

**Делимость  
натуральных  
чисел**



# Делимость натуральных чисел

Свойства делимости

Признаки делимости

Простые и составные числа

Делители числа

НОД

НОК

Самостоятельные работы

Пусть  $a$  и  $b$  натуральные числа и  $a$  больше или равно  $b$  ( $a \geq b$ )

Говорят, что  $a$  делится нацело на натуральное число  $b$ , если существует натуральное число  $c$ , при умножении которого на  $b$  получается число  $a$ :

$$a = b \cdot c$$

# Свойства делимости



Свойства делимости

Признаки делимости

Простые и составные числа

Делители числа

НОД

НОК

Самостоятельные работы



Упражнение\_1. Свойство\_1.



Упражнение\_2. Свойство\_2.



Упражнение\_3. Свойство\_3.



Упражнение\_4. Свойство\_4.

# Признаки делимости



Свойства  
делимости

Признаки  
делимости

Простые и  
составные числа

Делители числа

НОД

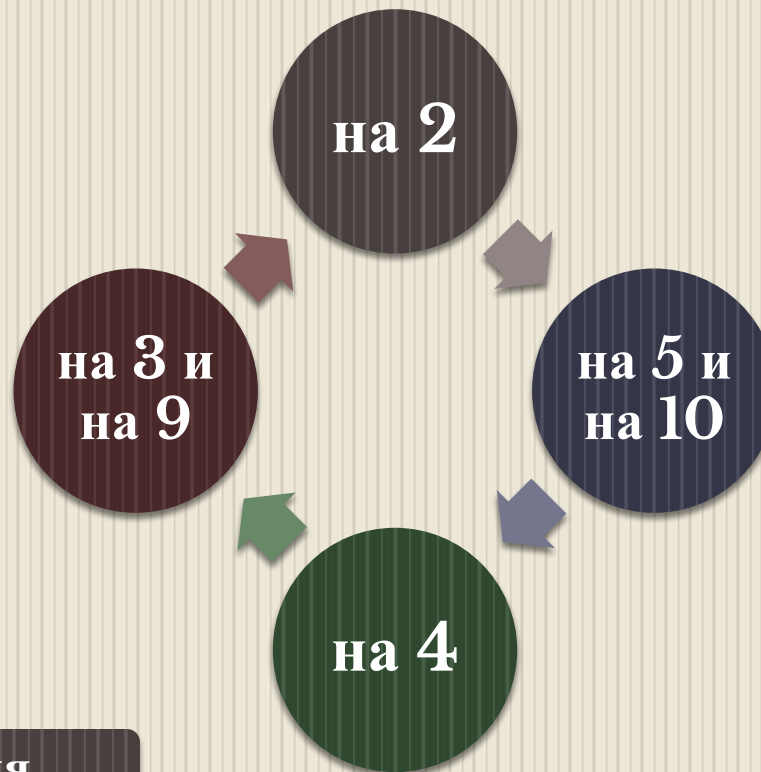
НОК

Самостоятельные  
работы

Упражнения

Трудные задачи

Это интересно!





Свойства делимости

Признаки делимости

Простые и составные числа

Делители числа

НОД

НОК

Самостоятельные работы

# Простые и составные числа

- Числа натурального ряда бывают двух видов: **простые** и **составные**.

## Простым числом

называют такое натуральное число, которое больше единицы и делится только на 1 и на само себя.

## Составным числом

называется натуральное число, которое имеет больше двух различных делителей.

Множество всех натуральных чисел состоит из **простых** чисел, **составных** чисел и единицы.

Метод разложения числа на простые множители

«**Решето** Эратосфена»



# Делители натурального числа

Свойства делимости

Признаки делимости

Простые и составные числа

Делители числа

НОД

НОК

Самостоятельные работы

**Определение.** Если натуральное число  $a$  делится (кратно) на натуральное число  $b$ , то число  $b$  называют **делителем** числа  $a$ .

**Разложить** данное **составное** число на **простые множители** – значит представить его в виде произведения различных его простых делителей или степеней.



# Наибольший Общий Делитель

Свойства делимости

Признаки делимости

Простые и составные числа

Делители числа

**НОД**

**НОК**

Самостоятельные работы

Алгоритм  
нахождения  
**НОД ( a, b )**

**Определение.**

Числа, не имеющие общих простых делителей, называют **взаимно простыми числами**



# Наименьшее **Общее** Кратное

Свойства делимости

Признаки делимости

Простые и составные числа

Делители числа

НОД

**НОК**

Самостоятельные работы

Алгоритм  
нахождения  
**НОК ( a, b )**

**Определение.**  
Наименьшим общим кратным натуральных чисел  $a$  и  $b$  называют наименьшее натуральное число, делящееся нацело на каждое из чисел  $a$  и  $b$ .



# Самостоятельные работы



Свойства делимости

Признаки делимости

Простые и составные числа

Делители числа

НОД

НОК

Самостоятельные работы

Простые и составные числа

Признак делимости

Делители числа

Наибольший Общий Делитель

Наименьшее Общее Кратное

**ПРОВЕРЬ СЕБЯ!** Программа нахождения НОД и НОК

Занимательные задачи

Формула **УСПЕХ**<sub>a</sub>



Свойства  
делимости

Признаки  
делимости

Простые и  
составные числа

Делители числа

НОД

НОК

Самостоятельные  
работы

## ДЕЛИМОСТЬ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

**Тема «Делимость натуральных чисел» готовит учащихся к изучению дробей, дает возможность повысить вычислительную культуру учащихся и завершить изучение натуральных чисел в 5 классе. В рамках этой темы изучаются НОД, НОК чисел, и различные алгоритмы их нахождения. Без разложения на простые множители, легко удастся выполнять действия с дробями, имеющими различные знаменатели.**



# Свойство\_1



Свойства  
делимости

*Если один из множителей делится на некоторое число, то и произведение делится на это число.*

**Пример:** Рассмотрим, делится ли произведение чисел 24 и 13 на 3?

Решение:

24 **кратно** 3 ( $24 = 3 \cdot 8$ ), а числа 3, 8 – **делители** числа 24.

$$\text{Значит, } (24 \cdot 13) : 3 = \underbrace{(3 \cdot 8)}_{24} \cdot 13 : 3 =$$

$$(3 \cdot 8) \cdot 13 : 3 = (8 \cdot 13) \cdot 3 : 3 = 8 \cdot 13$$

Упражнения

## Свойство\_2



Свойства  
делимости

*Если один из множителей делится на некоторое число, то и произведение делится на это число.*

### Пример:

777 **кратно** 111 ( $777 : 111 = 7$ ), число 111 – **делитель** числа 777.

111 **кратно** 3 ( $111 : 3 = 37$ ), 3 – **делитель** числа 111.

Таким образом,  $777 = 7 \cdot 3 \cdot 37$

**111**

Упражнения

# Свойство\_3



Свойства  
делимости

*Если каждое из двух чисел делится на некоторое число, то их сумма и разность делится на это число.*

## Пример:

100 **кратно** 4 ( $100 = 4 \cdot 25$ ), 4 – **делитель** числа 100.

48 **кратно** 4 ( $48 = 4 \cdot 12$ ), 4 – **делитель** числа 48.

Из это следует, что  $(100 + 48)$  **кратно** 4 и  $(100 - 48)$  **кратно** 4.

## Проверка :

$$100 + 48 = 25 \cdot 4 + 12 \cdot 4 = 4 \cdot (25 + 12)$$

$$100 - 48 = 25 \cdot 4 - 12 \cdot 4 = 4 \cdot (25 - 12)$$

распределительный закон

Следовательно, сумма и разность чисел 100 и 48 **кратно** 4.

Упражнения

# Свойство\_4



Свойства  
делимости

*Если каждое из двух чисел делится на некоторое число, то их сумма и разность делится на это число.*

## Пример:

100 **кратно** 4 ( $100 = 4 \cdot 25$ ), 4 – **делитель** числа 100.

11 **некратно** 4.

Очевидно что , сумма и разность чисел 100 и 11 **некратно** 4. Иначе это **противоречит** Свойству 3.

Упражнения

# Упражнение\_1



Свойства  
делимости

*Свойство\_1. Если один из множителей делится на некоторое число, то и произведение делится на это число.*

## • Объясните, почему :

- 1) Сумма чисел 99 и 9 делится на 3
- 2) Разность чисел 64 и 16 делится на 4
- 3) Сумма  $(24 \cdot a + 72 \cdot b + 16 \cdot c)$  делится на 8

# Упражнение\_2



**Свойства  
делимости**

*Свойство\_2. Если один из множителей делится на некоторое число, то и произведение делится на это число.*

**Докажите, что если**

- 22 кратно 2, то и  $(102 \cdot 22)$

**кратно 2**

- 36 кратно 18, то и  $(1121 \cdot 36)$

**кратно 18**

- 72 кратно 9, то  $(72 \cdot 5)$  и

**кратно 9**



# Упражнение\_3



Свойства  
делимости

*Свойство\_3. Если каждое из двух чисел делится на некоторое число, то их сумма и разность делится на это число.*

**Объясните, почему:**

**Сумма чисел 45 и 36 делится на 9**

**Сумма чисел 24 и 64 делится на 4**

**Сумма чисел 42 и 27 делится на 3**

**Разность чисел 150 и 28 делится на 2**

**Разность чисел 77 и 55 делится на 11**



Свойства  
делимости

## Упражнение\_4

*Свойство\_4. Если каждое из двух чисел не делится на некоторое число, то их сумма и разность не делится на это число.*

**Задание\_1.** Составь число из цифр – номеров ложных высказываний.

1. Сумма чисел  $72 + 263$  делится на 6.
2. Число 5 является делителем разности  $7885 - 3150$
3. Произведение чисел  $150 \cdot 24 \cdot 2790$  кратно 10 и 3.
4. Произведение  $8^2 \cdot 4^3$  кратно 14
5. Сумма  $3^2 + 6^2 + 81$  кратна 9.
6. Сумма чисел  $55 + 121 + 99$  делится на 11.

Ответ

**Задание\_2.** Найдите делители полученного числа.



## Признаки делимости

# Признак делимости на 2

Цифры 0, 2, 4, 6, 8 – называют **четными** цифрами, остальные пять цифр (1, 3, 5, 7, 9) – **нечетными**.  
**Запомни!** На 2 делятся те и только те числа, которые оканчиваются **четной** цифрой.

**Задание.** Заполните пропуски:

□ Если число оканчивается **четной** цифрой, то оно делится на 2;

□ Если число **делится на 2,** , то оно оканчивается четной цифрой.



Признаки делимости

# Признак делимости на 3 и на 9

Найдем признак делимости на 3, используя свойства делимости!

Число 1200 состоит из одной тысячи и двух сотен:  $1200 = 1000 + 200$

Представим слагаемые следующим образом:

$$1000 = 3 \cdot 333 + 1$$

$200 = 3 \cdot 66 + 2$  (остаток 2)

Получаем  $1200 = 3 \cdot 333 + 1 + 3 \cdot 66 + 2 = 3 \cdot 399 + 3$   
Сформулируйте признак делимости на 3 и получите! аналогичный признак делимости на 9.

Число 3 делит 1200 (остаток 0), а число 9 не делит (остаток 3).  
Например, числа 7821. (остаток 0)  
Число 3 делит 7821 (остаток 0), а число 9 не делит (остаток 3).  
Таким образом, согласно свойству делимости 1 и 3, мы доказали, что 1200 кратно 3.





Признаки  
делимости

# Признак делимости на 3 и на 9

**Если сумма цифр числа делится на 3 тогда и само число делится на 3**

**Например:** 45; 105; 144; 1005; 93006

**Если сумма цифр числа делится на 9 тогда и само число делится на 9**

**Например:** 45; 1053; 14634; 1035; 93006



Признаки  
делимости

# Признак делимости на 5 и на 10

**Число делится на 5 тогда и только тогда, когда последняя цифра делится на 5 (то есть равна 0 или 5).**

**Например:** 55; 105; 100; 1005; 935

**Число делится на 10 тогда и только тогда, когда оно оканчивается на ноль.**

**Например:** 10; 20; 350; 330

# Признак делимости на 4



Признаки  
делимости

Данное число делится на 4, если на 4 делится число, образованное из двух последних цифр данного числа.

**Например:** 244,304, 516, 8936.

**Задание.** Из данных чисел выбрать числа, которые делятся на 4.

704, 342, 5084, 23904, 258, 6968, 725, 220, 9524.





Признаки  
делимости

# Упражнения. Признаки делимости

- Найти наименьшее трехзначное число, **делящееся на 3**.
- Среди чисел **324, 325, 3942, 3047, 30096, 30907** указать числа, **кратные 9**.
- Среди чисел **25; 30; 34; 40** указать те, которые **делятся на 2 и на 5**.
- Какие цифры нужно поставить вместо \*, чтобы число **делилось и на 3 и на 5** без остатка: **1543\*, 801\*, 52\*15**.



# Трудные задачи

## Признаки делимости



### Признаки делимости

**Задача\_1.** Можно ли разменять 25 лир десятью монетами в 1, 3 и 5 лир?

**Задача\_2.** Хулиган Гоша порвал школьную стенгазету на 3 части. После этого он взял один из кусков и тоже порвал на 3 части. Потом опять один из кусков порвал на 3 части и т.д. Могло ли у него в итоге получиться 100 частей?

**Задача\_3.** На чудо-дереве росли 30 апельсинов и 25 бананов. Каждый день садовник снимал ровно два фрукта. Причем, если он снимал одинаковые фрукты, то на дереве появлялся новый банан, а если разные — новый апельсин. В конце концов, на дереве остался один фрукт. Какой: банан или апельсин?





## Признаки делимости

# Трудные задачи Признаки делимости

**Задача\_3.** Обозначим буквой **Ч** чётные числа, а буквой **Н** — нечётные. Заполните пропуски так, чтобы получились верные соотношения:

$$\text{Ч} + \text{Ч} =$$

$$\text{Ч} + \text{Н} =$$

$$\text{Н} + \text{Ч} =$$

$$\text{Н} + \text{Н} =$$

$$\text{Ч} \cdot \text{Ч} =$$

$$\text{Ч} \cdot \text{Н} =$$

$$\text{Н} \cdot \text{Ч} =$$

$$\text{Н} \cdot \text{Н} =$$



# Метод разложения составного числа на простые множители

Простые и составные числа

Найти наименьшее простое число, на которое данное число делится

Разделить число на этот простой делитель

Полученное частное снова разделить на наименьшее простое число, на которое оно делится, и т. д. Процесс продолжается до тех пор, пока в частном не получится единица.

2450	2
1225	5
245	5
49	7
7	7
1	

$$2450 = 2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$$

# Упражнения

## Простые и составные числа



### Простые и составные числа

## Вопросы

- Дано число 28, какое оно **простое** или **составное**?
- Назвать два **числа – соседей** в натуральном ряду, являющихся составными (например, 14 и 15). Могут ли быть «числа-соседи» простыми?
- Два соседних нечетных простых числа (например, 11 и 13) называют «**числами-близнецами**». 17 и 19 тоже «числа-близнецы».

## Проверьте!

### Докажите, что

- а) Произведение двух последовательных натуральных чисел всегда делится на 2.
- б) Произведение трех последовательных натуральных чисел всегда кратно 3.



# Упражнения

## Простые и составные числа



Простые и  
составные числа

**Задание \_1.** Заполните таблицу натуральных чисел не больше 30.

Числа	Четные	Нечетные
<b>Простые</b>	2	3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29
<b>Составные</b>	4; 6; 8; 10; 12, 14; 16; 18; 20; 22; 24; 26; 28; 30	9; 15; 21; 25; 27

**Задание \_2.** Из данных чисел выберите **простые** и **составные**:

41; 398 463; 21; 1; 125; 7; 193; 524; 279; 23.  
;



# Наибольший Общий Делитель

Алгоритм нахождения НОД

Задача\_1. Найти **НОД** (36;42)

**НОД**

Сформулируйте 2 алгоритма нахождения НОД!

- Найти все делители чисел

36 и 42

$$D(36) = \{1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18; 36\}$$

$$D(42) = \{1; 2; 3; 6; 7; 14; 21; 42\}$$

- Подчеркнуть общие делители

$$OD(36; 42) = \{1; 2; 3; 6\}$$

- Выбрать из общих делителей наибольший

$$\text{НОД}(36; 42) = 6$$

- Разложить числа на простые множители

36	2	42	2
18	2	21	3
9	3	7	7
3	3	1	
1			

$$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2$$

$$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$$

- Найти одинаковые множители и вычислить их произведение

$$\text{НОД}(36; 42) = 2 \cdot 3 = 6$$



# Наименьшее Общее Кратное

Алгоритм нахождения НОК

Задача\_1. Найти **НОК** (12;16)

**НОК**

Сформулируйте 2 алгоритма нахождения НОК!

- Записать несколько кратных числам 12 и 16

$$K(12) = \{12; 24; 36; 48; 60; 72; 84; 96; \dots\}$$

$$K(16) = \{16; 32; 48; 64; 80; 96; \dots\}$$

- Найти общие кратные

$$OK(12; 16) = \{48; 96; \dots\}$$

- Выбрать из общих кратных наименьшее

$$\text{НОК}(12; 16) = 48$$

- Разложить числа на простые множители

12	2	16	2
6	2	8	2
3	3	4	2
1		2	2
		1	

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$$

$$16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$

- Подчеркнуть различные множители, которые встречаются наибольшее количество раз

$$\text{НОД}(12; 16) =$$

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 48$$



# РЕШЕТО ЭРАТОСФЕНА

Простые и  
составные числа

Вычеркиваем  
все числа  
кратные

7

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100





# РЕШЕТО ЭРАТОСФЕНА

Простые и  
составные числа

## ЧИСЛА - БЛИЗНЕЦЫ

2	3	5	7	11	13	17	19	23
29	31	37	39	41	43	47	51	53
61	63	67	71	73	79	81	83	87
89	91	93	97					

Arrows from the title 'ЧИСЛА - БЛИЗНЕЦЫ' point to the pairs (17, 19), (47, 51), and (81, 83) in the table.

# ЭТО ИНТЕРЕСНО!



## Признаки делимости

**Признак делимости на 6.** Число делится на 6 тогда и только тогда, когда оно делится и на 2, и на 3.

**Признак делимости на 8.** Число делится на 8 тогда и только тогда, когда три его последние цифры — нули или образуют число, которое делится на 8.

**Признак делимости на 12.** Число делится на 12 тогда и только тогда, когда оно делится и на 4, и на 3.

**Признак делимости на 15.** Число делится на 15 тогда и только тогда, когда оно делится и на 5, и на 3.



# САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

*Простые и составные числа*

Простые и  
составные числа

## ● **Задание\_5.**

- Первые 100 натуральных чисел обычно записываются в форме таблицы.
- Начертите такую таблицу .
- Закрасьте те ячейки таблицы,  
в которых находятся **четные числа**,
- **кратные 3**, **кратные 7**.
- **Исследуйте** полученные числовые узоры.

НЫМИ.



# САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

## Признаки делимости

### Признаки делимости

1. Из цифр 1, 0, 5, 6 составьте несколько трехзначных чисел, делящихся:

на 2; на 5;  
на 9.

на 3; на 4;  
на 10.

2. Дан ряд чисел: 9, 18, 27, 36, ... Продолжите его. Встретятся ли в нем числа:

64, 121, 1000

81, 144, 900

3. Даны числа 726, 549, 321, 568, 738, 600, 1818, 134466. Выпишите те из них, которые делятся:

на 3; на 4;  
на 15

на 2; на 9;  
на 12



# САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

## Делители числа

### Делители числа



1. Покажите, что произведения  $19 \cdot 20 \cdot 21$  и  $20 \cdot 21 \cdot 22$  делятся на 6. **Всегда ли делится на 6 произведение трех последовательных целых чисел?**
  - Выберите **високосные годы** среди следующих: 1600, 1800, 1812, 1820, 1895, 1900, 1917, 1936, 1992.
  - Припишите **справа** к числу 3568 такую цифру, чтобы полученное число делилось: на 2; на 3; на 6; **на 12; на 15.**

$A = \{ 78, 88, 156, 192 \}$  – набор чисел, делящихся на 2;

$B = \{ 72, 78, 156, 192 \}$  – набор чисел, делящихся на 6;

$C = \{ 72, 88, 104, 192 \}$  – набор чисел, делящихся на 8.

□ **Верно ли, что числа, которые входят и в А и в В делятся на 12.**

□ **Верно ли, что числа, которые входят и в А, и в В и в С делятся на 16.**

# Самостоятельная работа

## Делители числа



Делители числа

**Задание\_1.** Разложите на простые множители число:  
**48, 75, 345**

**Задание\_2.** Найдите **все** делители данных чисел

48	2
24	2
12	2
6	2
3	3
1	

75	3
25	5
3	3
1	

325	5
65	5
13	13
1	

$$48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 1 \cdot 2^4 \cdot 3$$

$$75 = 3 \cdot 5 \cdot 3 = 1 \cdot 3^2 \cdot 5$$

$$345 = 5 \cdot 5 \cdot 13 = 1 \cdot 5^2 \cdot 13$$

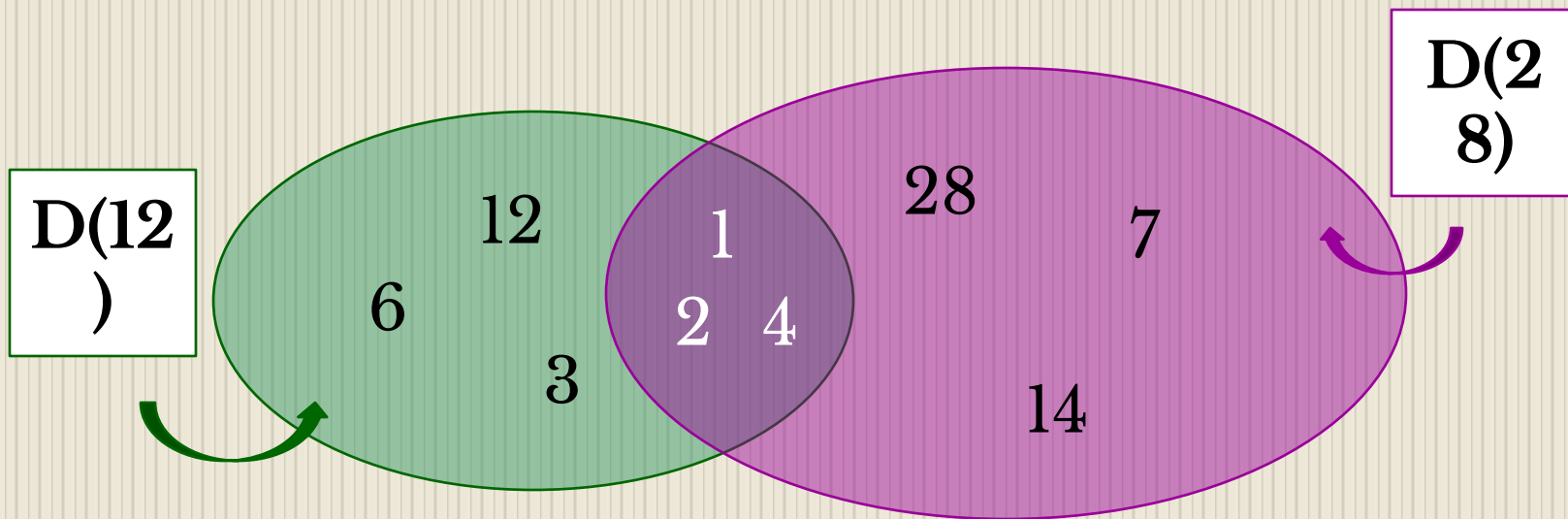


НОД

# САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

*Наибольший Общий Делитель*

- **Задание\_1.** Сделайте комментарий к рисунку.



- **Задание\_2.** Запишите все общие делители чисел:

- 112 и 15;      12; 108 и 15
- 145 и 75;      25; 36 и 130





# САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

*Наибольший Общий Делитель*

НОД

**Задание\_3.** Предложите несколько вариантов заполнения таблицы.

$m$	124		138	
$n$		256		66
НОД ( $m$ , $n$ )		32	46	





# САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

*Наименьшее Общее Кратное*

**НОК**

- **Задание\_1.** Найдите 5 чисел, кратных одновременно:
  - 8 и 20;
  - 7; 12 и 21
- **Задание\_2.** Запишите НОК для чисел  $m$  и  $n$ , если
  - $m = 2 \cdot 7$ ,  $n = 2 \cdot 5^2 \cdot 7$ ;
  - $m = 3 \cdot 11$ ,  $n = 2 \cdot 5 \cdot 13$ ;
  - $m = 2^5 \cdot 3$ ,  $n = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7$ ;
- **Задание\_3.** Какой наименьшей длины должна быть веревка, чтобы ее можно было без остатка разрезать на:
  - и на четырехметровые, и на пятиметровые куски?
  - и на четырехметровые, и на шестиметровые куски?





# САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

*Наименьшее Общее Кратное*

**НОК**

**Задание\_4.** Предложите несколько вариантов заполнения таблицы.

<b>m</b>	<b>12</b>		<b>9</b>	
<b>n</b>		<b>15</b>		<b>8</b>
<b>НОК (m,n)</b>		<b>30</b>	<b>72</b>	



# ПРОВЕРЬ СЕБЯ



# ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

**Задание.** Заполните сверху вниз ячейки заглавными буквами, которые соответствуют числам:

НОК (3, 7)

Какое простое число стоит на числовом луче правее числа 17?

Найдите **все значения цифры а**, если число **875а** делится на **6**.  
Сложите их, прибавьте 2, затем результат разделите на 2.

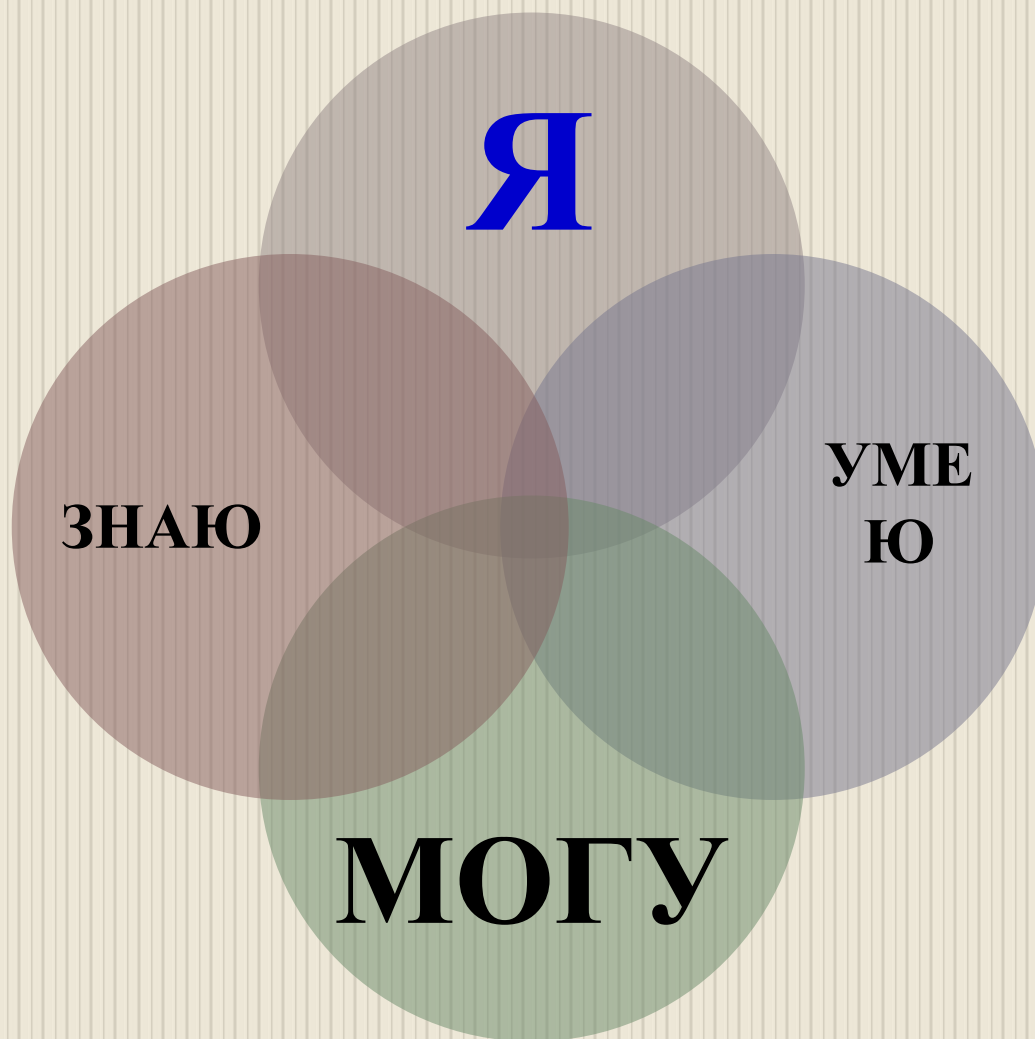
Какую цифру можно приписать к числу 3 слева и справа для того, чтобы полученное трехзначное число делилось на 12?

НОД (805, 1012)





# ФОРМУЛА УСПЕХА





# Я ЗНАЮ

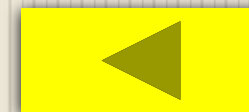
- Свойства делимости
- Признаки делимости на 10, на 5, на 2, на 3, на 4, на 9
- Четные, нечетные числа и их формулы
- Определение простого числа
- Определение составного числа
- Определение делителя числа
- Алгоритм разложения на простые множители
- Понятие общего делителя
- Понятие наибольшего общего делителя
- Алгоритм нахождения наибольшего общего делителя
- Понятие взаимно простых чисел
- Наибольший общий делитель двух чисел, из которых одно делится нацело на другое
- Понятие общего кратного
- Понятие НОК
- НОК взаимно простых чисел
- Алгоритм нахождения НОК





# Я УМЕЮ

- Сформулировать 4 свойства делимости
- Объяснить почему на данное число делится произведение
- Записать формулу числа, которое делится на 5, 4, 18 и т.д.
- Объяснить почему сумма делится (не делится) на данное число
- Записать числа, которые делятся на 10, 2, 5, 3, 9
- Определить, делится ли данное число на 10, 2, 5, 3, 9
- На «5» - доказать признак делимости на 4 и применять его в решении задач
- Рас познавать простые и составные числа на основе определения
- Доказать с использованием признаков делимости, что данное число – составное





# Я МОГУ

- Применять понятия к решению задач
- Раскладывать на простые множители
- Находить все делители числа по его разложению на множители
- Записывать данное число в виде произведения двух множителей всеми возможными способами.
- Определять, является ли число простым или составным
- Находить НОД по алгоритму
- Доказывать, что данные числа – взаимно простые
- Решать текстовые задачи с помощью НОД
- Находить НОК данных чисел
- Находить НОК чисел, из которых одно делится на другое нацело
- Решать текстовые задачи на НОК

