Числовые характеристики (параметры) распределений случайных величин

литература

« QUE SAIS-JE ? »
LE POINT DES CONNAISSANCES ACTUELLES

PROBABILITÉ
ET CERTITUDE

par

Émile BOREL
Membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes
Directeur honoraire de l'École Normale Supérieure

PRESSES UNIVERSITAIRES DE FRANCE
108, BOULEVARD SAINT-GERMAIN, PARIS
1956
QUATORZIÈME MILLE

ЭМИЛЬ БОРЕЛЬ

ВЕРОЯТНОСТЬ
И ДОСТОВЕРНОСТЬ

Перевод
со второго французского издания
И. Б. ПОГРЕБЫССКОГО

Под редакцией и с предисловием
Б. В. ГНЕДЕНКО

ИЗДАНИЕ ТРЕТЬЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1969

Математическое ожидание: центр <<тяжести >> распределения

Дискретные распределения

$$M\left[X\right]=\sum_{i} p_i \cdot x_i$$

Непрерывные распределения

$$M\left[X\right]=\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f\left(x\right)dx$$

Свойства математического ожидания:

1. M[C]=C, т.е. математическое ожидание постоянной равно самой постоянной;

2. $M[C \cdot X] = C \cdot M[X]$ для любой случайной величины X и произвольного числа C;

3. $M[X+Y] = M[X] + M[Y]$ для произвольных случайных величин X, Y;

4. $M[X_1 \cdot X_2 \cdots X_n] = M[X_1] \cdot M[X_2] \cdots M[X_n]$ для n независимых случайных величин $X_1,\ X_2, \ldots, X_n$.

Размерность математического ожидания равна размерности случайной величины X.

Виды параметров

- Моменты
  - начальные
  - центральные
- Параметры сдвига
  - математическое ожидание
  - медиана
  - мода
- Параметры формы
  - дисперсия
  - асимметрия
  - эксцесс

Моменты

Различают *начальные моменты* $k-$го порядка

$$\alpha_k = M[x^k]$$

и *центральные* моменты $k-$го порядка

$$\mu_k = M[(x - M[x])^k].$$

Связь между центральными и начальными моментами

Положим $(M[x] = m)$.

Применим формулу бинома Ньютона

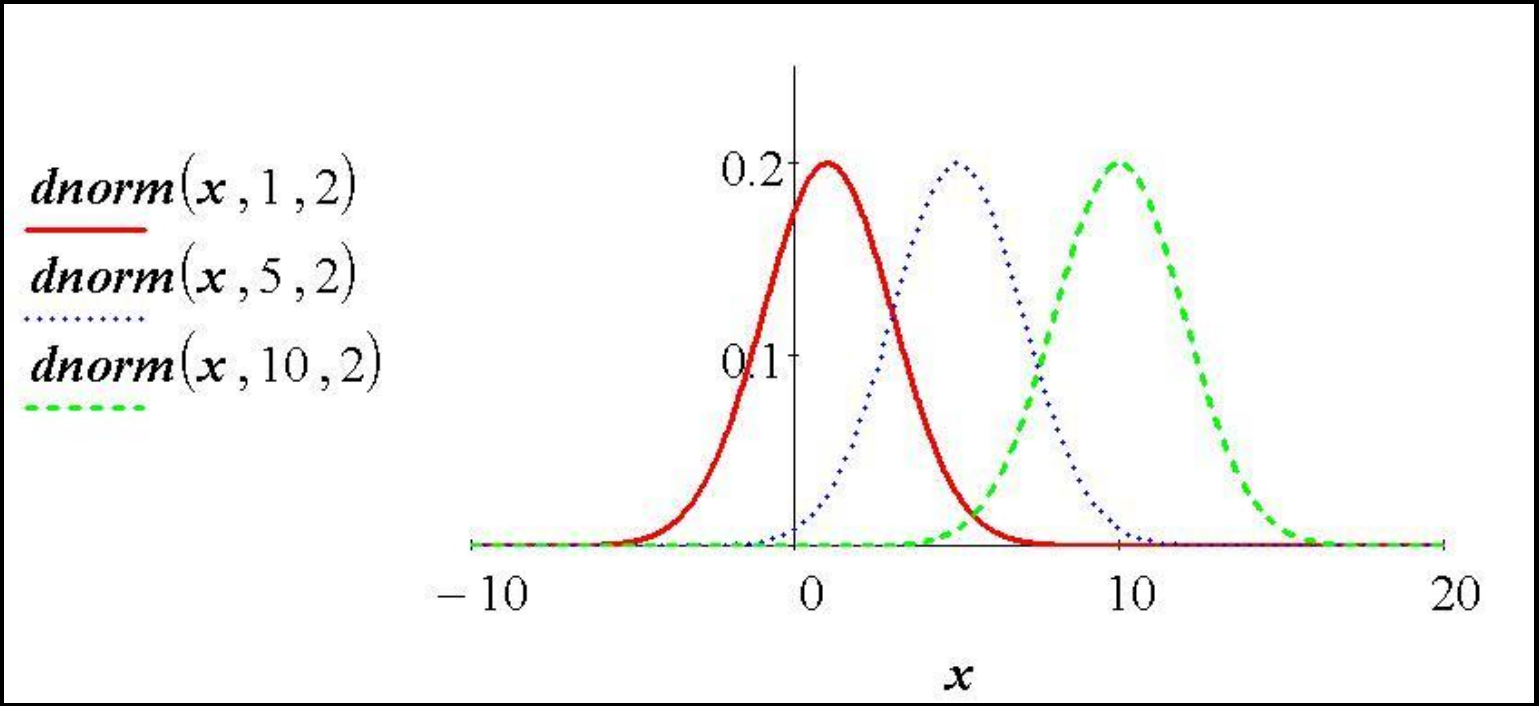
$$(x - M[x])^k = ((-m) + x)^k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \cdot C_k^i \cdot m^i \cdot x^{k-i}.$$

Возьмем мат. ожидание от левой и правой частей этого выражения и получим выражение, связывающее центральные и начальные моменты

$$\mu_k = M\left[(x - M[x])^k\right] = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \cdot C_k^i \cdot m^i \cdot \alpha_{k-i}$$

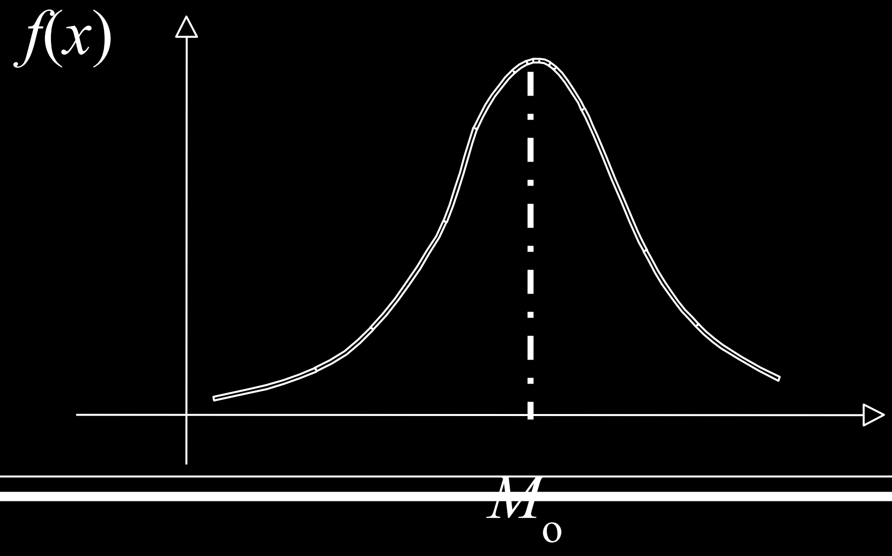
k	μ_k	α_k
0	1	1
1	0	$M[X]$
2	$D[X] = \alpha_2 - \alpha_1^2$	$M[X^2]$
3	$\alpha_3 - 3\alpha_1 \cdot \alpha_3 - 2\alpha_1^2$	$M[X^3]$
4	$\alpha_4 - 4\alpha_1\alpha_3 + 6\alpha_1\alpha_2 - 3\alpha_4$	$M[X^4]$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

Примеры — разные средние



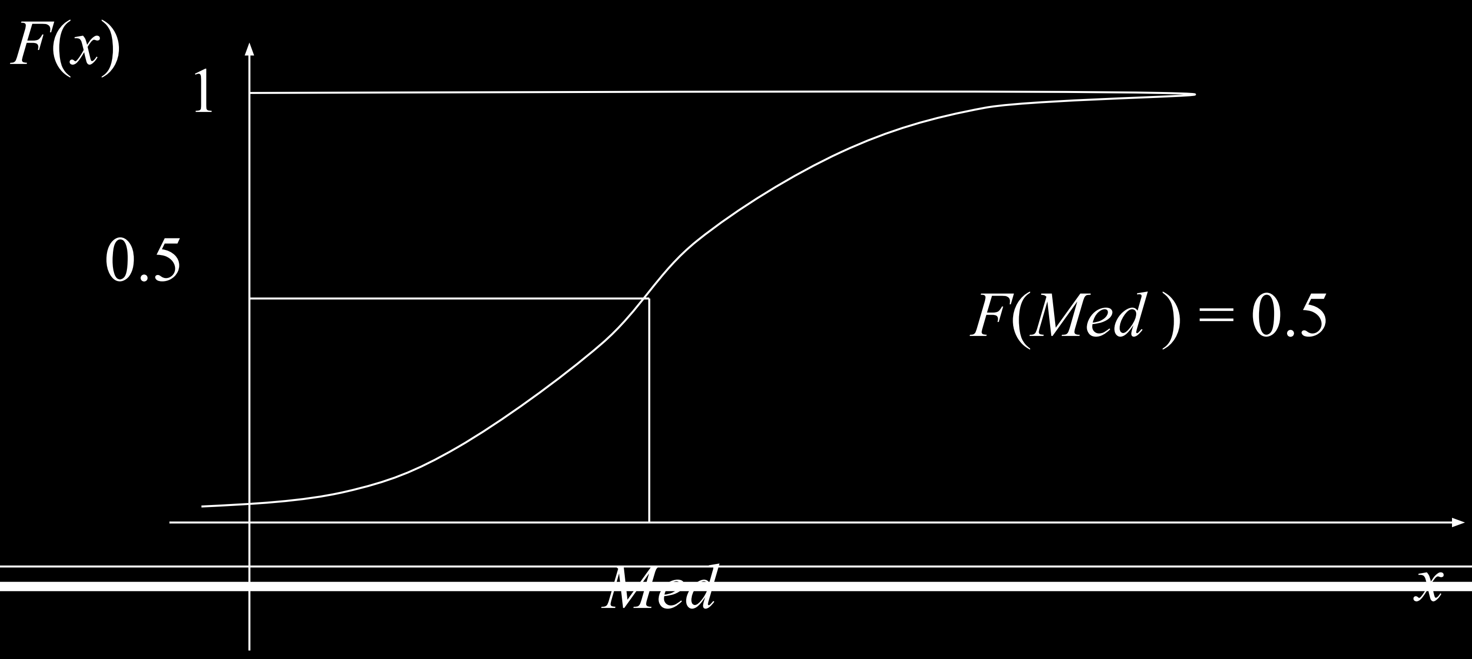
Мода

Значение M_o непрерывной случайной величины, при котором имеет место максимум плотности распределения. Для дискретной СВ -- ее наиболее вероятное значение.



Медиана

- Значение случайной величины $x = Med$, которое делит область ее значений на две части так, что вероятности попадания в каждую из них равна 0.5.



Параметры формы (масштаба)

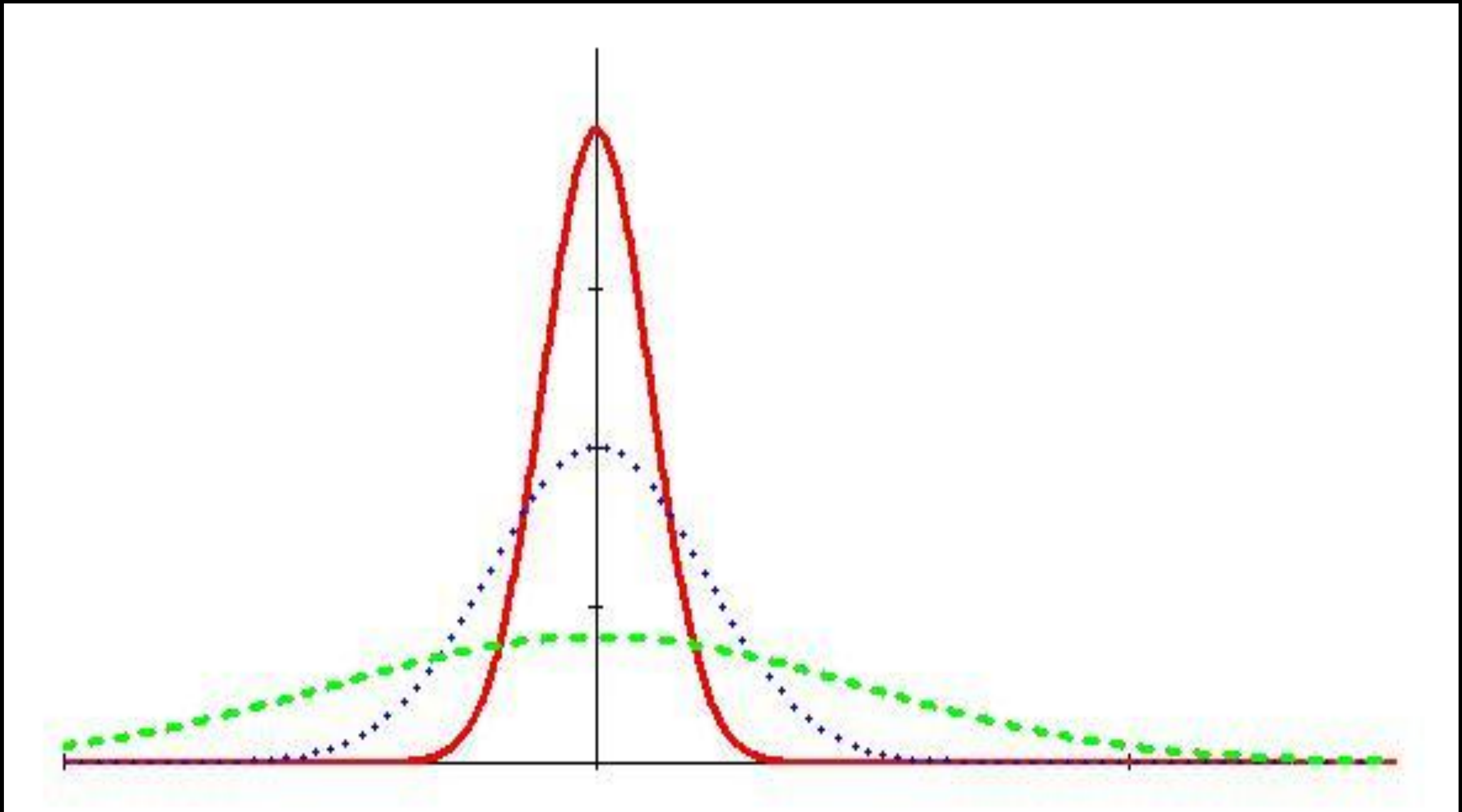
- Дисперсия $\boldsymbol{D_x}$ и среднеквадратичное отклонение $\boldsymbol{\sigma^2}$

Дискретные СВ $$D_x = \sum_i p_i \cdot \left(x_i - M\left[X\right]\right)^2$$

Непрерывные СВ $$D_x = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - M\left[x\right]\right)^2 f\left(x\right) dx$$

$$D_x = \sigma^2$$

Разные дисперсии



Свойства дисперсии

$$\begin{aligned} D[X] &= M\left[(X-m_X)^2\right] = M\left[X^2 - 2Xm_X + m_X^2\right] = \\ &= M[X^2] - 2m_X M[X] + m_X^2 = M[X^2] - m_X^2. \end{aligned}$$

1. $D[C] = 0$, где $C = const$;
2. $D[X] \geqslant 0$;
3. $D[C \cdot X] = C^2 \cdot D[X]$ для любой случайной величины X и произвольного числа C ;
4. $D[X \pm Y] = D[X] + D[Y]$ для независимых случайных величин X и Y.

Свойства среднего квадратического отклонения:

1. $\sigma[C] = 0$, где $C = Const$;

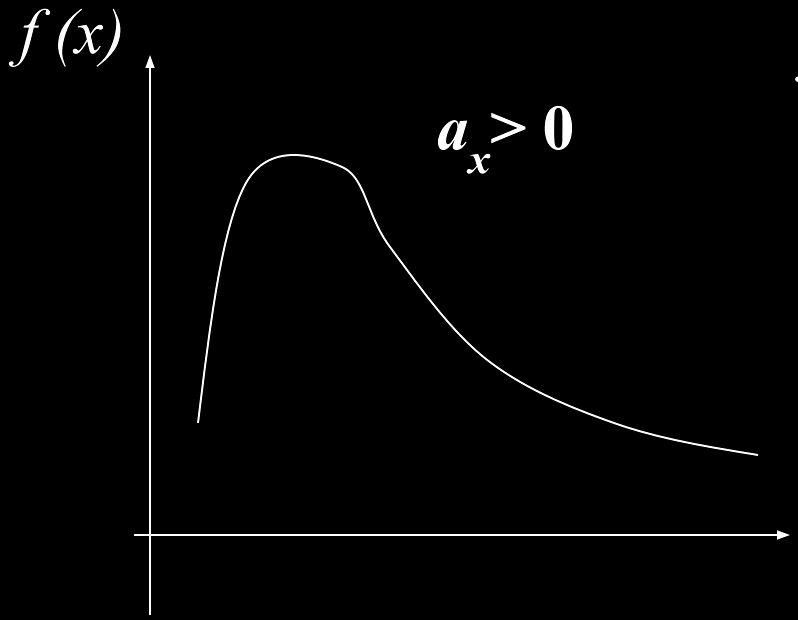
2. $\sigma[C \cdot X] = C \cdot \sigma[X]$;

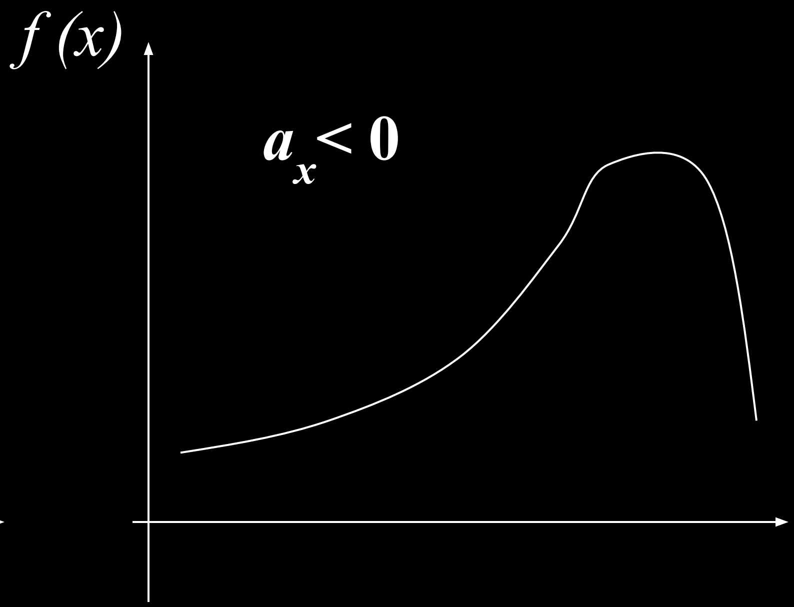
3. $\sigma[X + Y] = \sqrt{\sigma^2[X] + \sigma^2[Y]}$ для независимых случайных величин X и Y.

Параметры формы

- Коэффициент асимметрии

$$a_x = \frac{\mu_3}{\sigma_x^3}$$

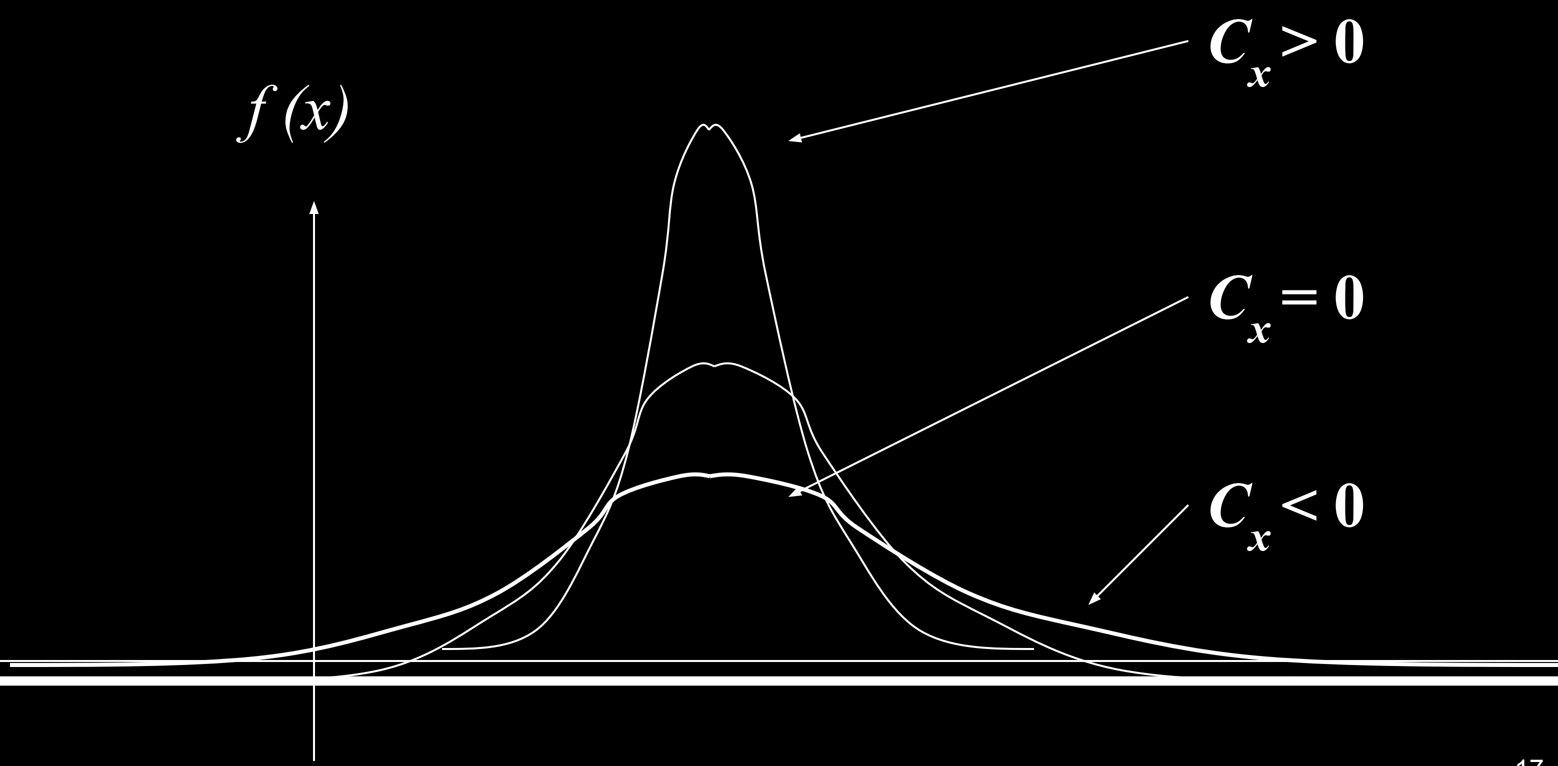




Параметры формы

- Эксцесс

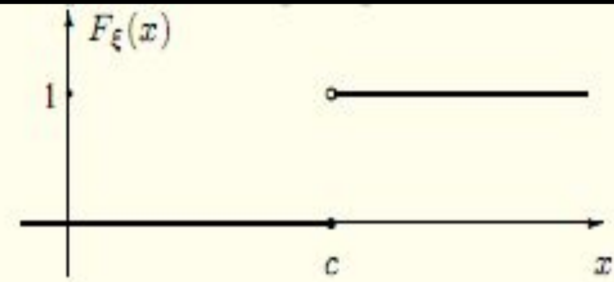
$$C_x = \frac{\mu_4}{\sigma_x^4} - 3$$



Основные распределения и их свойства

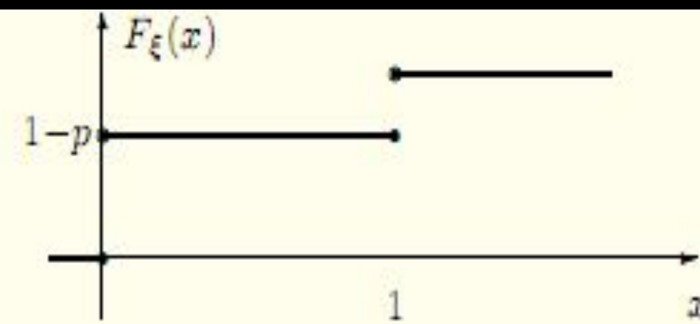
Вырожденное распределение (Распределение константы)

$$F_\xi(x) = \mathsf{P}(\xi < x) = \mathsf{P}(c < x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant c; \\ 1, & x > c. \end{cases}$$



Распределение Бернулли (Распределение индикатора события)

$$F_\xi(x) = \mathsf{P}(\xi < x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0; \\ 1-p, & 0 < x \leqslant 1 \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$



Равномерное распределение

$$F_\xi(x) = \mathsf{P}(\xi < x) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \leqslant x \leqslant b \\ 1, & x > b. \end{cases}$$