Декартовы произведения

Под *упорядоченной парой (a; b)* мы будем понимать двухэлементное множество, состоящее из элементов a и b, в котором зафиксирован порядок расположения элементов. Отметим два характерных свойства упорядоченных пар

$$(a;b) \neq (b;a), \text{если } a \neq b$$

$$(a;b) = (x;y) \leftrightarrow a = x \wedge b = y$$

Упорядоченной парой называется множество *(a;b)={{a};{a, b}}*.

Теорема 1

Если $(a; b)=(x; y)$, то $a=x$, $b=y$.

Доказательство

Из $(a; b)=(x; y)$ следует $\{\{a\};\{a; b\}\}=\{\{x\};\{x; y\}\}$.

Равенство двух двухэлементных множеств возможно лишь при равенстве составляющих их элементов. Здесь возможны два случая:

1) $\{a\}=\{x\}$, $\{a; b\}=\{x; y\}$ или
2) $\{a\}=\{x, y\}$, $\{a; b\}=\{x\}$.

В первом случае из равенства $\{a\}=\{x\}$ следует $a=x$, а из второго равенства $\{a; b\}=\{x; y\}$ и того, что $a=x$, следует $y=в$, что и требовалось доказать.

Во втором случае из равенства $\{a\}=\{x, y\}$ следует $a=x=y$, а из равенства $\{a; b\}=\{x\}$ следует $x=a=в$. В частности, $a=x$ и $в=y$. Теорема доказана.

Определение 2

1) *(a; b)={{a};{a; b}}*;

2) $(a_1,a_2,\dots,a_n,a_{n+1})=((a_1,a_2,\dots,a_n),a_{n+1})$.

Упорядоченные наборы длины *n* называются также *упорядоченными n-ками*, *векторами*, *кортежами*.

Теорема 2

$$\left(a_1;\dots;a_n\right)=\left(b_1;\dots;b_n\right)\to a_1=b_1,a_2=b_2,\dots,a_n=b_n$$

Доказательство

Индукция по *n*.

При *n=2* это есть теорема 1. Допустим, утверждение верно при *n=k*, то есть допустим, что из равенства

$\left(a_1;a_2;\dots;a_k\right)=\left(b_1;b_2;\dots;b_k\right)$ следует

$$a_1=b_1,a_2=b_2,\dots,a_k=b_k$$

Докажем теорему при $n=k+1$.

Пусть $(a_1;a_2;...;a_k;a_{k+1})=(b_1;b_2;...;b_k;b_{k+1})$ Это можно переписать по определению следующим образом:

$$((a_1;a_2;...;a_k);a_{k+1})=((b_1;b_2;...;b_k);b_{k+1})$$

По теореме 1 из равенства пар вытекает

$$(a_1;a_2;...;a_k)=(b_1;b_2;...;b_k) \quad \text{и} \quad a_{k+1}=b_{k+1}$$

По индуктивному предположению получаем

$$a_1=b_1, a_2=b_2, \ldots, a_k=b_k, a_{k+1}=b_{k+1}$$

Определение 3

Декартовым произведением множеств A и B называется множество $A\times B=\{(a;b)|a\in A, b\in B\}$

Пример

Пусть $A=\{1;2\}$, $B=\{a, b, c\}$, тогда

A х $B=\{(1;a);(1;b);(1;c);(2;a);(2;b);(2;c)\}$;

а B х $A=\{(a;1);(b;1);(c;1);(a;2);(b;2);(c;2)\}$.

Очевидно, что, вообще говоря, $B \times A \neq B \times A$

Определение 4

а) Множество $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n =$

$$= \{(a_1; a_2; \ldots; a_n) | a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n\}$$

– *декартово произведение n* множеств;

б) $A^n = A \times A \times \ldots \times A$

- (n сомножителей) – *n-ая декартова степень* множества A;

. в) $A^1 = A$

Установим связь между декартовыми произведениями и ранее введенными теоретико-множественными операциями.

Теорема 3

Пусть *A, B, C* – произвольные множества, тогда

а) $A\times\left(B\cup C\right)=\left(A\times B\right)\cup\left(A\times C\right)$;

б) $A\times\left(B\cap C\right)=\left(A\times B\right)\cap\left(A\times C\right)$;

в) $A\times\left(B\setminus C\right)=\left(A\times B\right)\setminus\left(A\times C\right)$.

Доказательство

а) Возьмем

$$\left(x,y\right)\in A\times\left(B\cup C\right)\leftrightarrow x\in A\wedge y\in B\cup C\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow x\in A\wedge\left(y\in B\vee y\in C\right)\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow\left(x\in A\wedge y\in B\right)\vee\left(x\in A\wedge y\in C\right)\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow\left(x;y\right)\in A\times B\vee\left(x;y\right)\in A\times C\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow\left(x;y\right)\in\left(A\times B\right)\cup\left(A\times C\right)$$

Следовательно,

$$A\times\left(B\cup C\right)=\left(A\times B\right)\cup\left(A\times C\right)$$

б) Возьмем

$$(x;y)\in A\times(B\cap C)\leftrightarrow x\in A\wedge y\in B\cap C\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow x\in A\wedge y\in B\wedge y\in C\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow(x\in A\wedge y\in B)\wedge(x\in A\wedge y\in C)\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow(x;y)\in A\times B\wedge(x;y)\in A\times C\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow(x;y)\in(A\times B)\square(A\times C)$$

Следовательно,

$$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$$

в)

Возьмем

$$(x;y)\in A\times(B\setminus C)\leftrightarrow x\in A\wedge y\in B\setminus C\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow x\in A\wedge y\in B\wedge y\notin C\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow(x\in A\wedge y\in B)\wedge(x\in A\wedge y\notin C)\rightarrow$$

$$\rightarrow(x;y)\in A\times B\wedge(x;y)\notin A\times C\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow(x;y)\in(A\times B)\setminus(A\times C)$$

Поскольку в цепочке преобразований не везде стоят эквивалентности, а в одном месте стоит всего импликация, мы доказали включение

$A\times\left(B\setminus C\right)\subseteq\left(A\times B\right)\setminus\left(A\times C\right)$ Необходимо доказать включение в другую сторону.

Возьмем

$$\left(x;y\right)\in\left(A\times B\right)\setminus\left(A\times C\right)\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow\left(x;y\right)\in A\times B\wedge\left(x;y\right)\notin A\times C\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow x\in A\wedge y\in B\wedge\overline{x\in A\wedge y\in C}\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow x\in A\wedge y\in B\wedge\left(x\notin A\wedge y\notin C\right)\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow x\in A\wedge y\in B\wedge x\notin A\vee x\in A\vee y\in B\wedge y\notin C\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow x\in A\wedge\left(y\in B\wedge y\notin C\right)\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow x\in A\wedge y\in B\setminus C\leftrightarrow\left(x;y\right)\in A\times\left(B\setminus C\right)$$

Следовательно,

$$\left(A\times B\right)\setminus\left(A\times C\right)=A\times\left(B\setminus C\right)$$

Теорема 4

Если множество *A* состоит из *m* элементов, а *B* – из *n* элементов, тогда *A* х *B* состоит из *m* х *n* элементов.

Доказательство

Доказываем индукцией по числу *n*-элементов множества *B*.

При *n=1* имеем , $B = \{b_0\}$ поэтому , $A \times B = \{(a;b_0) | a \in A\}$ то есть *A* х *B* имеет *m* = *m* х *1* элементов.

Допустим, теорема верна при *n=k*. И пусть теперь *B* состоит из *к+1* элемента, то есть

$$B = \{b_1;b_2;...;b_k;b_{k+1};\} = B' \cup \{b_{k+1}\}$$

где

$$B' = \{b_1;b_2;...;b_k\}$$

Тогда $A \times B = A \times (B' \cup \{b_{k+1}\}) = A \times B' \cup A \times \{b_{k+1}\}$

Первое множество $A \times B'$ состоит из m х k элементов по индуктивному предположению, второе множество $A \times \left\{b_{k+1}\right\}$ состоит из m элементов, как отмечалось в базисе индукции. Кроме того, $A \times B' \cap A \times \left\{b_{k+1}\right\} = \varnothing$, так как , $B' \cap \left\{b_{k+1}\right\} = \varnothing$ поэтому множество A х B состоит из $mk+m=m(k+1)$ элементов, что и требовалось доказать.