Декартовы произведения

Под *упорядоченной парой (a; b)* мы будем понимать двухэлементное множество, состоящее из элементов a и b, в котором зафиксирован порядок расположения элементов. Отметим два характерных свойства упорядоченных пар

$$(a;b) \neq (b;a), \textit{если } a \neq b$$

$$(a;b) = (x;y) \leftrightarrow a = x \wedge b = y$$

Упорядоченной парой называется множество *(a;b)={{a};{a, b}}.*

Теорема 1

Если $(a; b)=(x; y)$, то $a=x$, $b=y$.

Доказательство

Из $(a; b)=(x; y)$ следует $\{\{a\};\{a; b\}\}=\{\{x\};\{x; y\}\}$.

Равенство двух двухэлементных множеств возможно лишь при равенстве составляющих их элементов. Здесь возможны два случая:

1) $\{a\}=\{x\}$, $\{a; b\}=\{x; y\}$ или
2) $\{a\}=\{x, y\}$, $\{a; b\}=\{x\}$.

В первом случае из равенства $\{a\}=\{x\}$ следует $a=x$, а из второго равенства $\{a; b\} = \{x; y\}$ и того, что $a=x$, следует $y=в$, что и требовалось доказать.

Во втором случае из равенства $\{a\}=\{x, y\}$ следует $a=x=y$, а из равенства $\{a; b\}=\{x\}$ следует $x=a=в$. В частности, $a=x$ и $в=y$. Теорема доказана.

Определение 2

1) $(a;\ b)=\{\{a\};\{a;\ b\}\}$;

2) $(a_1,a_2,\ldots,a_n,a_{n+1})=((a_1,a_2,\ldots,a_n),a_{n+1})$.

Упорядоченные наборы длины n называются также *упорядоченными n-ками*, *векторами*, *кортежами*.

Теорема 2

$$(a_1;\ldots;a_n)=(b_1;\ldots;b_n)\rightarrow a_1=b_1,a_2=b_2,\ldots,a_n=b_n$$

Доказательство

Индукция по n.

При $n=2$ это есть теорема 1. Допустим, утверждение верно при $n=k$, то есть допустим, что из равенства

$$(a_1;a_2;\ldots;a_k)=(b_1;b_2;\ldots;b_k)$$ следует

$$a_1=b_1,a_2=b_2,\ldots,a_k=b_k$$

Докажем теорему при $n=k+1$.

Пусть $(a_1;a_2;...;a_k;a_{k+1})=(b_1;b_2;...;b_k;b_{k+1})$ Это можно переписать по определению следующим образом:

$$((a_1;a_2;...;a_k);a_{k+1})=((b_1;b_2;...;b_k);b_{k+1})$$

По теореме 1 из равенства пар вытекает

$$(a_1;a_2;...;a_k)=(b_1;b_2;...;b_k) \quad \text{и} \quad a_{k+1}=b_{k+1}$$

По индуктивному предположению получаем

$$a_1=b_1, a_2=b_2, \ldots, a_k=b_k, a_{k+1}=b_{k+1}$$

Определение 3

Декартовым произведением множеств A и B называется множество $A\times B=\{(a;b) | a\in A, b\in B\}$

Пример

Пусть $A=\{1;2\}$, $B=\{a, b, c\}$, тогда

$A \times B=\{(1;a);(1;b);(1;c);(2;a);(2;b);(2;c)\}$;

а $B \times A=\{(a;1);(b;1);(c;1);(a;2);(b;2);(c;2)\}$.

Очевидно, что, вообще говоря, $B \times A \neq B \times A$

Определение 4

а) Множество $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n =$

$$= \{(a_1; a_2; \ldots; a_n) | a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n\}$$

– *декартово произведение n* множеств;

б) $A^n = A \times A \times \ldots \times A$

- (n сомножителей) – *n-ая декартова степень* множества A;

. в) $A^1 = A$

Установим связь между декартовыми произведениями и ранее введенными теоретико-множественными операциями.

Теорема 3

Пусть *A, B, C* – произвольные множества, тогда

а) $A\times\left(B\cup C\right)=\left(A\times B\right)\cup\left(A\times C\right)$;

б) $A\times\left(B\cap C\right)=\left(A\times B\right)\cap\left(A\times C\right)$;

в) $A\times\left(B\setminus C\right)=\left(A\times B\right)\setminus\left(A\times C\right)$.

Доказательство

а) Возьмем

$$\begin{gathered}\left(x,y\right)\in A\times\left(B\cup C\right)\leftrightarrow x\in A\wedge y\in B\cup C\leftrightarrow\\ \leftrightarrow x\in A\wedge\left(y\in B\vee y\in C\right)\leftrightarrow\\ \leftrightarrow\left(x\in A\wedge y\in B\right)\vee\left(x\in A\wedge y\in C\right)\leftrightarrow\\ \leftrightarrow\left(x;y\right)\in A\times B\vee\left(x;y\right)\in A\times C\leftrightarrow\\ \leftrightarrow\left(x;y\right)\in\left(A\times B\right)\cup\left(A\times C\right)\end{gathered}$$

Следовательно,

$$A\times\left(B\cup C\right)=\left(A\times B\right)\cup\left(A\times C\right)$$

б) Возьмем

$$(x;y)\in A\times(B\cap C)\leftrightarrow x\in A\wedge y\in B\cap C\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow x\in A\wedge y\in B\wedge y\in C\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow(x\in A\wedge y\in B)\wedge(x\in A\wedge y\in C)\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow(x;y)\in A\times B\wedge(x;y)\in A\times C\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow(x;y)\in(A\times B)\cap(A\times C)$$

Следовательно,

$$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$$

в)

Возьмем

$$(x;y)\in A\times(B\setminus C)\leftrightarrow x\in A\wedge y\in B\setminus C\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow x\in A\wedge y\in B\wedge y\notin C\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow(x\in A\wedge y\in B)\wedge(x\in A\wedge y\notin C)\rightarrow$$

$$\rightarrow(x;y)\in A\times B\wedge(x;y)\notin A\times C\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow(x;y)\in(A\times B)\setminus(A\times C)$$

Поскольку в цепочке преобразований не везде стоят эквивалентности, а в одном месте стоит всего импликация, мы доказали включение

$A \times \left(B \setminus C\right) \subseteq \left(A \times B\right) \setminus \left(A \times C\right)$ Необходимо доказать включение в другую сторону.

Возьмем

$$\left(x;y\right) \in \left(A \times B\right) \setminus \left(A \times C\right) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \left(x;y\right) \in A \times B \wedge \left(x;y\right) \notin A \times C \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \wedge \overline{x \in A \wedge y \in C} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \wedge \left(x \notin A \wedge y \notin C\right) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \wedge x \notin A \vee x \in A \vee y \in B \wedge y \notin C \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow x \in A \wedge \left(y \in B \wedge y \notin C\right) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \setminus C \leftrightarrow \left(x;y\right) \in A \times \left(B \setminus C\right)$$

Следовательно,

$$\left(A \times B\right) \setminus \left(A \times C\right) = A \times \left(B \setminus C\right)$$

Теорема 4

Если множество A состоит из m элементов, а B – из n элементов, тогда A x B состоит из m x n элементов.

Доказательство

Доказываем индукцией по числу n-элементов множества B.

При $n=1$ имеем , $B = \{b_0\}$ поэтому , $A \times B = \{(a;b_0) | a \in A\}$ то есть A x B имеет $m = m$ x 1 элементов.

Допустим, теорема верна при $n=k$. И пусть теперь B состоит из $к+1$ элемента, то есть

$$B = \{b_1;b_2;...;b_k;b_{k+1};\} = B' \cup \{b_{k+1}\}$$

.

где

$$B' = \{b_1;b_2;...;b_k\}$$

.

Тогда $A \times B = A \times (B' \cup \{b_{k+1}\}) = A \times B' \cup A \times \{b_{k+1}\}$

Первое множество $A \times B'$ состоит из m х k элементов по индуктивному предположению, второе множество $A \times \{b_{k+1}\}$ состоит из m элементов, как отмечалось в базисе индукции. Кроме того, $A \times B' \cap A \times \{b_{k+1}\} = \varnothing$, так как , $B' \cap \{b_{k+1}\} = \varnothing$ поэтому множество A х B состоит из $mk+m=m(k+1)$ элементов, что и требовалось доказать.