

Числовые неравенства

и их свойства.

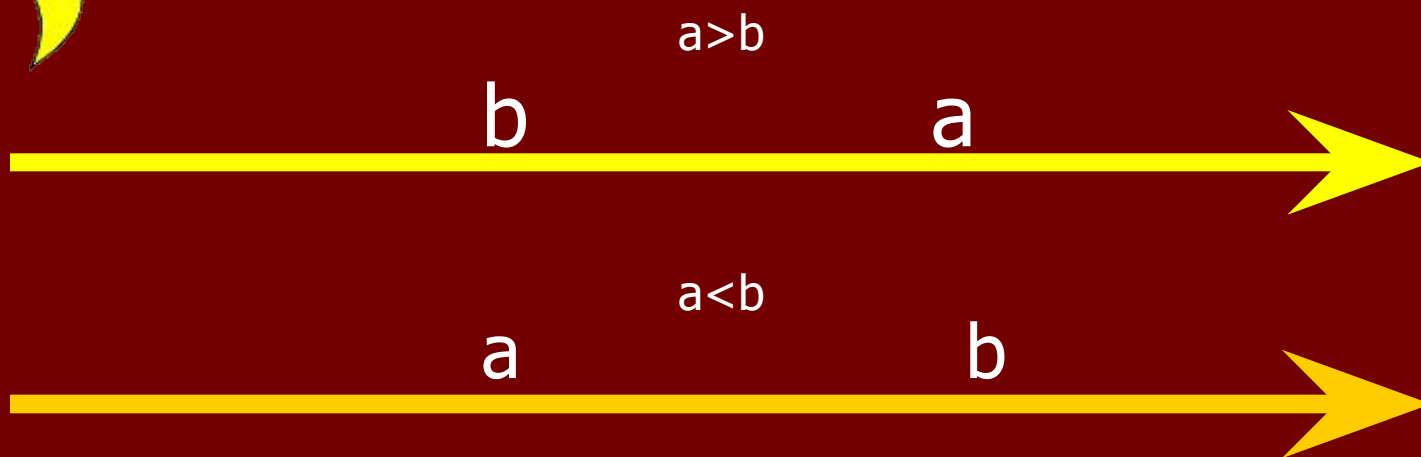
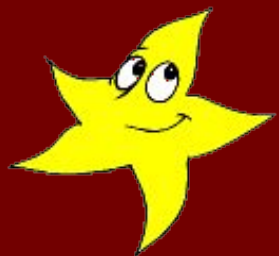


Гимназия № 19 г. Минск. Учитель математики

Виктор Иванович Синявский.

Для любых неравных действительных чисел a и b можно сказать, какое больше, а какое меньше.

$a > b \Rightarrow a - b > 0$; если $a - b < 0$, то $a < b$



Знаки неравенств



- Строгие неравенства:

$$A > B, \quad 67 > 35$$

$$d < c, \quad 1993 < 2005$$

- Нестрогие неравенства:

$$E \geq P, \quad E \text{ больше или равно } P$$

(E не меньше P);

$$K \leq M, \quad K \text{ меньше или равно } M$$

(K не больше M).

Двойные неравенства:

- Двойное неравенство $a < b < c$ верно, если одновременно верны два неравенства $a < b$ и $b < c$, и неверно в противном случае.
- Двойное неравенство $d > e > f$ верно, если ...

Пример: что больше

99^{20} или 9999^{10} ?



Докажите, что

$$99^{20} < 9999^10$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} 99^{20} - 9999^{10} &= 99^{10} \times 99^{10} - (99 \times 101)^{10} = \\ &= 99^{10} \times 99^{10} - 99^{10} \times 101^{10} = 99^{10} (99^{10} - 101^{10}) < 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $99^{20} < 9999^{10}$

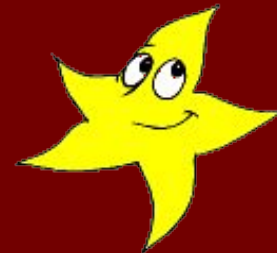
СВОЙСТВО 1.

Если $a < b$, то $b > a$; если $a > b$, то $b < a$.

Доказательство:

Если $a < b$, то разность $a - b$ - отрицательное число. Тогда $b - a$ - положительное число, т.е. $b > a$.

Наоборот, если $a > b$, то...



СВОЙСТВО 2.

Если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$.

Доказательство. К разности $a - c$ прибавим числа b и $-b$ и сгруппируем

слагаемые: $a - c = a - c + b - b = (a - b) + (b - c)$.

Посмотрите на условие и сделайте вывод.

СВОЙСТВО 3.

Если $a < b$ и c – любое действительное число, то $a + c < b + c$.

Доказательство. Рассмотрим разность $(a + c) - (b + c) = \dots$

Раскройте скобки, упростите и сделайте вывод.

Если к обеим частям верного неравенства прибавить одно и то же число, то...

Следствие

- Любое число можно перенести из одной части неравенства в другую с противоположным знаком.

СВОЙСТВО 4.

Если $a < b$ и c – положительное число, то $ac < bc$. Если $a < c$ и c – отрицательное число, то $ac > bc$.

Доказательство. Рассмотрите разность $ac - bc = c(a - b)$ и сделайте выводы.



Выводы:

- ⇒ Если обе части верного неравенства умножить на одно и то же положительное число и сохранить знак исходного неравенства, то получится верное неравенство;
- ⇒ Если обе части верного неравенства умножить на отрицательное число, то знак неравенства нужно поменять на противоположный.

Следствие.

Если a и b – положительные числа и $a < b$, то

$$\frac{1}{a} > \frac{1}{b}.$$

Разделим обе части неравенства $a < b$ на положительное число ab и, сократив дроби, посмотрим на результат.

СВОЙСТВО 5.

Если $a < b$ и $c < d$, то $a + c < b + d$.

Доказательство. Так как $a < b$, то

$a + c < b + c$; $c < d$ следовательно

$b + c < b + d$,

а теперь посмотрите свойство 2.

Если сложить почленно два верных неравенства одного знака и знак неравенства сохранить, то получим...

СВОЙСТВО 6.

Если $a < b$ и $c > d$, то $a - c < b - d$.

Доказательство. Так как $c > d$, то $-c < -d$.

Но по свойству 5: $a < b$

+

$-c < -d$

$a - c < b - d$ ч.т.д.

Вывод:



Два верных неравенства
противоположного знака
можно почленно вычитать,
оставляя знак того неравенства,
из которого вычитали
другое неравенство.

СВОЙСТВО 7

Если a, b, c, d – положительные числа, $a < b$ и $c < d$, то $ac < bd$.

Доказательство. Так как $a < b$ и $c > 0$, то $ac < bc$, $c < d$, $b > 0$, следовательно $bc < bd$.

Смотрим второе свойство и делаем вывод!



Итак,

Если перемножить почленно
два верных неравенства **одного знака**,
левые и правые части которых
положительные числа,
то получится верное неравенство,
имеющее тот же знак,
что и данное неравенство.

Следствия из седьмого свойства:

Следствие 1. Если
 $0 < a < b$, то

$$a^n < b^n, n \in \mathbb{N}.$$

Следствие 2. Если
 $0 < a < b$, то

$$\sqrt{a} < \sqrt{b}.$$



Какие появились вопросы?



На ЭТОМ мы и закончим

наш
сегодняшний
урок

