

Декартовы произведения

Под *упорядоченной парой* $(a; b)$ мы будем понимать двухэлементное множество, состоящее из элементов a и b , в котором зафиксирован порядок расположения элементов. Отметим два характерных свойства упорядоченных пар

$$(a; b) \neq (b; a), \text{ если } a \neq b$$

$$(a; b) = (x; y) \leftrightarrow a = x \wedge b = y$$

Упорядоченной парой называется множество

$$(a; b) = \{\{a\}; \{a, b\}\}.$$

Теорема 1

Если $(a; b) = (x; y)$, то $a = x$, $b = y$.

Доказательство

Из $(a; b) = (x; y)$ следует $\{\{a\}; \{a; b\}\} = \{\{x\}; \{x; y\}\}$.

Равенство двух двухэлементных множеств возможно лишь при равенстве составляющих их элементов. Здесь возможны два случая:

- 1) $\{a\} = \{x\}$, $\{a; b\} = \{x; y\}$ или
- 2) $\{a\} = \{x, y\}$, $\{a; b\} = \{x\}$.

В первом случае из равенства $\{a\} = \{x\}$ следует $a = x$, а из второго равенства $\{a; b\} = \{x; y\}$ и того, что $a = x$, следует $b = y$, что и требовалось доказать.

Во втором случае из равенства $\{a\} = \{x, y\}$ следует $a = x = y$, а из равенства $\{a; b\} = \{x\}$ следует $x = a = b$. В частности, $a = x$ и $b = y$.

Теорема доказана.

Определение 2

$$1) (a; b) = \{\{a\}; \{a; b\}\};$$

$$2) (a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}) = ((a_1, a_2, \dots, a_n), a_{n+1}).$$

Упорядоченные наборы длины n называются также *упорядоченными n -ками, векторами, кортежами.*

Теорема 2

$$(a_1; \dots; a_n) = (b_1; \dots; b_n) \rightarrow a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$$

Доказательство

Индукция по n .

При $n=2$ это есть теорема 1. Допустим, утверждение верно при $n=k$, то есть допустим, что из равенства

$$(a_1; a_2; \dots; a_k) = (b_1; b_2; \dots; b_k) \quad \text{следует}$$

$$a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_k = b_k$$

Докажем теорему при $n=k+1$.

Пусть $(a_1; a_2; \dots; a_k; a_{k+1}) = (b_1; b_2; \dots; b_k; b_{k+1})$ Это можно переписать по определению следующим образом:

$$((a_1; a_2; \dots; a_k); a_{k+1}) = ((b_1; b_2; \dots; b_k); b_{k+1})$$

По теореме 1 из равенства пар вытекает

$$(a_1; a_2; \dots; a_k) = (b_1; b_2; \dots; b_k) \text{ и } a_{k+1} = b_{k+1}$$

По индуктивному предположению получаем

$$a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_k = b_k, a_{k+1} = b_{k+1}$$

Определение 3

Декартовым произведением множеств A и B называется множество $A \times B = \{(a; b) | a \in A, b \in B\}$

Пример

Пусть $A = \{1; 2\}$, $B = \{a, b, c\}$, тогда

$A \times B = \{(1;a); (1;b); (1;c); (2;a); (2;b); (2;c)\}$;

а $B \times A = \{(a;1); (b;1); (c;1); (a;2); (b;2); (c;2)\}$.

Очевидно, что, вообще говоря, $B \times A \neq A \times B$

Определение 4

а) Множество $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n =$
 $= \{(a_1; a_2; \dots; a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n\}$

– декартово произведение n множеств;

б) $A^n = A \times A \times \dots \times A$

- (n сомножителей) – n -ая декартова степень множества A ;

в) $A^1 = A$

Установим связь между декартовыми произведениями и ранее введенными теоретико-множественными операциями.

Теорема 3

Пусть A, B, C – произвольные множества, тогда

$$\text{а) } A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C) \quad ;$$

$$\text{б) } A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C) \quad ;$$

$$\text{в) } A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C) \quad .$$

Доказательство

а) Возьмем

$$\begin{aligned} (x, y) \in A \times (B \cup C) &\leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \cup C \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow x \in A \wedge (y \in B \vee y \in C) \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in C) \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow (x; y) \in A \times B \vee (x; y) \in A \times C \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow (x; y) \in (A \times B) \cup (A \times C) \end{aligned}$$

Следовательно,

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

б) Возьмем

$$\begin{aligned}(x; y) \in A \times (B \cap C) &\leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \cap C \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \wedge y \in C \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in A \wedge y \in C) \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow (x; y) \in A \times B \wedge (x; y) \in A \times C \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow (x; y) \in (A \times B) \cap (A \times C)\end{aligned}$$

Следовательно,

$$в) \quad A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

Возьмем

$$\begin{aligned}(x; y) \in A \times (B \setminus C) &\leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \setminus C \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \wedge y \notin C \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in A \wedge y \notin C) \rightarrow \\ &\rightarrow (x; y) \in A \times B \wedge (x; y) \notin A \times C \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow (x; y) \in (A \times B) \setminus (A \times C)\end{aligned}$$

Поскольку в цепочке преобразований не везде стоят эквивалентности, а в одном месте стоит всего импликация, мы доказали включение

$A \times (B \setminus C) \subseteq (A \times B) \setminus (A \times C)$ Необходимо доказать включение в другую сторону.

Возьмем

$$\begin{aligned} & (x; y) \in (A \times B) \setminus (A \times C) \leftrightarrow \\ & \leftrightarrow (x; y) \in A \times B \wedge (x; y) \notin A \times C \leftrightarrow \\ & \leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \wedge \overline{x \in A \wedge y \in C} \leftrightarrow \\ & \leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \wedge (x \notin A \vee y \notin C) \leftrightarrow \\ & \leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \wedge x \notin A \vee x \in A \vee y \in B \wedge y \notin C \leftrightarrow \\ & \leftrightarrow x \in A \wedge (y \in B \wedge y \notin C) \leftrightarrow \\ & \leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \setminus C \leftrightarrow (x; y) \in A \times (B \setminus C) \end{aligned}$$

Следовательно,

$$(A \times B) \setminus (A \times C) = A \times (B \setminus C)$$

Теорема 4

Если множество A состоит из m элементов, а B – из n элементов, тогда $A \times B$ состоит из $m \times n$ элементов.

Доказательство

Доказываем индукцией по числу n -элементов множества B .

При $n=1$ имеем, $B = \{b_0\}$ поэтому, $A \times B = \{(a; b_0) | a \in A\}$ то есть $A \times B$ имеет $m = m \times 1$ элементов.

Допустим, теорема верна при $n=k$. И пусть теперь B состоит из $k+1$ элемента, то есть

$$B = \{b_1; b_2; \dots; b_k; b_{k+1};\} = B' \cup \{b_{k+1}\}$$

где

$$B' = \{b_1; b_2; \dots; b_k\}$$

Тогда $A \times B = A \times (B' \cup \{b_{k+1}\}) = A \times B' \cup A \times \{b_{k+1}\}$

Первое множество $A \times B'$ состоит из $m \times k$ элементов по индуктивному предположению, второе множество $A \times \{b_{k+1}\}$ состоит из m элементов, как отмечалось в базисе индукции. Кроме того, $A \times B' \cap A \times \{b_{k+1}\} = \emptyset$, так как, $B' \cap \{b_{k+1}\} = \emptyset$ поэтому множество $A \times B$ состоит из $mk + m = m(k+1)$ элементов, что и требовалось доказать.