



Исследовать сходимость ряда $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2\sqrt{2}} + \dots$

$$a_n = \frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}; \quad a_{n+1} = \frac{2(n+1)-1}{(\sqrt{2})^{n+1}} = \frac{2n+1}{(\sqrt{2})^{n+1}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{(\sqrt{2})^{n+1}} \cdot \frac{(\sqrt{2})^n}{2n-1} \right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(\sqrt{2})^n}{(\sqrt{2})^{n+1}(2n-1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n-1} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{2 - \frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1. \text{ р.сх-са}$$

Числовые ряды

Исследовать сходимость ряда: $\frac{1}{e} + \frac{8}{e^2} + \frac{27}{e^3} + \dots$

$$a_n = \frac{n^3}{e^n}; \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)^3}{e^{n+1}}. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = ?$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n+1)^3}{e^{n+1}} \cdot \frac{e^n}{n^3} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 e^n}{e^{n+1} n^3} = \frac{1}{e} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3}{n^3}$$

$$= \frac{1}{e} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^3 = \frac{1}{e} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^3 = \frac{1}{e} < 1$$

$e \approx 2,718...$

Ответ: ряд сходится.

Вып.: ст. ХК ГУТ
гр. СО-11
Миронюк Сергей

Содержание

- **Определение числового ряда**
- **Сумма ряда**
- **Примеры числовых рядов**
- **Определение частичной суммы**
- **Сходящиеся и расходящиеся ряды**
- **Признак Даламбера, исследование на сходимость**



Определение числового ряда

Еще в древности ученые встречались с понятием бесконечных последовательностей: $u_1, u_2, u_3, u_n, \dots$,

и с понятием бесконечных рядов $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$

числа u_1, u_2, u_3, \dots — члены ряда.

Пользуясь введенным Эйлером знаком суммы $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$,

рассмотрим частичные суммы данного ряда.

$S_1 = u_1$ — первая частичная сумма,

$S_2 = u_1 + u_2$ — вторая частичная сумма,

$S_3 = u_1 + u_2 + u_3$ — третья и т.д.

Сумма $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$ — частичная сумма ряда.



Сумма ряда

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$$

$$s_1, s_2, s_3, \dots, s_n, \dots, \text{ где}$$

$$s_1 = u_1,$$

$$s_2 = u_1 + u_2,$$

$$s_3 = u_1 + u_2 + u_3,$$

.....

$$s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n,$$

.....

При $n \rightarrow \infty$ частичная сумма имеет предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$$

Сходящиеся и расходящиеся ряды

Ряд называется сходящимся, если последовательность его частичных сумм имеет конечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$

Этот предел называется суммой сходящегося ряда.

Если последовательность частичных сумм не имеет конечного предела, то ряд называется расходящимся.

Примеры числовых рядов

Пример 1

Выражение

$$1 + (-1) + 1 + (-1) + \dots + (-1)^{n+1} + \dots$$

является рядом.

Составим частичные суммы

$$s_1 = 1, s_2 = 1 - 1 = 0, s_3 = 1 - 1 + 1 = 1, \dots,$$

$$s_n = 1 - 1 + \dots + (-1)^{n+1} = \frac{1 + (-1)^{n+1}}{2}$$

Примеры числовых рядов

Пример 2

Выражение

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \dots$$

является рядом.

Из членов

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \dots$$

составляют частичные суммы

$$s_1 = 1, s_2 = 1\frac{1}{2}, s_3 = 1\frac{3}{4}, \dots, s_n = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \dots$$

Примеры сходящихся и расходящихся рядов

Пример 3

Ряд

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n + \dots -$$

расходящийся, т.к. последовательность его
частичных сумм

$$s_1 = 1, s_2 = 3, s_3 = 6, \dots, s_n = \frac{n(n+1)}{2}, \dots$$

имеет бесконечный предел.

Примеры сходящихся и расходящихся рядов

Пример 4

Ряд

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{n+1} + \dots -$$

расходящийся, т.к. последовательность его частичных сумм

$$s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, \dots, s_n = \frac{1 + (-1)^{n+1}}{2}, \dots$$

не имеет никакого предела.

Исследование на сходимость.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Поэтому

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Необходимое условие сходимости ряда

Ряд

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

может сходиться, когда общий член ряда u_n стремится к нулю:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

Необходимое условие сходимости ряда

Пример 5

Ряд

$0,4 + 0,44 + 0,444 + 0,4444 + \dots$ - расходится, т.к. общий член ряда не стремится к нулю.

Пример 6

Ряд

$1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ - расходится, т.к. общий член ряда не стремится к нулю.

Сумма ряда

Если знаменатель прогрессии удовлетворяет неравенству:

$$|q| < 1,$$

то последовательность частичных сумм (S_n) имеет предел:

$$S = \frac{a}{1 - q},$$

который называют суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии (т.е. суммой ряда).

Признак Даламбера

Если члены положительного ряда

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

таковы, что существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$,

то при $\rho < 1$ ряд сходится,

а при $\rho \geq 1$ ряд расходится.

Применение признака Даламбера

Примеры

Исследовать на сходимость следующие ряды:

$$1. \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{n}{3^n} + \dots$$

$$2. \frac{1}{10} + \frac{1 \cdot 2}{10^2} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{10^3} + \dots + \frac{n!}{10^n} \dots$$

Решение: воспользуемся признаком Даламбера:

$$a_n = \frac{n}{3^n} \quad \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{3^{n+1}} : \frac{n}{3^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3n} = \frac{1}{3}, \text{ т.к. } \rho = \frac{1}{3} < 1, \text{ то}$$
$$a_{n+1} = \frac{n+1}{3^{n+1}} \text{ ряд сходится.}$$

Применение признака Даламбера

Решение второго примера:

$$a_n = \frac{n!}{10^n}$$

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{10^{n+1}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(n+1)!}{10^{n+1}} : \frac{n!}{10^n} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!10^n}{n!10^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{10} = \infty$$

т.к. $\rho = \infty$, то ряд расходится.

справка

- **Жан Лерон Д'Аламбер** (1717-1783) — французский математик, механик и философ-просветитель, иностранный почетный член Петербургской АН (1764). В 1751-57 вместе с Дени Дидро редактор «Энциклопедии». Сформулировал правила составления дифференциальных уравнений движения материальных систем (см. ниже Д'Аламбера принцип). Обосновал теорию возмущения планет. Труды по математическому анализу, теории дифференциальных уравнений, теории рядов, алгебре.

