

Числовые ряды

Лекции 10,11

Определение числового ряда

Рассмотрим некоторую числовую последовательность $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$.

Составим из членов этой последовательности бесконечную сумму

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$$

Определение. Выражение (1)

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

называется числовым рядом, u_n - общий член ряда.

Примеры

- Рассмотрим ряд $1-1+1-1+\dots+(-1)^n+\dots$
- Очевидно, сумма четного числа его членов равна нулю, а нечетного – единице. Такой ряд не имеет суммы.

Примеры

Известно, что геометрическая прогрессия со знаменателем, меньшим единицы, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ сходится, если $|a_n| < 1$.

Понятие сходящегося ряда

Опр. Конечные суммы $S_1 = u_1$, $S_2 = u_1 + u_2$

$S_3 = u_1 + u_2 + u_3, \dots, S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n \dots$
называются частичными суммами ряда (1).

Опр. Если существует конечный $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$,

то числовой ряд называется сходящимся, а число S - суммой ряда. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ равен

бесконечности или вообще не существует, то ряд расходится.

Пример сходящегося ряда

Показать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$ сходится и найти его сумму.

Общий член ряда $u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

Тогда $u_1 = 1 - \frac{1}{2}$, $u_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$, $u_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$, ...

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

Свойства сходящихся рядов

1) Сходящиеся ряды можно почленно складывать, т.е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$$

2) Постоянный множитель можно вынести за знак ряда, т. е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} cu_n = c \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

Свойства сходящихся рядов

От сходящегося ряда можно отбросить конечное число членов или наоборот прибавить конечное число слагаемых и при этом сходимость ряда не изменится.

Гармонический ряд

Исследуем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, называемый гармоническим.

Для решения задачи запишем гармонический ряд в развернутом виде:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{32} + \dots$$

и наряду с ним рассмотрим ряд с меньшими членами

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{16^2} + \dots + \frac{1}{16^2} + \frac{1}{32^2} + \dots + \frac{1}{32^2} + \dots$$

Продолжение

Найдем частичные суммы второго ряда:

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2}; \quad S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2};$$

$$S_8 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + 3 \cdot \frac{1}{2};$$

$$S_{16} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + 4 \cdot \frac{1}{2}$$

$$S_{2^n} = 1 + n \cdot \frac{1}{2}$$

Итак,

гармонический ряд расходится, т. к. его сумма больше суммы вспомогательного ряда.

Признаки сходимости ряда

Необходимое условие сходимости ряда.

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

Если же $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, то ряд расходится.

Пример расходящегося ряда

Пример 1. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5n+1}$ расходится, так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{5n+1} = \frac{1}{5} \neq 0 \quad .$$

Знакоположительные ряды

Признак сравнения.

Пусть даны ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$
Если ряд с большими членами сходится, то сходится и ряд с меньшими членами. Если же ряд с меньшими членами расходится, то расходится и ряд с большими членами.

Признак сравнения в предельной форме

Если существует конечный и отличный от нуля $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = A$, то

ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся или

расходятся одновременно.

Примеры

В качестве рядов для сравнения берут гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, который

расходится, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ или $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, о которых известно, что первый сходится, а второй при $p > 1$ сходится, а при $p \leq 1$ расходится.

Примеры

Исследовать на сходимость ряды

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 4}$ и б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Найдем предел отношения членов данного ряда и ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, с которым сравниваем данный ряд.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot n^2}{(n^2 + 1) \cdot 1} = 1. \text{ Ряд сходится.}$$

Примеры

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ сравниваем с гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Так как $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n}$, то данный ряд расходится вместе с гармоническим рядом.

Признак Даламбера

Если существует конечный $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$

то

1) при $\rho < 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, где $u_n > 0$,
сходится,

2) при $\rho > 1$ ряд расходится,

3) при $\rho = 1$ признак ответа не дает.

Примеры

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{e^n}$

Так как $u_n = \frac{2n}{e^n}$, то $u_{n+1} = \frac{2(n+1)}{e^{n+1}}$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)e^n}{e^{n+1}2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{en} = \frac{1}{e} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{e} .$$

Так как $\frac{1}{e} < 1$, то данный ряд сходится.

Признак Коши

Если существует конечный $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$,

1) при $\rho < 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, где $u_n > 0$,

2) при $\rho > 1$ ряд расходится,

3) при $\rho = 1$ признак ответа не дает.

Примеры

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{n+2}\right)^n$ исследуем с помощью признака Коши.

Вычислим $\sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{3n+1}{n+2}\right)^n} = \frac{3n+1}{n+2}$.

Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{n+2} = 3 > 1$
и ряд согласно признаку Коши расходится.

Интегральный признак

Пусть члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ положительны и $u_n > u_{n+1}$ при $\forall n \in N$. Пусть функция $f(x)$ при $x = n$ имеет значения $f(n) = u_n$, положительна и монотонно убывает при $x > 1$. Тогда числовой ряд сходится или расходится вместе с несобственным интегралом

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx$$

Обобщенный гармонический ряд

Исследуем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.

Функция $f(x) = \frac{1}{x^p}$ монотонно убывает.

Несобственный интеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \int_1^{\infty} x^{-p} dx = \left. \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right|_1^{\infty} = \frac{1}{1-p} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x^{p-1}} - 1 \right) =$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & p > 1 \\ \infty, & p < 1 \end{cases}$$

.Ряд расходится при $p < 1$
и сходится при $p > 1$.

Пример

Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}} \quad . \quad \text{Члены ряда } u_n = \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$$

положительны и монотонно убывают.

Функция $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}$, очевидно, также

положительна при $x \geq 2$ и монотонно убывает.

Продолжение

$$\begin{aligned}\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_2^b \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{d(\ln x)}{\sqrt{\ln x}} = \lim_{b \rightarrow +\infty} 2\sqrt{\ln x} \Big|_2^b = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} 2\sqrt{\ln b} - 2\sqrt{\ln 2} = +\infty \quad \cdot\end{aligned}$$

Несобственный интеграл, а вместе с ним и числовой ряд расходятся.

Знакопеременные ряды

Признак Лейбница

Пусть члены знакочередующегося ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n-1} u_n + \dots$$

удовлетворяют условиям:

1) $u_1 > u_2 > u_3 > \dots > u_n > \dots$

и 2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Тогда знакочередующийся ряд

сходится, причём его сумма S не

превосходит его первого члена, т.е. $S < u_1$

Примеры

Исследовать на сходимость ряды:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n+1} \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n+2} .$$

1) Члены знакопередающего ряда

$$u_1 = \frac{1}{2}, u_2 = \frac{1}{3}, u_3 = \frac{1}{4}, \dots, u_{n+1} = \frac{1}{n+1}, \dots$$

монотонно убывают и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Согласно признаку Лейбница ряд
сходится.

Примеры

2) общий член ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n+2}$
не стремится к нулю, так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+2} = 1$$

Следовательно, ряд расходится
согласно необходимому признаку.

Достаточный признак сходимости знакопеременного ряда

Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, то

знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ также
сходится.

Абсолютно сходящийся ряд

Определение.

Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, то знакопеременный ряд называется абсолютно сходящимся.

Условно сходящийся ряд

Определение.

Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ расходится, то знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется условно сходящимся.

Пример

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$ абсолютно сходится, т.к. ряд из модулей его членов $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n+1}$ сходится условно, т.к. он согласно признаку Лейбница сходится, но ряд из модулей его членов, т.е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ расходится вместе с гармоническим рядом .

Остаток ряда и его оценка

Определение. Если числовой ряд сходится, то разность $R_n = S - S_n$ называется n -м остатком ряда. Таким образом, $R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots$ представляет собой сходящийся ряд.

При этом $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S - S_n) = S - S = 0$.

Теорема. Если знакочередующийся ряд сходится, то $|R_n| < u_{n+1}$.