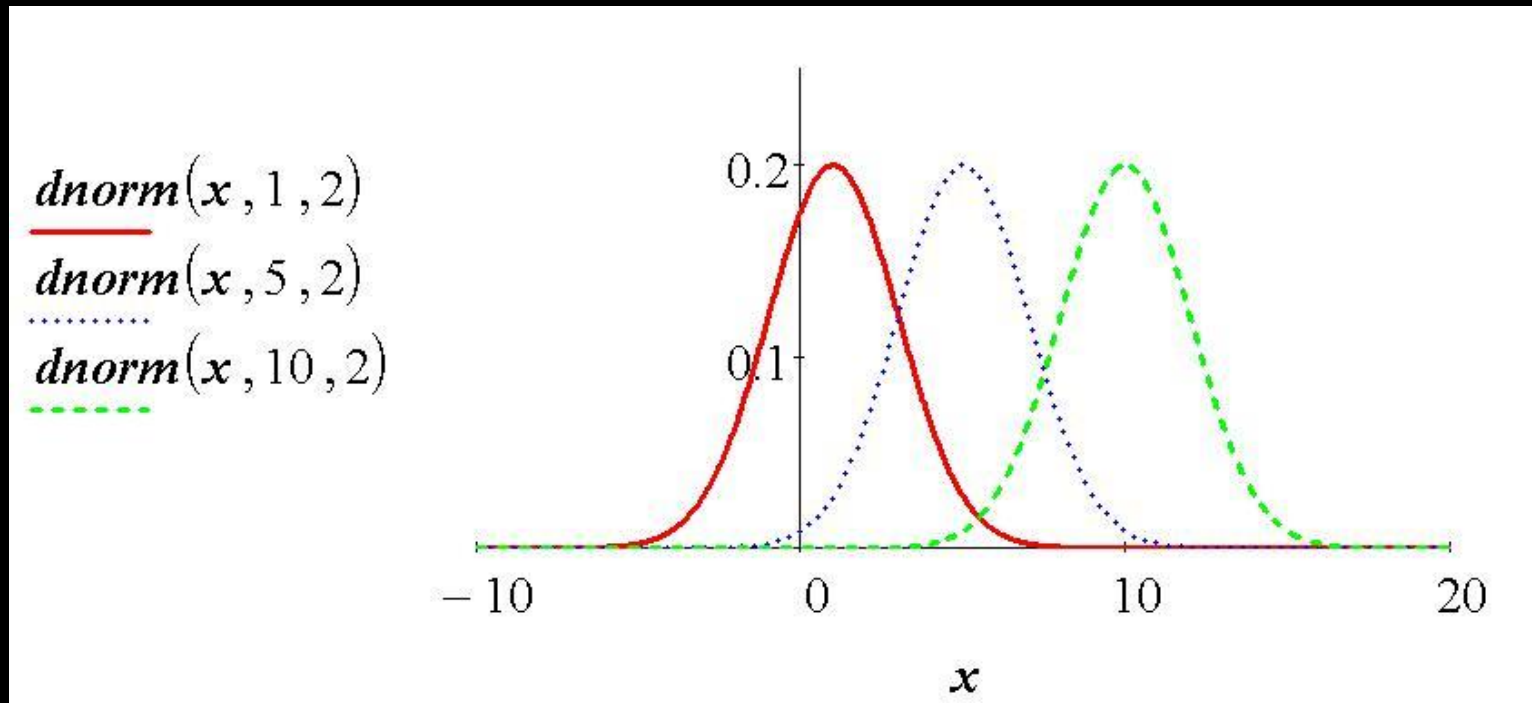
Возьмем мат. ожидание от левой и правой частей этого выражения и получим выражение, связывающее центральные и начальные моменты

$$\mu_k = M [(x - M[x])^k] = \sum_{i=0}^k (-1)^i \cdot C_k^i \cdot m^i \cdot \alpha_{k-i}$$

$k$	$\mu_k$	$\alpha_k$
0	1	1
1	0	$M[X]$
2	$D[X] = \alpha_2 - \alpha_1^2$	$M[X^2]$
3	$\alpha_3 - 3\alpha_1 \cdot \alpha_2 - 2\alpha_1^3$	$M[X^3]$
4	$\alpha_4 - 4\alpha_1\alpha_3 + 6\alpha_1\alpha_2 - 3\alpha_1^4$	$M[X^4]$
...	...	...

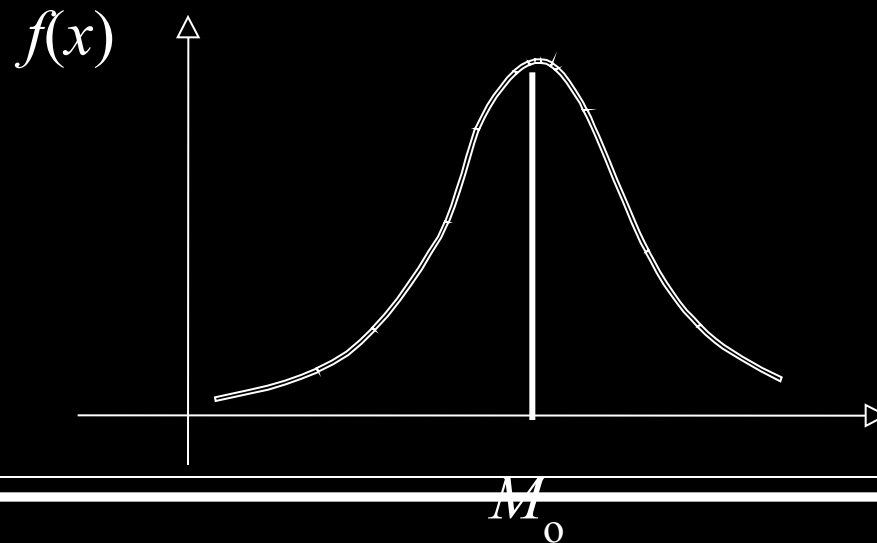


# Примеры — разные средние



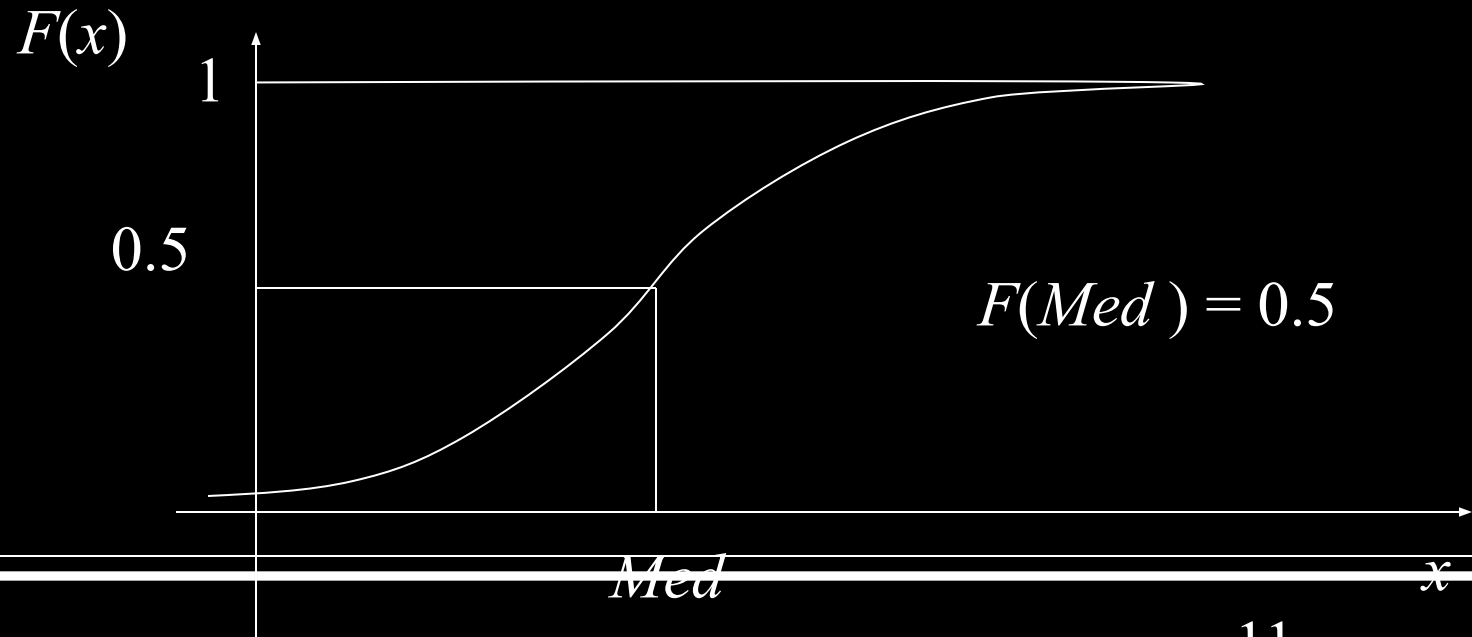
# Мода

Значение  $M_0$  непрерывной случайной величины, при котором имеет место максимум плотности распределения. Для дискретной СВ -- ее наиболее вероятное значение.



# Медиана

- Значение случайной величины  $x = Med$ , которое делит область ее значений на две части так, что вероятности попадания в каждую из них равна 0.5.



## Параметры формы (масштаба)

---

- Дисперсия  $D_x$  и среднеквадратичное отклонение  $\sigma^2$

Дискретные СВ

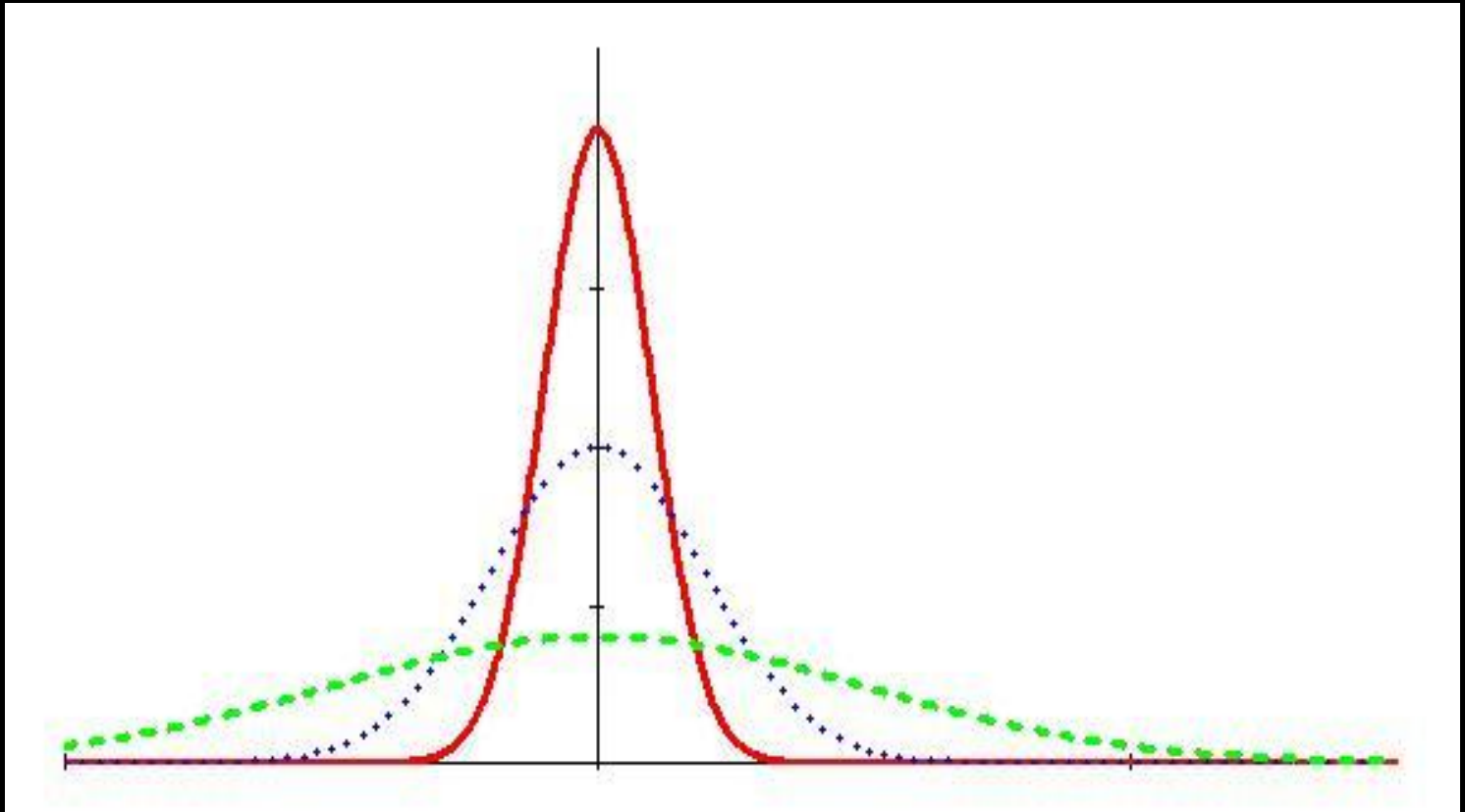
$$D_x = \sum_i p_i \cdot (x_i - M[X])^2$$

Непрерывные СВ

$$D_x = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M[x])^2 f(x) dx$$

$$D_x = \sigma^2$$

# *Разные дисперсии*



# Свойства дисперсии

---

$$\begin{aligned} D[X] &= M[(X - m_X)^2] = M[X^2 - 2Xm_X + m_X^2] = \\ &= M[X^2] - 2m_X M[X] + m_X^2 = M[X^2] - m_X^2. \end{aligned}$$

1.  $D[C] = 0$ , где  $C = const$ ;
2.  $D[X] \geq 0$ ;
3.  $D[C \cdot X] = C^2 \cdot D[X]$  для любой случайной величины  $X$  и произвольного числа  $C$  ;
4.  $D[X \pm Y] = D[X] + D[Y]$  для независимых случайных величин  $X$  и  $Y$ .

## Свойства среднего квадратического отклонения:

---

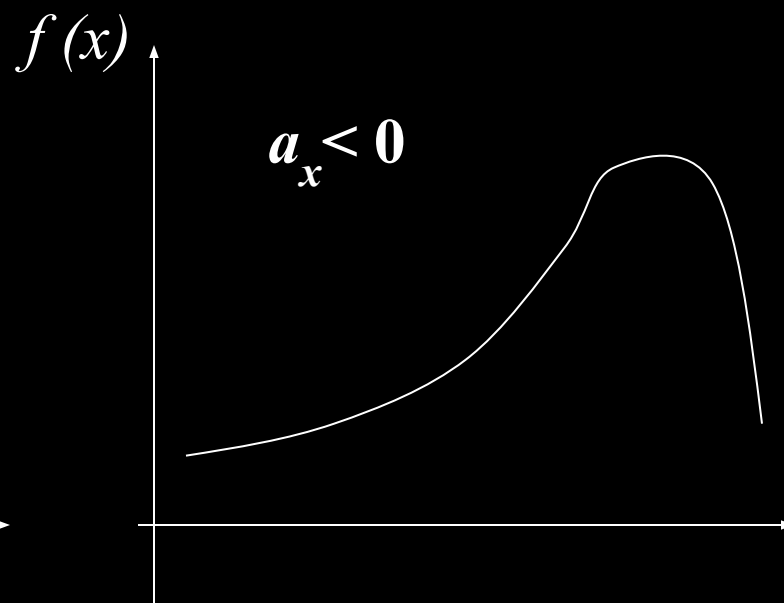
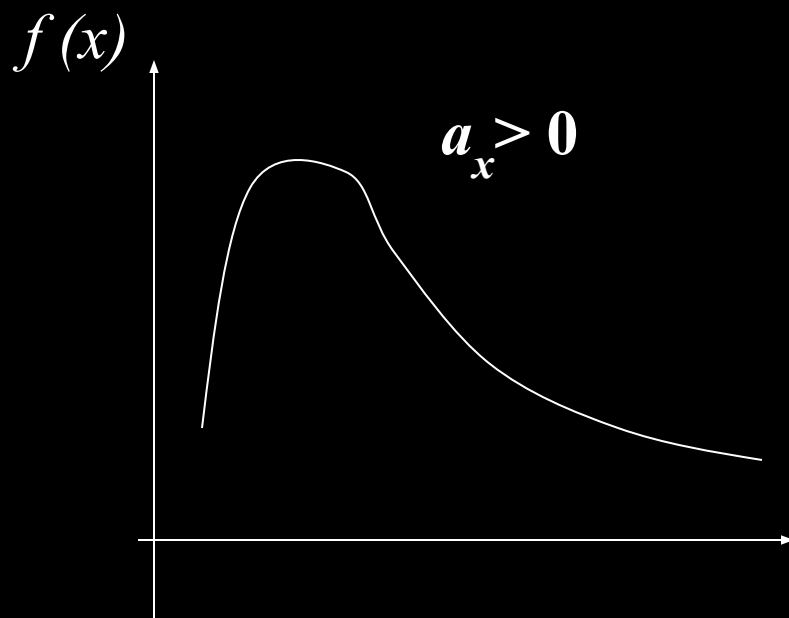
1.  $\sigma[C] = 0$ , где  $C = Const$ ;
2.  $\sigma[C \cdot X] = C \cdot \sigma[X]$ ;
3.  $\sigma[X + Y] = \sqrt{\sigma^2[X] + \sigma^2[Y]}$  для независимых случайных величин  $X$  и  $Y$ .

# Параметры формы

---

- Коэффициент асимметрии

$$a_x = \frac{\mu_3}{\sigma_x^3}$$

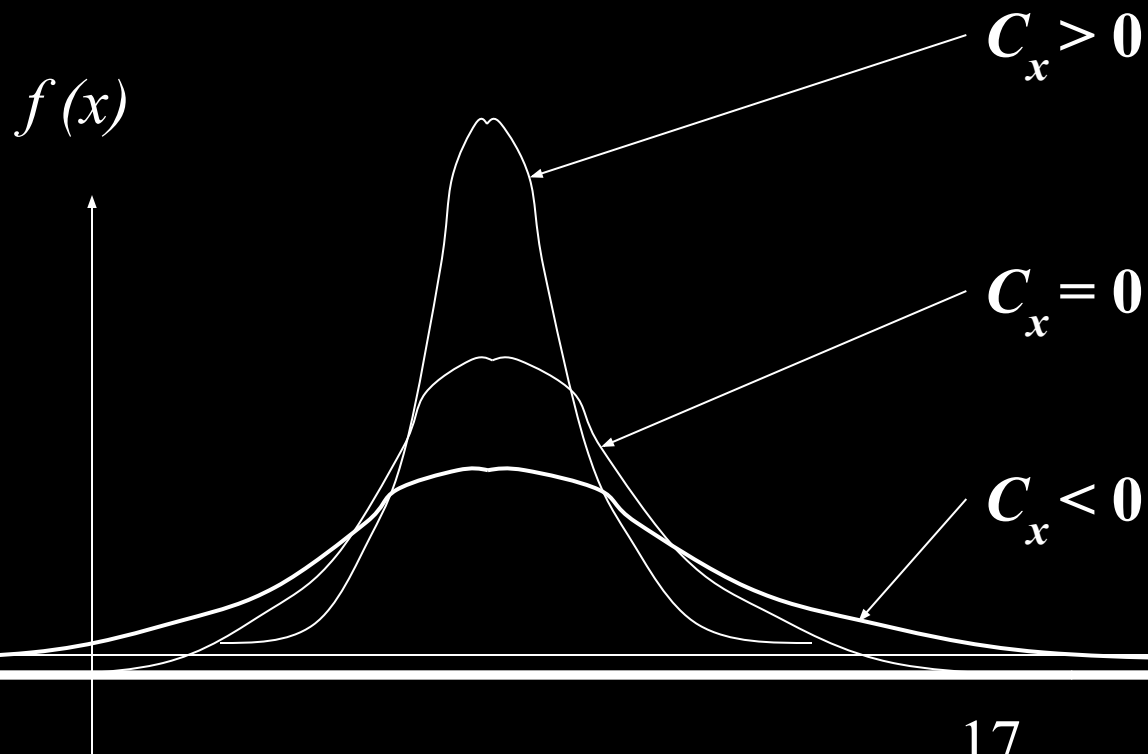




# Параметры формы

- Эксцесс

$$C_x = \frac{\mu_4}{\sigma_x^4} - 3$$

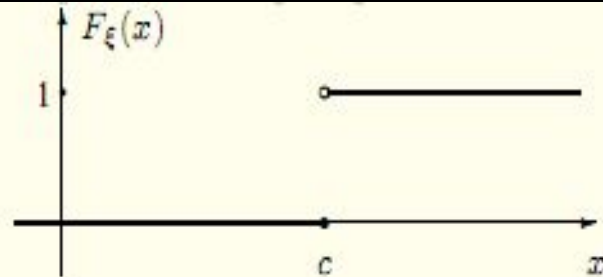


---

# Основные распределения и их свойства

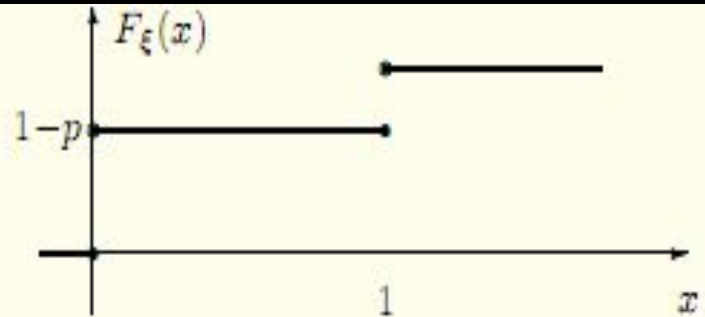
## Вырожденное распределение (Распределение константы)

$$F_{\xi}(x) = P(\xi < x) = P(c < x) = \begin{cases} 0, & x \leq c; \\ 1, & x > c. \end{cases}$$



## Распределение Бернулли (Распределение индикатора события)

$$F_{\xi}(x) = P(\xi < x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ 1-p, & 0 < x \leq 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$



# Равномерное распределение

$$F_{\xi}(x) = P(\xi < x) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ \frac{x - a}{b - a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

