# Неравенства

# Неравенства

Познакомившись с действительными числами, узнав об их свойствах, мы научились проводить различные арифметические операции над ними, такие как алгебраические преобразования выражений или решение уравнений. Настало время неравенств.

# Неравенства

- Свойства числовых неравенств
- Решение линейных неравенств

# КОНЕЦ

[Сначала]

# $X \gtrless Y$

# свойства

Недавно мы ввели понятие числового неравенства:

$a<b$ – это значит, что $a-b$ - положительное число;

$a<b$ – это значит, что $a-b$ – отрицательное число.

Числовые неравенства обладают рядом свойств, знание которых поможет нам в дальнейшем работать с неравенствами.

# Для чего нужно?

Для чего нужно уметь решать уравнения, вы знаете: до сих пор математическая модель практически любой реальной ситуации, которую мы рассматривали, представляла собой либо уравнение, либо систему уравнений. На самом деле встречаются и другие математические модели — неравенства, просто мы пока таких ситуаций избегали.

# Для чего нужно?

Знание свойств числовых неравенств будет полезно и для исследования функций. Например, с неравенствами связаны такие известные вам свойства функций, как наибольшее и наименьшее значения функции на некотором промежутке, ограниченность функции снизу или сверху. С неравенствами связано и свойство возрастания или убывания функции, о котором пойдет речь в одном из следующих параграфов. Так что, как видите, без знания свойств числовых неравенств нам не обойтись. Да мы сами уже могли убедиться в необходимости умения работать с неравенствами.

# Свойство 1

Если $a>b$ и $b>c$ , то $a>c$.

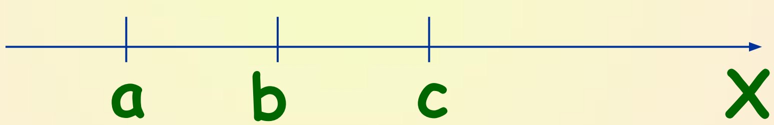
***Доказательство:***

По условию, $a>b$, т.е. $a-b$ — положительное число. Аналогично, так как $b>c$, делаем вывод, что $b-c$ — положительное число.

Сложив положительные числа $a-b$ и $b-c$, получим положительное число. Имеем $(a-b)+(b-c)=a-c$. Значит, $a-c$ — положительное число, т.е. $a>c$, что и требовалось доказать.

# Свойство 1

Свойство 1 можно обосновать, используя геометрическую модель множества действительных чисел, т.е. числовую прямую. Неравенство **a>b** означает, что на числовой прямой точка **a** расположена правее точки **b**, а неравенство **b>c** — что точка **b** расположена правее точки **c** . Но тогда точка **a** расположена на прямой правее точки с, т. е. **a > c**.



# Свойство 2

Если **$a>b$**, **то $a+c>b+c$** .

То есть, если к обеим частям неравенства прибавить одно и то же действительное число, то знак уравнения не меняется.

# Свойство 3

Если **$a>b$** и **$m>0$**, то **$am>bm$**;

Если **$a>b$** и **$m<0$**, то **$am<bm$**.

Смысл свойства 3 заключается в следующем: если обе части неравенства умножить на одно и то же положительное число, то знак неравенства следует сохранить. Если обе части неравенства умножить на одно и то же отрицательное число, то знак неравенства следует изменить (**<**на**>**,**>**на**<**).

# Свойство 3

Если **a>b** и **m>0**, то **am>bm**;

Если **a>b** и **m<0**, то **am<bm**.

То же относится к делению обеих частей неравенства на одно и то же положительное или отрицательное число **m**, то поскольку деление на **m** всегда можно заменить умножением на **1/m** .

# Свойство 3

Из свойства 3, в частности, следует, что, умножив обе части неравенства $\mathbf{a>b}$ на $\mathbf{-1}$, получим $\mathbf{-a<-b}$. Это значит, что если изменить знаки у обеих частей неравенства, то надо изменить и знак неравенства: если $\mathbf{a>b}$, то $\mathbf{-a<-b}$.

# Свойство 4

Если **$a>b$** и **$c>d$**, то **$a+c>b+d$**.

**Доказательство:**

Так как **$a>b$**, то, согласно свойству 2, **$a+c>b+c$**. Аналогично, так как **$c>d$**, то **$b+c>b+d$**. Итак, **$a+c>b+c$**, **$b+c>b+d$**. Тогда, в силу свойства 1, получаем, что **$a+c>b+d$**.

# Свойство 5

Если **a**, **b**, **c**, **d** – положительные числа, и **a>c**, **c>d**,то **ac>bd**.

**Доказательство:**
Так как **a>b** и **c>0**, то **ac> bc**. Аналогично, так как **c>b** и **b>0**, то **cb>ab**. Итак, **ac>bc**, **bc>bd**. Тогда, согласно свойству 1, получаем, что **ac>bd**.

# Свойство 6

Если $a$ и $b$ — неотрицательные числа и $a>b$, то $a$ в степени $n$ > $b$ в степени $n$, где $n$ — любое натуральное число.

Смысл свойства 6 заключается в следующем: если обе части неравенства — неотрицательные числа, то их можно возвести в одну и ту же натуральную степень, сохранив знак неравенства.

# Смысл неравенства

Обычно неравенства вида **$a>b$**, **$c>d$** (или **$a<b$**, **$c<d$**) называют неравенствами одинакового смысла, а неравенства **$a>b$** и **$c>d$** – неравенствами противоположного смысла. Свойство 5 означает, что при умножении неравенств одинакового смысла, у которых левые и правые части — положительные числа, получится неравенство того же смысла.

[Оглавление](#)

# Решение линейных неравеств

# Решение неравенства с переменной

$ax+b<y$

Свойства числовых равенств помогали нам решать уравнения, т.е. находить те значения переменной, при которых уравнение обращается в верное числовое равенство. Точно так же свойства числовых неравенств помогут нам решать **неравенства с переменной**, т. е. находить те значения переменной, при которых неравенство с переменной обращается в верное числовое неравенство. Каждое такое значение переменной называют обычно **решением неравенства с переменной.**

# Пример

$ax+b<y$

Рассмотрим, например, неравенство: **$2x+5<7$**. Подставив вместо **$x$** значение **0**, получим **$5<7$** - верное неравенство; значит, **$x=0$** — решение данного неравенства. Подставив вместо **$x$** значение **1**, получим **$7<7$** - неверное неравенство; поэтому **$x=1$** не является решением данного неравенства. Подставив вместо **$x$** значение **$-3$**, получим **$-6+5<7$**, т. е. **$-1<7$** - верное неравенство; следовательно, $x=-1$ - решение данного неравенства. Подставив вместо **$x$** значение **2,5**, получим **$2*2,5+5<7$**, т.е. **$10<7$** - неверное неравенство. Значит, $x=2,5$ не является решением неравенства.

# Пример

$ax+b<y$

Но вы же понимаете, что это — тупиковый путь: ни один математик не станет так решать неравенство, ведь все числа невозможно перебрать! Вот тут-то и нужно использовать свойства числовых неравенств, рассуждая следующим образом.

# Пример

$ax+b<y$

Нас интересуют такие числа **x**, при которых **$2x+5<1$** - верное числовое неравенство. Но тогда и **$2x+5-5<7-5$** - верное неравенство (согласно **свойству 2**: к обеим частям неравенства прибавили одно и то же число **– 5**). Получили более простое неравенство **$2x<2$**. Разделив обе его части на положительное число **2**, получим (на основании **свойства 3**) верное неравенство **$x<1$**.

# Пример

$ax+b<y$

Что это значит? Это значит, что решением неравенства является любое число **x**, которое меньше **1**. Эти числа заполняют открытый луч (**-∞,1**). Обычно говорят, что этот луч — решение неравенства **2x+5<7** (точнее было бы говорить о множестве решений, но математики, как всегда, экономны в словах). Таким образом, можно использовать два варианта записи решений данного неравенства: **x<1** или (**-∞,1**).

# Решение неравенств

$ax+b<y$

Свойства числовых неравенств позволяют руководствоваться при решении неравенств следующими правилами:

# Правило 1

$ax+b<y$

Любой член неравенства можно перенести из одной части неравенства в другую с противоположным знаком, не изменив при этом знак неравенства.

# Правило 2

$ax+b<y$

Обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то же положительное число, не изменив при этом знак неравенства.

# Правило 3

$ax+b<y$

Обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, изменив при этом знак неравенства на противоположный.

Оглавление