

## **5. Числовые характеристики случайных величин**

---

*параметр распределения*

*оценка параметра*

*меры положения (характеристики центра)*

*меры рассеяния (разброса, изменчивости)*

*характеристики формы*

*среднее – центр группирования –  
математическое ожидание*

**взвешенное среднее**

**мода**

**медиана**

**унимодальное и бимодальное  
распределения**

**отклонение от центра**

**асимметрия (skewness)**

**дисперсия (variance)**

**эксцесс**

**среднеквадратическое (стандартное)  
отклонение**

**коэффициент вариации**

**моменты распределения**

**ЗР** исчерпывающе описывают **СВ**  
и позволяют рассчитать вероятности любых  
связанных с ними событий

**Однако:**

- 1) Не всегда необходимы (кто лучше стреляет?)
- 2) Полное описание относительно громоздко  
при естественном стремлении уйти от «много чисел»  
к «всего нескольким»

**Нужен небольшой набор  
чисел,  
которые описывали бы  
СВ лаконично**

*Числовые характеристики [распределения] случайной величины – числа, характеризующие наиболее существенные черты распределения*

*ЧХ*

*по  
происхождению*

*Теоретические* –  
рассматриваемые как  
объективные, истинные  
параметры распределений  
– *детерминированные  
значения*

Статистические  
(выборочные) оценки  
истинных параметров  
– *случайные значения*

И параметры, и их оценки  
разделяют на 3 группы  
– *по существенной черте распределения,*  
которую они выражают

*Меры положения –  
(основной тенденции)*

*Характеристики  
формы*

*Меры рассеяния  
(изменчивости)*

# Характеристики положения

Фиксируют место СВ на числовой оси.  
Это некоторое *среднее значение*,  
*эталон*, место нахождения,  
вокруг которого *группируются* значения СВ

еще называют – «*центр группирования*», **СРЕДНЕЕ**

Используются как *представители СВ* в грубых,  
прикидочных расчетах (например...)

Наиболее важное из средних – математическое  
ожидание

*Математическое ожидание* дискретной величины  
есть *сумма произведений* всех ее значений  
на *вероятности* этих значений

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_m p_m = \sum_{i=1}^m x_i p_i$$

Другие обозначения :  $M_X$ ,  $\mu$ ,  $(E, \eta)$

Примеры

## Примеры

М.о. числа очков, выбиваемых 1-ым стрелком:

$$M(X) = 1 \cdot 0.0 + 2 \cdot 0.2 + 3 \cdot 0.8 = 2.8$$

М.о. числа очков, выбиваемых 2-ым стрелком:

$$M(Y) = 1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.5 + 3 \cdot 0.3 = 2.1$$

Для любой биномиальной **3.0** ины  $M = np$

М.о. числа попаданий при  $n = 4$  выстрелах с вероятностью попасть в каждом  $p = 0.75$  ?



# Математическое ожидание непрерывной СВ

← Примеры на практике

$$M(X) = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} x \cdot f(x) dx$$

dP

или  
в  
общем  
случае

Полезно  
иметь  
представление  
о свойствах  
матожидания

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx$$

# Мода и Медиана

## Другие характеристики центра

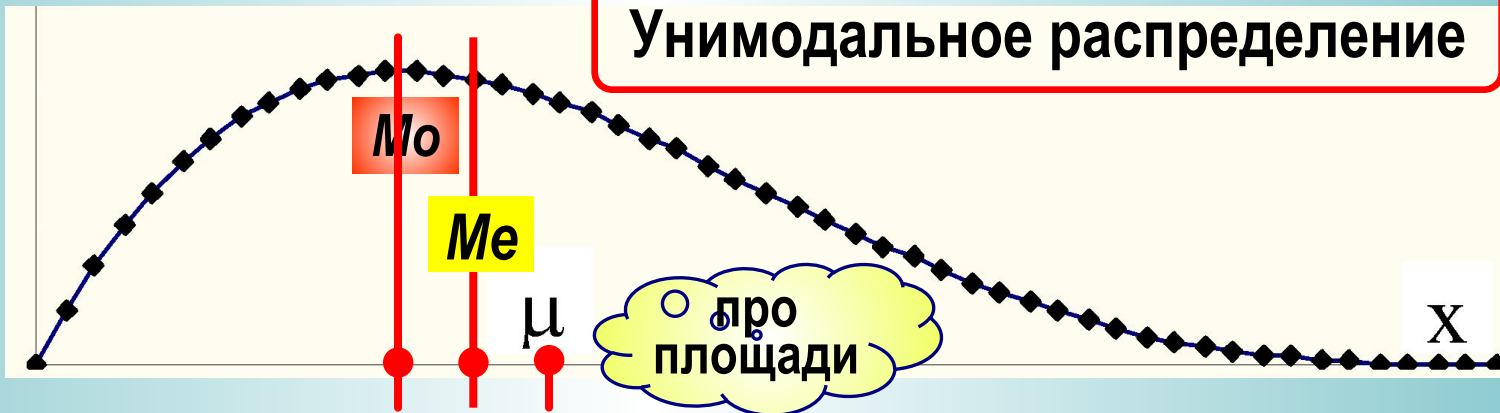
**$M_o$**  – значение величины  $X$ , которому соответствует максимальная плотность распределения.  
Для дискретной  $X$  – наиболее вероятное значение

$$f(M_o) = \max f(x) \quad M_o = x\{p_{i \max}\}, \quad i = 1, \dots, m$$

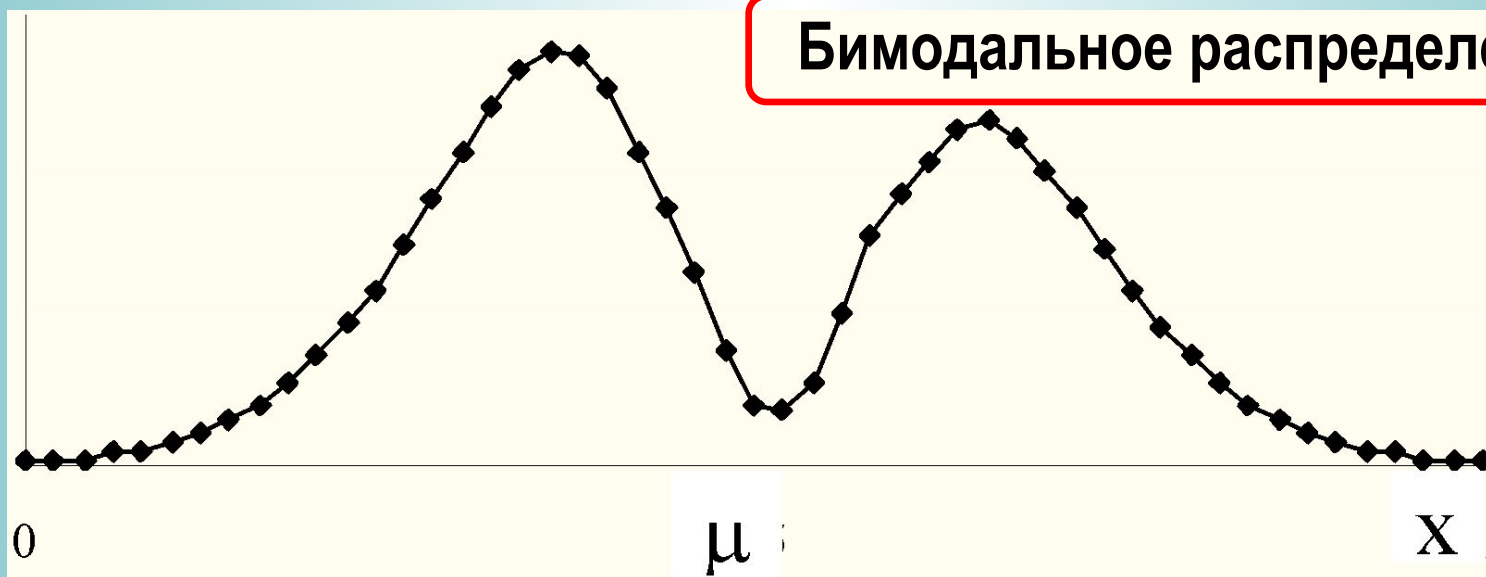
**$M_e$**  – значение величины  $X$ , для которого вероятность меньших значений равна вероятности больших

$$F(M_e) = 0.5$$

## Унимодальное распределение



## Бимодальное распределение



**Рассмотрели характеристики центра:**

**матожидание  $M$  или  $\mu$**

**моду  $Mo$**

**медиану  $Me$**

**Рассматриваем характеристики  
рассеяния – разброса, изменчивости,  
вариации**

# Дисперсия (*Variance*)

$D, \sigma^2, Var \dots$

Указывает, каких отклонений от центра следует ожидать ↓

Матожидание квадрата отклонений от матожидания

$$D(X) = M[(X - M(X))^2]$$

можно записать

Для расчетов:

$$D(X) = M(X)^2 - M^2(X)$$

Дисперсия дискретной СВ:

$$D(X) = \sum_{j=1}^m x_j^2 p_j - M^2(X)$$

Дисперсия  
непрерывной  
СВ:

$$D_X = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - M_X^2$$

$$D_X = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} x^2 f(x) dx - M_X^2$$

Был пример про стрелков:

значения дисперсии показали – 1-ый  
стреляет «кучнее», у него разброс  
попаданий меньше

**Проверьте!**

# Важный пример

Применение общей формулы в случае биномиального распределения

дает:

$$D = n \cdot p \cdot q$$

Например:  
дисперсия количества попаданий  
при 4-х независимых выстрелах и вероятности  
попасть в каждом 0.75 равна

$$D = 4 \cdot 0.75 \cdot 0.25 = 0.75$$



# Пример непрерывной величины

Известно, что плотность распределения  $f(x) = 1/4$  в интервале от 40 до 44.

Тогда:

$$D = \int_{40}^{44} \frac{x^2}{4} dx - 42^2 = \frac{x^3}{12} \Big|_{40}^{44} - 42^2 = \frac{4}{3}$$

# Важный пример

Для любого равномерного распределения:

$$D(X) = \frac{(x_{\max} - x_{\min})^2}{12}$$

Проверьте!  
Получатся ли 4 /  
3 из  
предыдущего  
примера?

Полезно  
иметь  
представление  
о свойствах  
дисперсии

Более естественная мера разброса  $\leftrightarrow$

имеет ту же размерность, что и СВ

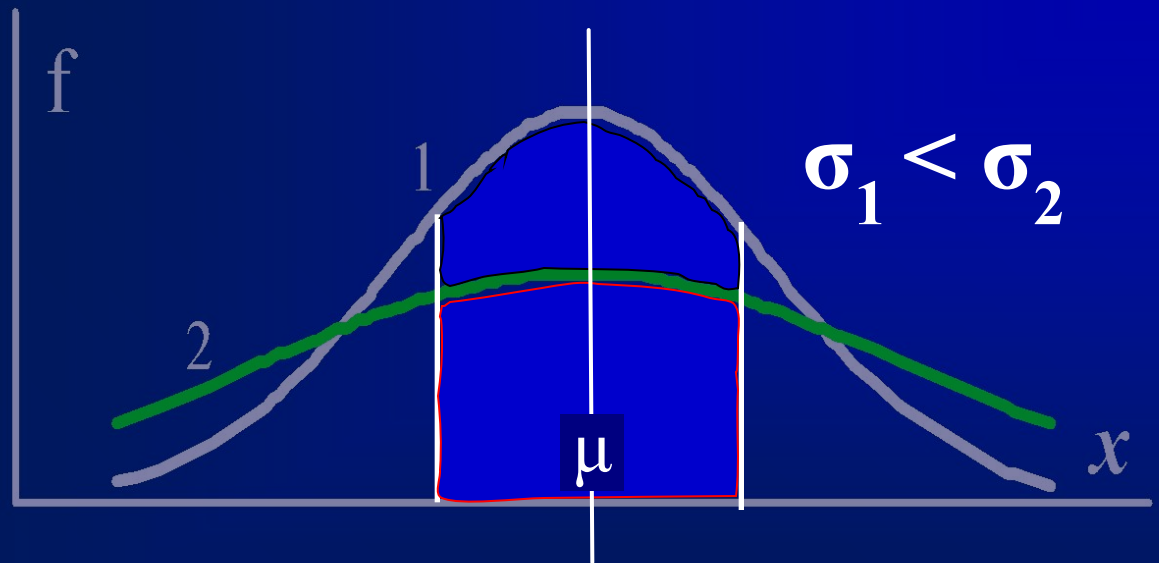
это корень квадратный из дисперсии

$$\sigma = \sqrt{D}$$

среднеквадратическое  
(стандартное)  
отклонение

«Физический смысл»  $\sigma$  :  
показывает, как далеко в среднем  
отдельные значения отклоняются от их центра

«Геометрический смысл»  $\sigma$  и  $D$ :  
характеризуют степень растянутости,  
«размазанности» кривой распределения  
вдоль числовой оси



Чем  $< \sigma$ , тем большая часть значений  
находится вблизи центра распределения

# Отклонения от центра отдельных значений

38  
попугае  
в!

иногда измеряются в «сигмах»

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

нормализованное (стандартизованное)  
отклонение

# Еще одна характеристика изменчивости

*коэффициент вариации*

$$v = \frac{\sigma}{\mu} [100\%]$$

Мера относительного рассеяния →  
полезна при сравнении СВ,  
особенно одних и тех же  
параметров но разных объектов

Пример

Одно и то же стандартное отклонение веса в 0.5 кг  
было бы большим для группы младенцев,  
но очень небольшим для студентов.

Это видно по коэффициенту вариации

$$v (\text{млад}) = 0.5/3.5 > 14\% \quad v (\text{студ}) = 0.5/65 < 0.8\%$$

# Моменты распределения

---

Так называют параметры распределений — по аналогии с механикой

Математическое ожидание  $\mu$  — *начальный момент 1-го порядка*

Дисперсия  $D$  — *центральный момент 2-го порядка*

С моментами более высоких порядков связаны характеристики формы распределения



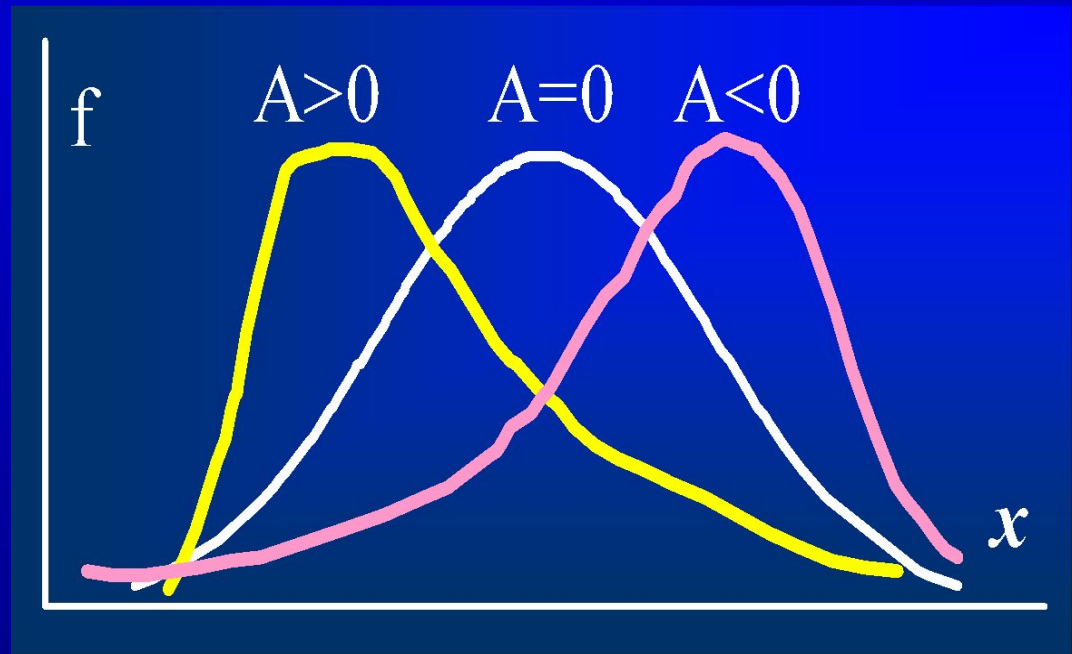
# Коэффициент асимметрии

или просто асимметрия (скошенность)

Обозначается  $A$  (или  $Sk$ )

$$A = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

$\mu_3$  — центральный  
момент  
3-го порядка





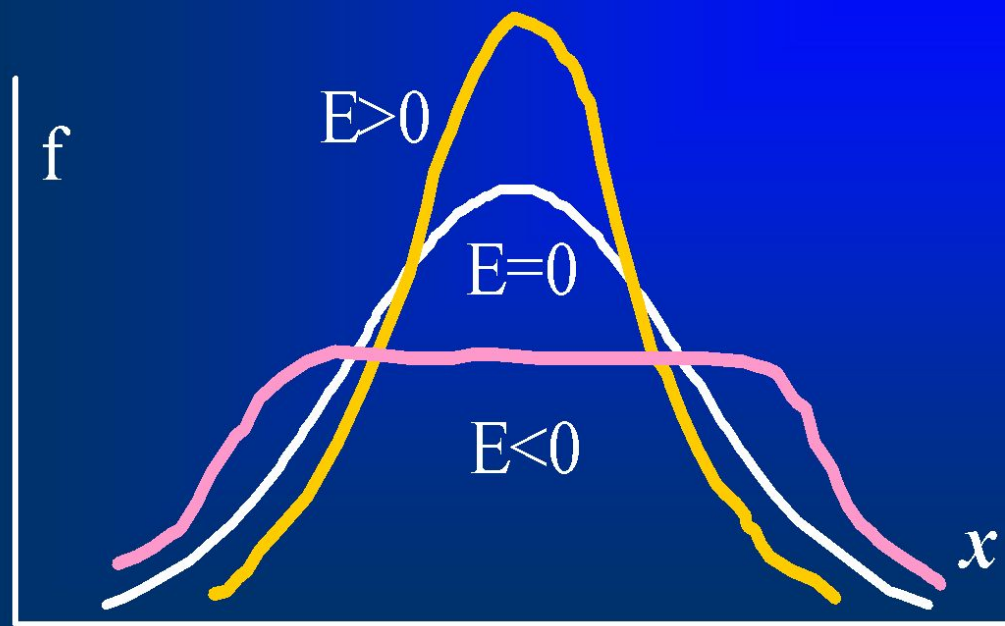
# Коэффициент эксцесса

или просто эксцесс

Что за «3»?  
Обозначается  $E$

$$E = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$$

$\mu_4$  – центральный момент 4-го порядка



*A и E*

ПОЗВОЛЯЮТ СУДИТЬ  
об отклонении распределения

от «стандарта» – нормального закона  
распределения

$T_n$

$e$

$E_n$

$d E_n$