

# Числовые ряды

Лекции 10,11

# Определение числового ряда

Рассмотрим некоторую числовую последовательность  $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ .

Составим из членов этой последовательности бесконечную сумму

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$$

**Определение.** Выражение (1)

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

называется числовым рядом,  $u_n$  - общий член ряда.

# Примеры

- Рассмотрим ряд  $1-1+1-1+\dots+(-1)^n+\dots$
- Очевидно, сумма четного числа его членов равна нулю, а нечетного – единице. Такой ряд не имеет суммы.

# Примеры

Известно, что геометрическая прогрессия со знаменателем, меньшим единицы,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$  сходится, если  $|a_n| < 1$ .

# Понятие сходящегося ряда

**Опр.** Конечные суммы  $S_1 = u_1$ ,  $S_2 = u_1 + u_2$

$S_3 = u_1 + u_2 + u_3, \dots, S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n \dots$   
называются частичными суммами ряда (1).

**Опр.** Если существует конечный  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ ,

то числовой ряд называется сходящимся, а число  $S$  - суммой ряда. Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  равен

бесконечности или вообще не существует, то ряд расходится.

# Пример сходящегося ряда

Показать, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$  сходится и найти его сумму.

Общий член ряда  $u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ .

Тогда  $u_1 = 1 - \frac{1}{2}$ ,  $u_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ ,  $u_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ , ...

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

# Свойства сходящихся рядов

1) Сходящиеся ряды можно почленно складывать, т.е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$$

2) Постоянный множитель можно вынести за знак ряда, т. е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} cu_n = c \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

# Свойства сходящихся рядов

От сходящегося ряда можно отбросить конечное число членов или наоборот прибавить конечное число слагаемых и при этом сходимость ряда не изменится.



# Гармонический ряд

Исследуем ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ , называемый гармоническим.

Для решения задачи запишем гармонический ряд в развернутом виде:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{32} + \dots$$

и наряду с ним рассмотрим ряд с меньшими членами

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{16^2} + \dots + \frac{1}{16^2} + \frac{1}{32^2} + \dots + \frac{1}{32^2} + \dots$$

# Продолжение

Найдем частичные суммы второго ряда:

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2}; \quad S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2};$$

$$S_8 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + 3 \cdot \frac{1}{2};$$

$$S_{16} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + 4 \cdot \frac{1}{2}$$

$$S_{2^n} = 1 + n \cdot \frac{1}{2}$$

Итак,

гармонический ряд расходится, т. к. его сумма больше суммы вспомогательного ряда.

# Признаки сходимости ряда

*Необходимое условие сходимости ряда.*

Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  сходится, то  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ .

Если же  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$ , то ряд расходится.

# Пример расходящегося ряда

Пример 1. Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5n+1}$  расходится, так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{5n+1} = \frac{1}{5} \neq 0 \quad .$$

# Знакоположительные ряды

# Признак сравнения.

Пусть даны ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$   
Если ряд с большими членами сходится, то сходится и ряд с меньшими членами. Если же ряд с меньшими членами расходится, то расходится и ряд с большими членами.

# Признак сравнения в предельной форме

Если существует конечный и отличный от нуля  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = A$ , то

ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  сходятся или

расходятся одновременно.

# Примеры

В качестве рядов для сравнения берут гармонический ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ , который

расходится, и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  или  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ , о которых известно, что первый сходится, а второй при  $p > 1$  сходится, а при  $p \leq 1$  расходится.



# Примеры

Исследовать на сходимость ряды

а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 4}$  и б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$  .

Найдем предел отношения членов данного ряда и ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ , с которым сравниваем данный ряд.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot n^2}{(n^2 + 1) \cdot 1} = 1. \text{ Ряд сходится.}$$

# Примеры

Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$  сравниваем с гармоническим рядом  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ .

Так как  $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n}$ , то данный ряд расходится вместе с гармоническим рядом.

# Признак Даламбера

Если существует конечный  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$

то

1) при  $\rho < 1$  ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ , где  $u_n > 0$ ,  
сходится,

2) при  $\rho > 1$  ряд расходится,

3) при  $\rho = 1$  признак ответа не дает.

# Примеры

Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{e^n}$

Так как  $u_n = \frac{2n}{e^n}$ , то  $u_{n+1} = \frac{2(n+1)}{e^{n+1}}$  и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)e^n}{e^{n+1}2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{en} = \frac{1}{e} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{e} .$$

Так как  $\frac{1}{e} < 1$ , то данный ряд сходится.

# Признак Коши

Если существует конечный  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$ ,

1) при  $\rho < 1$  ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  сходится, где  $u_n > 0$ ,

2) при  $\rho > 1$  ряд расходится,

3) при  $\rho = 1$  признак ответа не дает.

# Примеры

Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{n+2}\right)^n$  исследуем с помощью признака Коши.

Вычислим  $\sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{3n+1}{n+2}\right)^n} = \frac{3n+1}{n+2}$  .

Тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{n+2} = 3 > 1$   
и ряд согласно признаку Коши расходится.

# Интегральный признак

Пусть члены ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  положительны и  $u_n > u_{n+1}$  при  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Пусть функция  $f(x)$  при  $x = n$  имеет значения  $f(n) = u_n$ , положительна и монотонно убывает при  $x > 1$ . Тогда числовой ряд сходится или расходится вместе с несобственным интегралом

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx$$

# Обобщенный гармонический ряд

Исследуем ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  .

Функция  $f(x) = \frac{1}{x^p}$  монотонно убывает.

Несобственный интеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \int_1^{\infty} x^{-p} dx = \left. \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right|_1^{\infty} = \frac{1}{1-p} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x^{p-1}} - 1 \right) =$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & p > 1 \\ \infty, & p < 1 \end{cases}$$

.Ряд расходится при  $p < 1$   
и сходится при  $p > 1$  .



# Пример

Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}} \quad . \text{ Члены ряда } u_n = \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$$

положительны и монотонно убывают.

Функция  $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}$ , очевидно, также

положительна при  $x \geq 2$  и монотонно убывает.

# Продолжение

$$\begin{aligned}\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_2^b \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{d(\ln x)}{\sqrt{\ln x}} = \lim_{b \rightarrow +\infty} 2\sqrt{\ln x} \Big|_2^b = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} 2\sqrt{\ln b} - 2\sqrt{\ln 2} = +\infty \quad \cdot\end{aligned}$$

Несобственный интеграл, а вместе с ним и числовой ряд расходятся.

# Знакопеременные ряды

# Признак Лейбница

Пусть члены знакочередующегося ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n-1} u_n + \dots$$

удовлетворяют условиям:

1)  $u_1 > u_2 > u_3 > \dots > u_n > \dots$

и 2)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

Тогда знакочередующийся ряд

сходится, причём его сумма  $S$  не

превосходит его первого члена, т.е.  $S < u_1$

# Примеры

Исследовать на сходимость ряды:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n+1} \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n+2} .$$

1) Члены знакопередающегося ряда

$$u_1 = \frac{1}{2}, u_2 = \frac{1}{3}, u_3 = \frac{1}{4}, \dots, u_{n+1} = \frac{1}{n+1}, \dots$$

монотонно убывают и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Согласно признаку Лейбница ряд  
сходится.

# Примеры

2) общий член ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n+2}$   
не стремится к нулю, так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+2} = 1$$

Следовательно, ряд расходится  
согласно необходимому признаку.

# Достаточный признак сходимости знакопеременного ряда

Если сходится ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ , то

знакопеременный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  также  
сходится.

# Абсолютно сходящийся ряд

## *Определение.*

Если сходится ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ , то знакопеременный ряд называется абсолютно сходящимся.



# Условно сходящийся ряд

## *Определение.*

Если сходится ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ , а ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  расходится, то знакопеременный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  называется условно сходящимся.

# Пример

Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$  абсолютно сходится, т.к. ряд из модулей его членов  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  сходится. Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n+1}$  сходится условно, т.к. он согласно признаку Лейбница сходится, но ряд из модулей его членов, т.е. ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$  расходится вместе с гармоническим рядом .

# Остаток ряда и его оценка

**Определение.** Если числовой ряд сходится, то разность  $R_n = S - S_n$  называется  $n$ -м остатком ряда. Таким образом,  $R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots$  представляет собой сходящийся ряд.

При этом  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S - S_n) = S - S = 0$  .

**Теорема.** Если знакочередующийся ряд сходится, то  $|R_n| < u_{n+1}$  .