

Декартова система
координат в пространстве и
на плоскости.

Полярная система
координат на плоскости.

Прямая на плоскости.

Кривые второго порядка

Опр.: Упорядоченные координатные оси, не лежащие в одной плоскости и имеющую одну общую точку, называются **косоугольной системой координат в пространстве**.

Если координатные оси взаимно перпендикулярны, то косоугольную систему координат называют **прямоугольной системой координат Декарта в пространстве** и обозначают ***хуz***.

Опр.: Множество упорядоченных троек чисел в избранной системе координат называется **трехмерным пространством**.

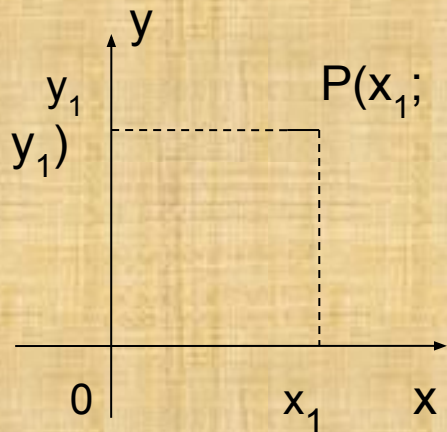
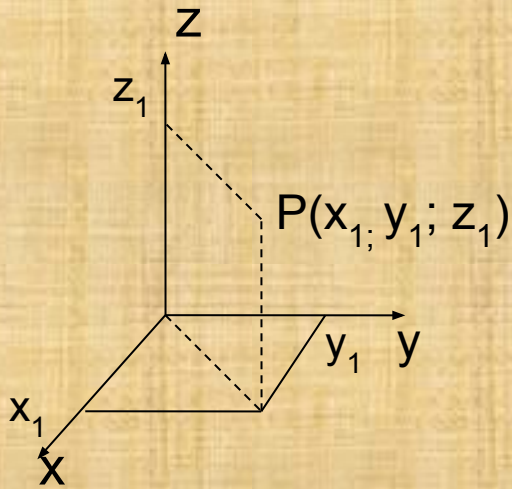
Элементы системы координат:

координатные плоскости Oxy , Oyz , Oxz ;

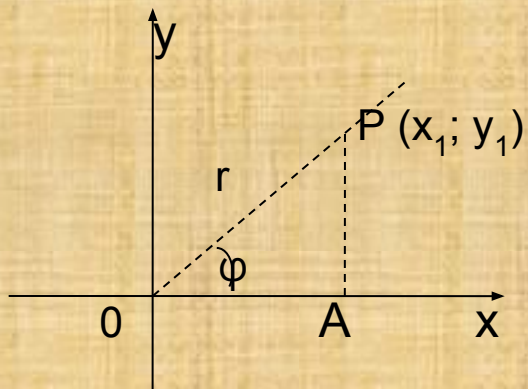
оси координат: Ox – ось абсцисс, Oy – ось ординат; Oz – ось аппликат.

Точка O – начало координат;

упорядоченная тройка чисел $(x; y; z)$ – координаты произвольной точки P .



Частным случаем является система координат на плоскости, например координатная плоскость Oxy .



Точка на плоскости может быть задана **полярной системой координат**, при этом положение точки P описывается углом поворота положительной полуоси Ox против часовой стрелки до положения луча OP и расстоянием точки P от начала координат.

$$\varphi = \angle A\hat{O}P$$

$$r = |OP|$$

$$P(r; \varphi)$$

Из $\triangle APO$, где $\angle A = 90^0$, имеем:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \\ \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y_1}{x_1}; \end{cases} \quad u$$

$$\begin{cases} x_1 = r \cos \varphi \\ y_1 = r \sin \varphi \end{cases}$$

Примеры

1) Задать точку плоскости А (-1; 1) в полярных координатах.

Решение. $r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$,

$$\varphi = \operatorname{arctg}(-1) = -\operatorname{arctg}1 = -\frac{\pi}{4}$$

Таким образом А $(\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4})$

2) Задать точку плоскости В (0,5; π/4) в декартовых координатах.

Решение.

$$x_1 = 0,5 \cos \pi/6 = 0,5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,25\sqrt{3}$$

$$y_1 = 0,5 \sin \pi/6 = 0,5 \cdot 1/2 .$$

Таким образом В $(0,25\sqrt{3} ; 0,25)$

Прямые на плоскости

Прямая на координатной плоскости может быть получена в результате пересечения произвольной плоскости

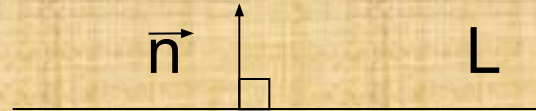
$$Ax + By + Cz + D = 0$$

и координатной плоскости.

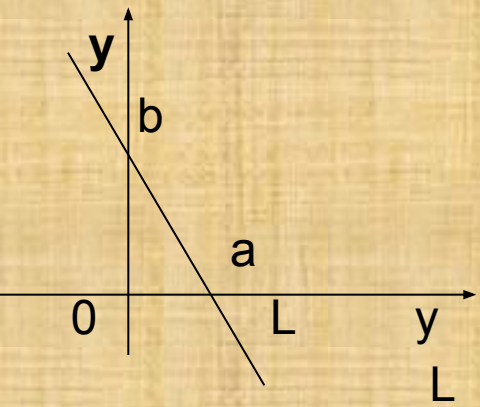
Составим уравнение прямой, принадлежащей, например, плоскости xOy . Эта прямая определяется системой двух уравнений:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} Ax + By + D = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Таким образом $Ax + By + C = 0$ (*) – общее уравнение прямой на координатной плоскости, причем $\vec{n} (A; B)$ является нормальным вектором этой прямой.



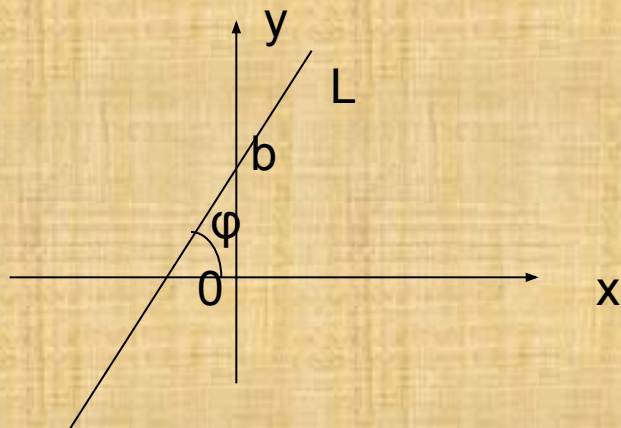
Опр.: геометрическое место точек, удовлетворяющее уравнению (*), называется **прямой**.



$$l: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad \text{- уравнение прямой в отрезках на осях}$$

$$l: \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad \text{- уравнение прямой, проходящей через две точки}$$

$M_1(x_1; y_1) \quad M_2(x_2; y_2)$



$L: y = kx + b$, где $k = \operatorname{tg} \varphi$ – уравнение прямой с угловым коэффициентом;

$L: y - y_1 = k(x - x_1)$ – уравнение прямой с угловым коэффициентом, проходящей через т. $M(x_1; y_1)$.

Угол между прямыми

Пусть прямые заданы уравнением

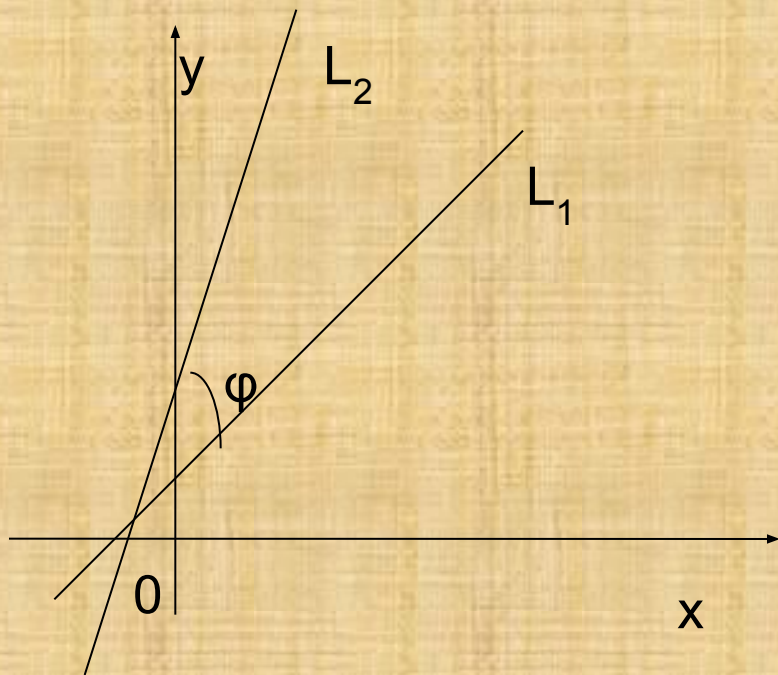
$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \text{ и } A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

Угол между этими прямыми найдем из формулы:

$$\cos \varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

Если прямые заданы уравнением с угловыми коэффициентами, то угол между ними находим по формуле:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$$



Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых:

$$L_1 \parallel L_2, \text{ если } \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \text{ или } k_1 = k_2$$

$$L_1 \perp L_2, \text{ если } A_1 A_2 = -B_1 B_2 \text{ или } k_1 k_2 = -1$$

Примеры

1. Определить острый угол между прямыми $y = 3x + 1$ и $y = -2x - 5$.

Решение. Полагая $k_1 = 3$ и $k_2 = -2$ и применяя формулу (1), получим $\operatorname{tg} \phi = \frac{-2 - 3}{1 + (-2) \cdot 3} = \frac{-5}{-5} = 1$, т.е. $\phi = \pi/4 = 0,785$ рад.

2. Показать, что прямые $7x + 3y - 5 = 0$ и $14x + 6y + 1 = 0$ параллельны.

Решение. Приведя уравнение каждой прямой к виду с угловым коэффициентом, получаем:

$$y = -7/3x + 5/3 \quad \text{и} \quad y = -7/3x + 1/14.$$

Угловые коэффициенты этих прямых равны: $k_1 = k_2 = -7/3$, т. е. прямые параллельны.

3. Даны вершины треугольника $A (-5; 0)$, $B (-3; -2)$ и $C (-7; 6)$. Найти уравнения высот треугольника AD , BN и CM .

Решение. По формуле (4) найдем угловой коэффициент стороны BC :
 $k_{BC} = \frac{6 + 2}{-7 - (-3)} = \frac{8}{-4} = -2$.

В силу перпендикулярности прямых AD и BC $k_{AD} = -1/k_{BC}$, т. е. $k_{AD} = 1/2$.

Уравнение высоты, проведенной из вершины A будет иметь вид:

$$y - 0 = \frac{1}{2}(x + 5) \quad \text{или} \quad x - 2y + 5 = 0.$$

Линии второго порядка на плоскости

Линии второго порядка на плоскости.

- Общее уравнение линии второго порядка на плоскости:
- $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + a_{10}x + a_{20}y + a_{00} = 0$, где $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$, т. е. хотя бы одно из чисел a_{11}, a_{12}, a_{22} не равно нулю.
- **Окружностью** называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от данной точки (центра).

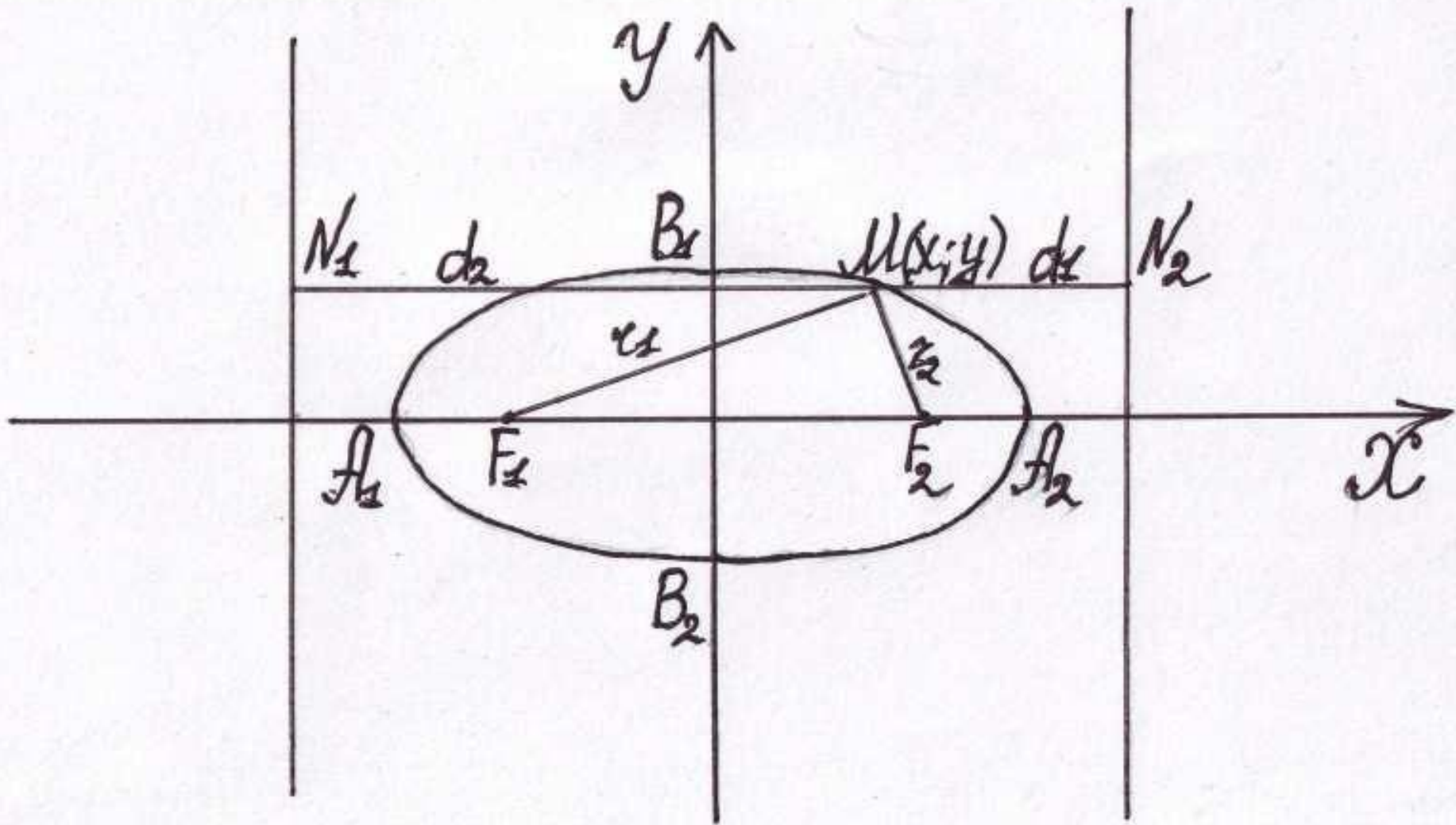
Каноническое уравнение окружности с центром в точке $M(x_0; y_0)$ и радиусом R .

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

Уравнение окружности с центром в начале координат

$$x^2 + y^2 = R^2$$

- **Эллипсом** называется геометрическое место точек, сумма расстояний каждой из которых до двух заданных точек этой же плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.



$|F_1 F_2| = 2c$ - фокальное расстояние, тогда фокусы будут
 иметь следующие координаты: $F_1(-c; 0)$ и $F_2(c; 0)$
 $r_1 + r_2 = 2a$ (const); $a > c$.

Выразим $r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, $r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, тогда

аналитическое уравнение эллипса примет вид:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

Обозначив $a^2 - c^2 = b^2$ получим **каноническое уравнение эллипса**:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Свойства эллипса

1. Эллипс – ограниченная кривая второго порядка.
2. Эллипс имеет вертикальную и горизонтальную оси симметрии, а так же центр симметрии.

A_1, A_2 - большая ось (OA_1 - полуось), B_1, B_2 – малая ось (OB_1 - полуось).

3. A_1, A_2, B_1, B_2 - вершины эллипса, причем $|OB_1| = b, |OA_1| = a$

4. $\varepsilon = \frac{c}{a}$ - называется эксцентриситетом эллипса,

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \quad , \text{т.е. } 0 < \varepsilon < 1;$$

ε - характеризует: “вытянутость эллипса, т.е. отклонение от окружности”.

$\varepsilon = 1$, значит $x^2 + y^2 = a^2$, где a – радиус окружности

5. Прямые $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$ называются директрисами (направляющими)

т.о. имеем: $\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon$ где $d_1 = |MN_1|$, $d_2 = |MN_2|$

Пример:

Дан эллипс $x^2 + 25y^2 = 25$ найти полуоси, эксцентриситет, уравнения директрис.

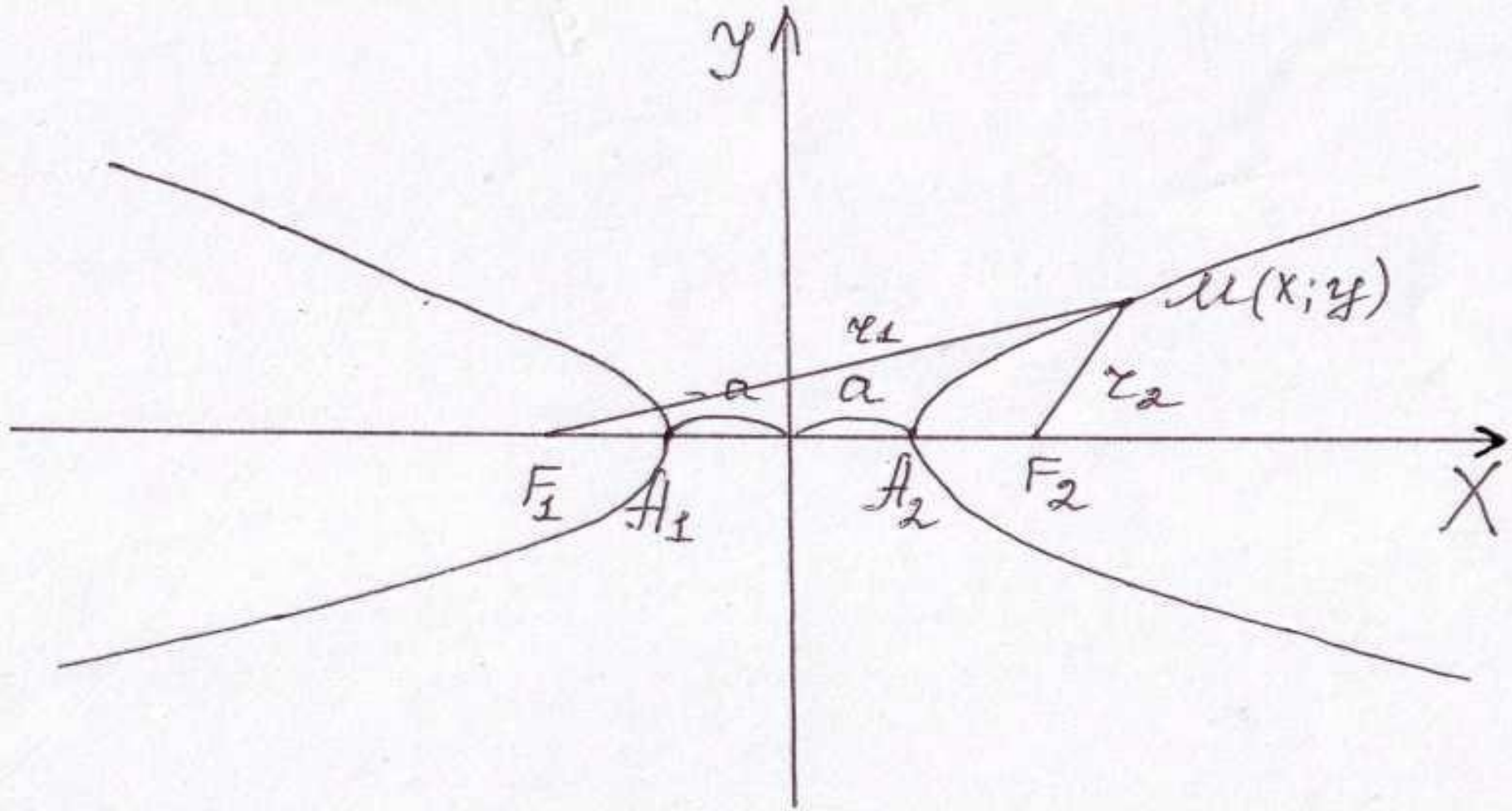
$$x^2 + 25y^2 = 25, \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{1} = 1, \text{ т.о. } a = 5, b = 1.$$

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{1^2}{5^2}} = \sqrt{\frac{24}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5} - \text{ эксцентриситет}$$

$$x = \pm \frac{5}{2\sqrt{6}/5} = \pm \frac{25}{2\sqrt{6}} - \text{ уравнения директрис.}$$

Гипербола

Определение: Гиперболой называется множество точек плоскости, модуль разности расстояний каждой из которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная.



$|F_1 F_2| = 2c$, тогда фокусы будут иметь координаты $F_1(-c; 0)$ и $F_2(c; 0)$.

$|r_1 - r_2| = 2a(\text{const}); a < c$.

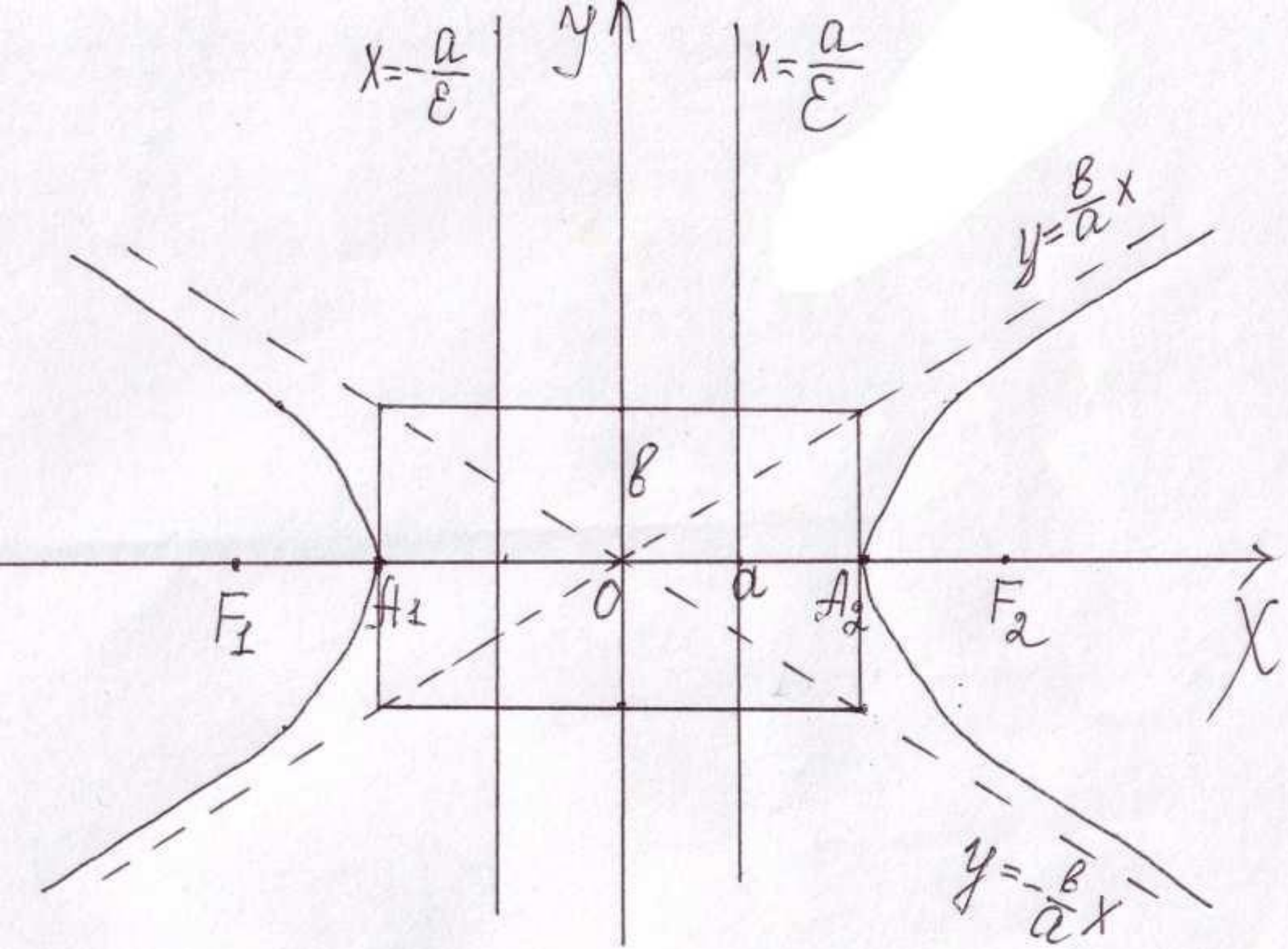
Выразим $r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, $r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, тогда

аналитическое уравнение гиперболы примет вид:

$$\left| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| = 2a$$

Обозначив $a^2 - c^2 = b^2$, получим каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Свойства гиперболы

1. Гипербола – неограниченная кривая второго порядка.
2. Гипербола обладает центральной симметрией.
3. A_1, A_2 – действительные вершины гиперболы; ось $2a$ – действительная, $2b$ – мнимая.
4. Прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$ называется основным прямоугольником гиперболы.
5. Гипербола имеет две асимптоты: $y = \pm \frac{b}{a}x$
6. Эксцентриситет гиперболы: $\varepsilon = \frac{c}{a}$,

причем $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$, т.е. $\varepsilon > 1$

7. Прямые $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$ - называется директрисами гиперболы

причем $\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon$

Примеры: Дана гипербола $16x^2 - 9y^2 = 144$, найти: полуоси a и b ; фокусы; эксцентриситет; уравнения асимптот; уравнения директрис.

$$16x^2 - 9y^2 = 144$$

$$1. \frac{16x^2}{144} - \frac{9y^2}{144} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1 \Rightarrow a = 3; b = 4$$

$$2. b^2 + a^2 = c^2 \Rightarrow c = \sqrt{25} \Rightarrow c = 5; F_1(5;0) \text{ и } F_2(-5;0)$$

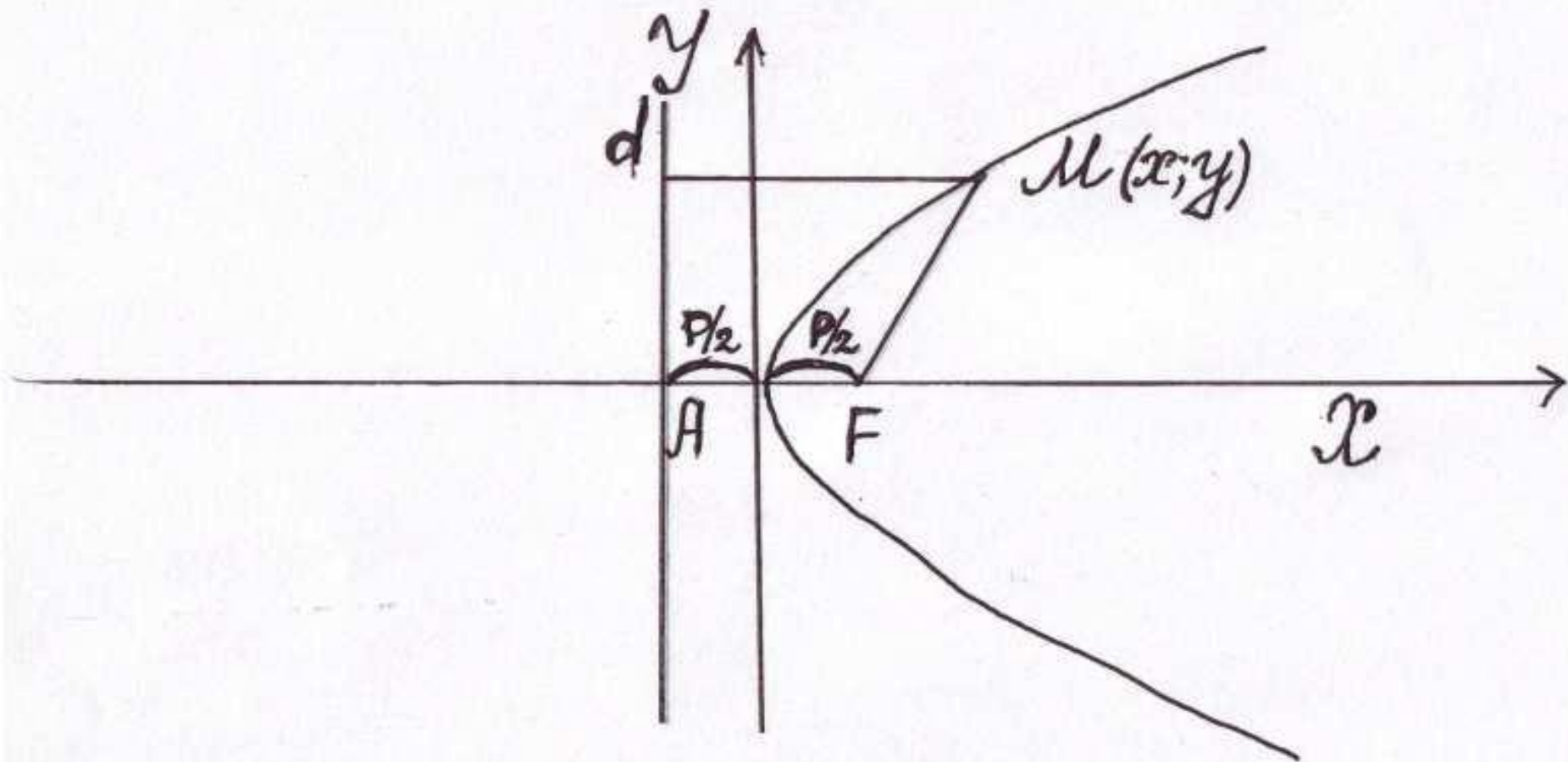
$$3. \varepsilon = \frac{c}{a} \Rightarrow \varepsilon = \frac{5}{3}$$

$$4. y = \pm \frac{b}{a}x \Rightarrow y = \pm \frac{4}{3}x$$

$$5. x = \pm \frac{a}{\varepsilon} \Rightarrow x = \pm \frac{3}{5/3} = \pm \frac{9}{5}$$

Парабола

Определение: параболой называется множество точек плоскости, равноудаленных от фиксированной точки плоскости (фокус F) и фиксированной прямой (директриса d).



$|FA| = p$ – параметр параболы; $|MB| = |MF|$

d – директриса параболы.

$F(\frac{p}{2}; 0)$ – фокус параболы

Выразим $|MB| = x + \frac{p}{2}$, $|MF| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$, тогда

аналитическое уравнение параболы примет вид:

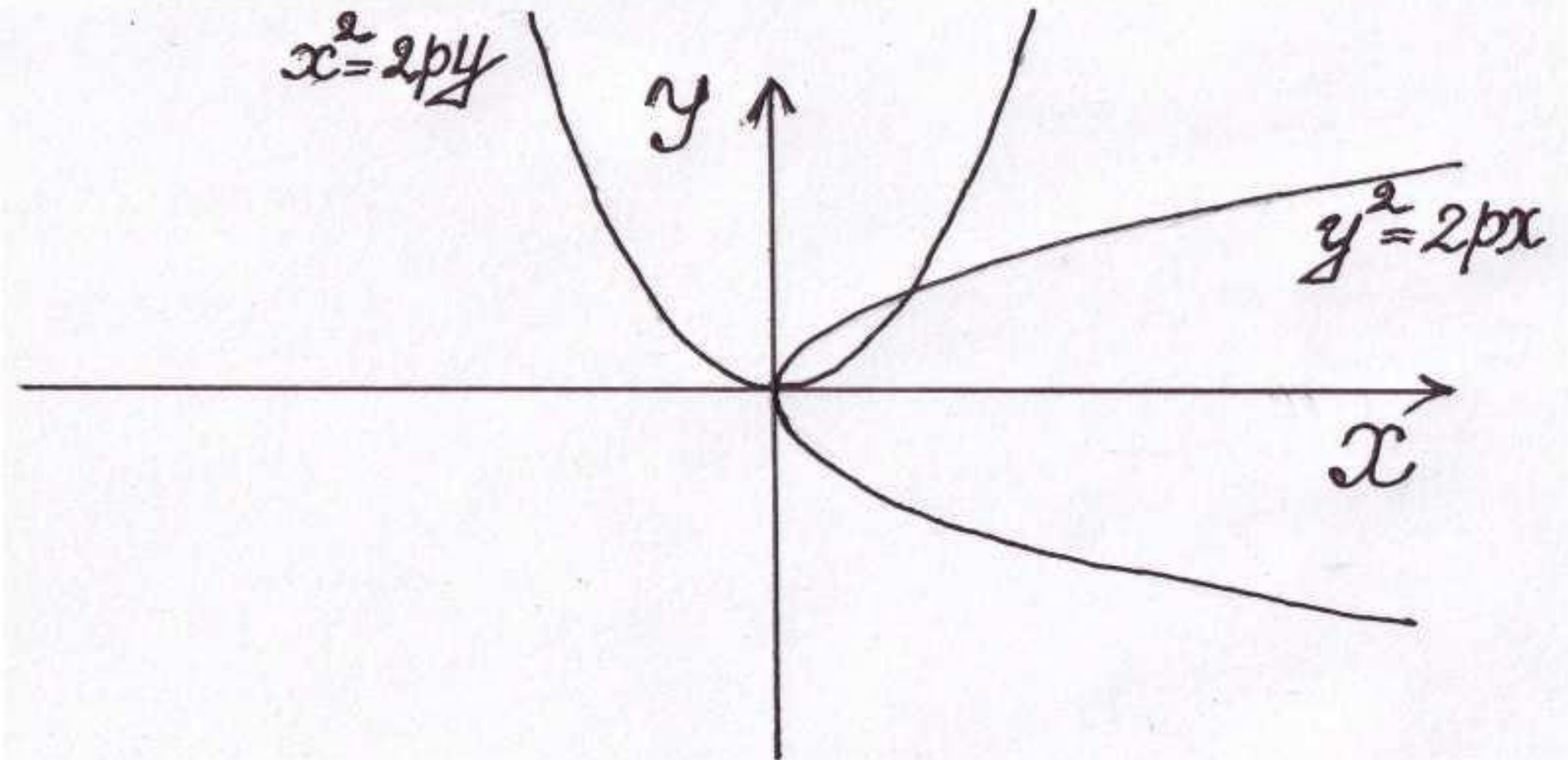
$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2$$

таким образом получим каноническое уравнение параболы:

$$x^2 = 2py \quad \text{или} \quad y^2 = 2px$$

Свойства параболы

1. Парабола – неограниченная кривая второго порядка, расположенная в правой или верхней полуплоскости .
2. Парабола имеет одну ось симметрии – ось абсцисс или ось ординат.



Пример: Установить, что уравнение $y^2 = 4x - 8$ определяет параболу, и найти координаты ее вершины А, величину параметра p и уравнение директрисы.

$$y^2 = 4x - 8$$

Представим уравнение в каноническом виде: $y^2 = 4(x - 2)$
вершина параболы смещена вдоль оси ОХ вправо на две единицы.

1. $A(2;0)$ – координаты вершины параболы.
2. $2p = 4 \Rightarrow p = 2$ – параметр параболы.
3. $x = \frac{p}{2} \Rightarrow x = 1$ - уравнение директрисы параболы.