Числовые ряды

Лекции 10,11

Определение числового ряда

Рассмотрим некоторую числовую последовательность $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$.
Составим из членов этой последовательности бесконечную сумму

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

Определение. Выражение (1)

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

называется числовым рядом, u_n - общий член ряда.

Примеры

- Рассмотрим ряд1-1+1-1+…+ $(-1)^n$+…
- Очевидно, сумма четного числа его членов равна нулю, а нечетного – единице. Такой ряд не имеет суммы.

Примеры

Известно, что геометрическая прогрессия со знаменателем, меньшим единицы, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + .. + a_n + ...$ сходится, если $|a_n| < 1.$

Понятие сходящегося ряда

Опр. Конечные суммы $S_1 = u_1$ $, S_2 = u_1 + u_2$

$$S_3 = u_1 + u_2 + u_3, \ldots, S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n \ldots$$

называются частичными суммами ряда (1).

Опр. Если существует конечный $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$,

то числовой ряд называется сходящимся, а число S - суммой ряда. Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ равен бесконечности или вообще не существует, то ряд расходится.

Пример сходящегося ряда

Показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$ сходится и найти его сумму.

Общий член ряда $u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

Тогда $u_1 = 1 - \frac{1}{2}$, $u_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$, $u_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$,…

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

$$+ \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}, \quad \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

Свойства сходящихся рядов

1) Сходящиеся ряды можно почленно складывать, т.е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n).$$

2) Постоянный множитель можно вынести за знак ряда, т. е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} c u_n = c \sum_{n=1}^{\infty} u_n .$$

Свойства сходящихся рядов

От сходящегося ряда можно отбросить конечное число членов или наоборот прибавить конечное число слагаемых и при этом сходимость ряда не изменится.

Гармонический ряд

Исследуем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, называемый гармоническим.

Для решения задачи запишем гармонический ряд в развернутом виде:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{32} + \ldots$$

и наряду с ним рассмотрим ряд с меньшими членами

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots + \frac{1}{32} + \ldots$$

Продолжение

Найдем частичные суммы второго ряда:

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2}; \quad S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2};$$

$$S_8 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + 3 \cdot \frac{1}{2};$$

$$S_{16} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + 4 \cdot \frac{1}{2}$$

$$S_{2^n} = 1 + n \cdot \frac{1}{2}.$$

Итак, гармонический ряд расходится, т. к. его сумма больше суммы вспомогательного ряда.

Признаки сходимости ряда

Необходимое условие сходимости ряда.

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Если же $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд расходится.

Пример расходящегося ряда

Пример 1. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5n+1}$ расходится, так как

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{5n+1} = \frac{1}{5} \neq 0 \qquad .$$

Знакоположительные ряды

Признак сравнения.

Пусть даны ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

Если ряд с большими членами сходится, то сходится и ряд с меньшими членами. Если же ряд с меньшими членами расходится, то расходится и ряд с большими членами.

Признак сравнения в предельной форме

Если существует конечный и отличный от нуля $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=A$, то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ сходятся или расходятся одновременно.

Примеры

В качестве рядов для сравнения берут гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, который

расходится, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ или $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$,о которых известно, что первый сходится, а второй при p>1сходится, а при p≤1 расходится.

Примеры

Исследовать на сходимость ряды

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4}$ и б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Найдем предел отношения членов данного ряда и ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$,с которым сравниваем данный ряд.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1\cdot n^2}{(n^2+1)\cdot 1}=1$. Ряд сходится.

Примеры

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ сравниваем с гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

Так как $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n}$, то данный ряд расходится вместе с гармоническим рядом.

Признак Даламбера

Если существует конечный $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\square$ то

1)при $\square<1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, где $u_n>0$, сходится,

2)при $\square>1$ ряд расходится,

3)при $\square=1$ признак ответа не дает.

Примеры

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{e^n}$

Так как $u_n = \frac{2n}{e^n}$, то $u_{n+1} = \frac{2(n+1)}{e^{n+1}}$ и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)e^n}{e^{n+1}2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{en} = \frac{1}{e} \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{e}.$$

Так как $\frac{1}{e} < 1$, то данный ряд сходится.

Признак Коши

Если существует конечный $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=e$, то

1) при $e<1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, где $u_n>0$, сходится,

2) при $e>1$ ряд расходится,

3) при $e=1$ признак ответа не дает.

Примеры

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{n+2}\right)^n$ исследуем с помощью признака Коши.

Вычислим $\sqrt[n]{u_n}=\sqrt[n]{\left(\frac{3n+1}{n+2}\right)^n}=\frac{3n+1}{n+2}$.

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{n+2}=3>1$

и ряд согласно признаку Коши расходится.

Интегральный признак

Пусть члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ положительны и $u_n > u_{n+1}$ при $\forall n \in N$. Пусть функция $f(x)$ при $x = n$ имеет значения $f(n) = u_n$, положительна и монотонно убывает при $x > 1$. Тогда числовой ряд сходится или расходится вместе с несобственным интегралом

$$\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx$$

Обобщенный гармонический ряд

Исследуем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$.

Функция $f(x)=\frac{1}{x^p}$ монотонно убывает.

Несобственный интеграл

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}=\int_1^{\infty}x^{-p}dx=\left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_1^{\infty}=\frac{1}{1-p}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^{p-1}}-1\right)=$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{p-1}, & p>1\\ \infty, & p<1\end{cases}$$

.Ряд расходится при p<1 и сходится при p>1 .

Пример

Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$$

. Члены ряда $u_n = \dfrac{1}{n\sqrt{\ln n}}$

положительны и монотонно убывают. Функция $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{\ln x}}$, очевидно, также

положительна при $x \geq 2$ и монотонно убывает.

Продолжение

$$\int_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}=\lim_{b\to+\infty}\int_{2}^{b}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}=\lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b}\frac{d(\ln x)}{\sqrt{\ln x}}=\lim_{b\to+\infty}2\sqrt{\ln x}\Big|_{2}^{b}=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}2\sqrt{\ln b}-2\sqrt{\ln 2}=+\infty\ .$$

Несобственный интеграл, а вместе с ним и числовой ряд расходятся.

Знакопеременные ряды

Признак Лейбница

Пусть члены знакочередующегося ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n-1}u_n + \ldots$$

удовлетворяют условиям:

1) $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots > u_n > \ldots$

и 2) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0.$

Тогда знакочередующийся ряд сходится, причём его сумма S не превосходит его первого члена, т.е. $S < u_1$.

Примеры

Исследовать на сходимость ряды:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n+1}$, 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n+2}$.

1) члены знакочередующегося ряда

$$u_1=\frac{1}{2},u_2=\frac{1}{3},u_3=\frac{1}{4},\ldots,u_{n+1}=\frac{1}{n+1},\ldots$$

монотонно убывают и $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$.

Согласно признаку Лейбница ряд сходится.

Примеры

2) общий член ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n+2}$ не стремится к нулю, так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+2}=1$$

Следовательно, ряд расходится согласно необходимому признаку.

Достаточный признак сходимости знакопеременного ряда

Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, то

знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ также сходится.

Абсолютно сходящийся ряд

Определение.

Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, то знакопеременный ряд называется абсолютно сходящимся.

Условно сходящийся ряд

Определение.

Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ расходится, то знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется условно сходящимся.

Пример

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$ абсолютно сходится, т.к. ряд из модулей его членов $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n+1}$ сходится условно, т.к. он согласно признаку Лейбница сходится, но ряд из модулей его членов, т.е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ расходится вместе с гармоническим рядом .

Остаток ряда и его оценка

Определение. Если числовой ряд сходится, то разность $R_n = S - S_n$ называется *n*-м остатком ряда. Таким образом, $R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots$ представляет собой сходящийся ряд. При этом $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = \lim\limits_{n\to\infty}(S - S_n) = S - S = 0$.

Теорема. Если знакочередующийся ряд сходится, то $\left|R_n\right| < u_{n+1}$.

ВГУЭС