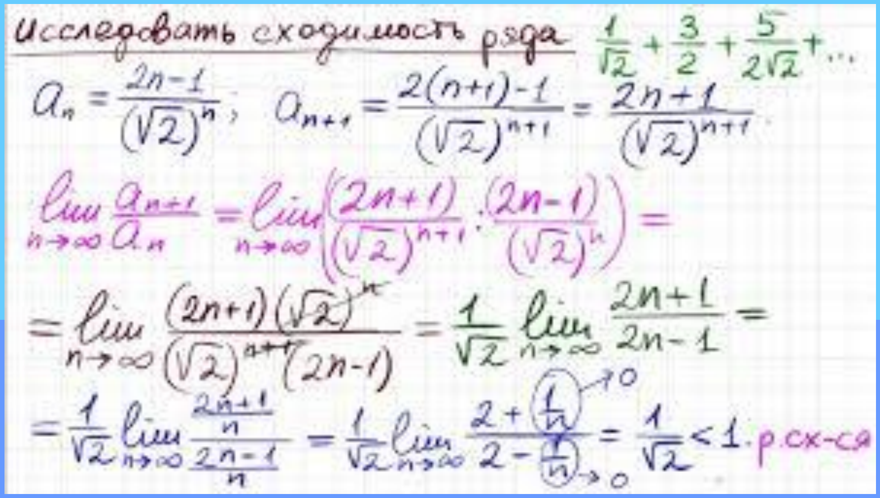
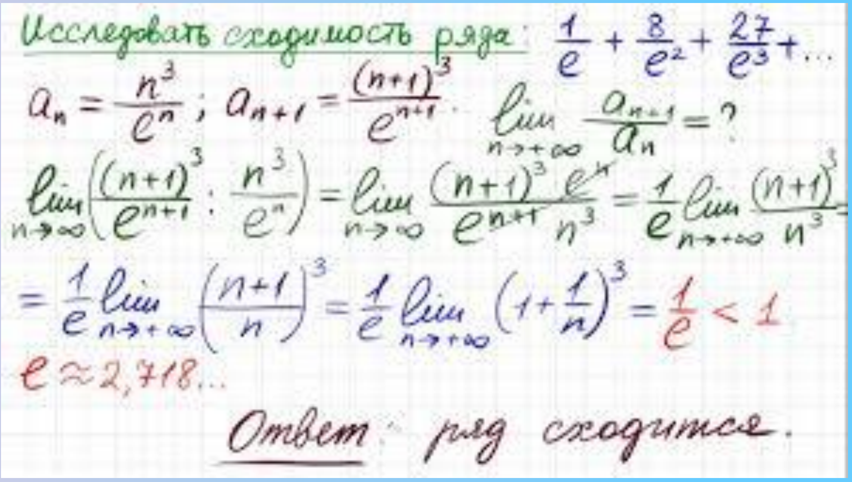


Числовые ряды



Вып.: ст. ХК ГУТ
гр. СО-11
Миронюк Сергей

Содержание

- *Определение числового ряд*
- *Сумма ряда*
- *Примеры числовых рядов*
- *Определение частичной суммы*
- *Сходящиеся и расходящиеся ряды*
- *Признак Даламбера, исследование на сходимость*

Определение числового ряда

Еще в древности ученые встречались с понятием бесконечных последовательностей: $u_1, u_2, u_3, u_n, \ldots,$

и с понятием бесконечных рядов $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$

числа $u_1, u_2, u_3, \ldots$ – члены ряда.

Пользуясь введенным Эйлером знаком суммы $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$,

рассмотрим частичные суммы данного ряда.

$s_1 = u_1$ – первая частичная сумма,

$s_2 = u_1 + u_2$ – вторая частичная сумма,

$s_3 = u_1 + u_2 + u_3$ – третья и т.д.

Сумма $s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$ - частичная сумма ряда.

Сумма ряда

$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$

$s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, \ldots$, где

$$\left.\begin{array}{l} s_1 = u_1, \\ s_2 = u_1 + u_2, \\ s_3 = u_1 + u_2 + u_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}$$

При $n \to \infty$ частичная сумма имеет предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$

Сходящиеся и расходящиеся ряды

Ряд называется сходящимся, если последовательность его частичных сумм имеет конечный предел $\lim_{n\to\infty} S_n = S$

Этот предел называется суммой сходящегося ряда.

Если последовательность частичных сумм не имеет конечного предела, то ряд называется расходящимся.

Примеры числовых рядов

Пример 1

Выражение

$$1 + (–1) + 1 + (–1) + \ldots + (–1)^{n+1} + \ldots$$

является рядом.

Составим частичные суммы

$$s_1 = 1,\ s_2 = 1 – 1 = 0,\ s_3 = 1 – 1 + 1 = 1,\ \ldots,$$

$$s_n = 1 - 1 + \ldots + (-1)^{n+1} = \frac{1 + (-1)^{n+1}}{2}$$

Примеры числовых рядов

Пример 2

Выражение

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\ldots$$

является рядом.

Из членов

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\ldots,\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},\ldots$$

составляют частичные суммы

$$s_1=1, s_2=1\frac{1}{2}, s_3=1\frac{3}{4},\ldots, s_n=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},\ldots$$

Примеры сходящихся и расходящихся рядов

Пример 3

Ряд

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n + \ldots -$$

расходящийся, т.к. последовательность его частичных сумм

$s_1 = 1$, $s_2 = 3$, $s_3 = 6$, … , $s_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$,…

имеет бесконечный предел.

Примеры сходящихся и расходящихся рядов

Пример 4

Ряд

$1 – 1 + 1 – 1 + \ldots +(-1)^{n+1} + \ldots$ -

расходящийся, т.к. последовательность его частичных сумм

$$s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, \ldots, s_n = \frac{1+(-1)^{n+1}}{2}, \ldots$$

не имеет никакого предела.

Исследование на сходимость.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}.$$

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\,(n=1,2,3,\ldots).$$

Поэтому

$$S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}.$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

Необходимое условие сходимости ряда

Ряд

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

может сходится, когда общий член ряда u_n стремится к нулю:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

Необходимое условие сходимости ряда

Пример 5

Ряд

0,4 + 0,44 + 0,444 + 0,4444 + … - расходится, т.к. общий член ряда не стремиться к нулю.

Пример 6

Ряд

1 – 1 + 1 – 1 + … - расходится, т.к. общий член ряда не стремится к нулю.

Сумма ряда

Если знаменатель прогрессии удовлетворяет неравенству:

$$|q| < 1,$$

то последовательность частичных сумм (Sn) имеет предел:

$$S = \frac{a}{1-q},$$

который называют суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии (т.е. суммой ряда).

Признак Даламбера

Если члены положительного ряда

$a_1+a_2+\ \ldots+\ a_n+\ldots$

таковы, что существует $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\rho$,

то при ρ □ 1 ряд сходится,

а при ρ □ 1 ряд расходится.

Применение признака Даламбера

Примеры

Исследовать на сходимость следующие ряды:

1. $$\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\ldots+\frac{n}{3^n}+\ldots$$

2. $$\frac{1}{10}+\frac{1\cdot 2}{10^2}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{10^3}+\ldots+\frac{n!}{10^n}\ldots$$

Решение: воспользуемся признаком Даламбера:

$$a_n=\frac{n}{3^n}$$

$$a_{n+1}=\frac{n+1}{3^{n+1}}$$

$$\lim_{n}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{3^{n+1}}:\frac{n}{3^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n}=\frac{1}{3},\text{т.к.}\ \rho=\frac{1}{3}<1,\text{то}$$

ряд сходится.

Применение признака Даламбера

Решение второго примера:

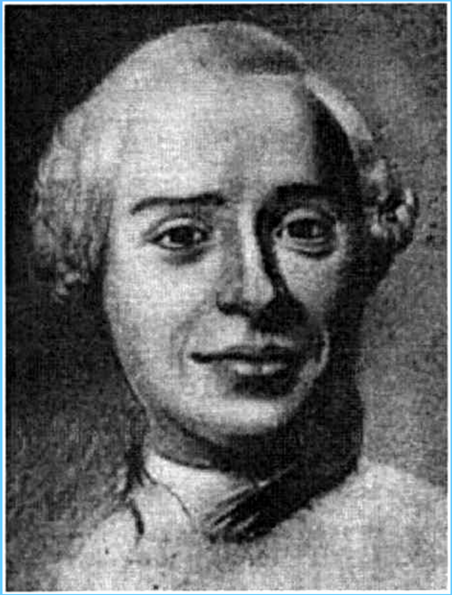
$$a_m = \frac{n!}{10^n}$$

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{10^{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)!}{10^{n+1}} : \frac{n!}{10^n}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!10^n}{n!10^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{10} = \infty$$

т.к. $\rho = \infty$, то ряд расходится.

Краткая историческая справка



- **Жан Лерон Д'Аламбер** (1717-1783) — французский математик, механик и философ-просветитель, иностранный почетный член Петербургской АН (1764). В 1751-57 вместе с Дени Дидро редактор «Энциклопедии». Сформулировал правила составления дифференциальных уравнений движения материальных систем (см. ниже Д'Аламбера принцип). Обосновал теорию возмущения планет. Труды по математическому анализу, теории дифференциальных уравнений, теории рядов, алгебре.