

Действительные числа. Степенная функция.

Материалы по математике для
обучающихся 10 класса.

Содержание темы:

1. Действительные числа.
 2. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.
 3. *Арифметический корень натуральной степени.
 4. *Тождественные преобразования выражений с арифметическим корнем натуральной степени.
 5. *Степень с рациональным показателем.
 6. *Степень с действительным показателем.
 7. Степенная функция.
 8. Взаимно обратные функции.
 9. *Иррациональное уравнение.
- * Отмечен материал, вынесенный в тесты ГИА по математике в формате ЕГЭ.*



Результатом изучения темы является:

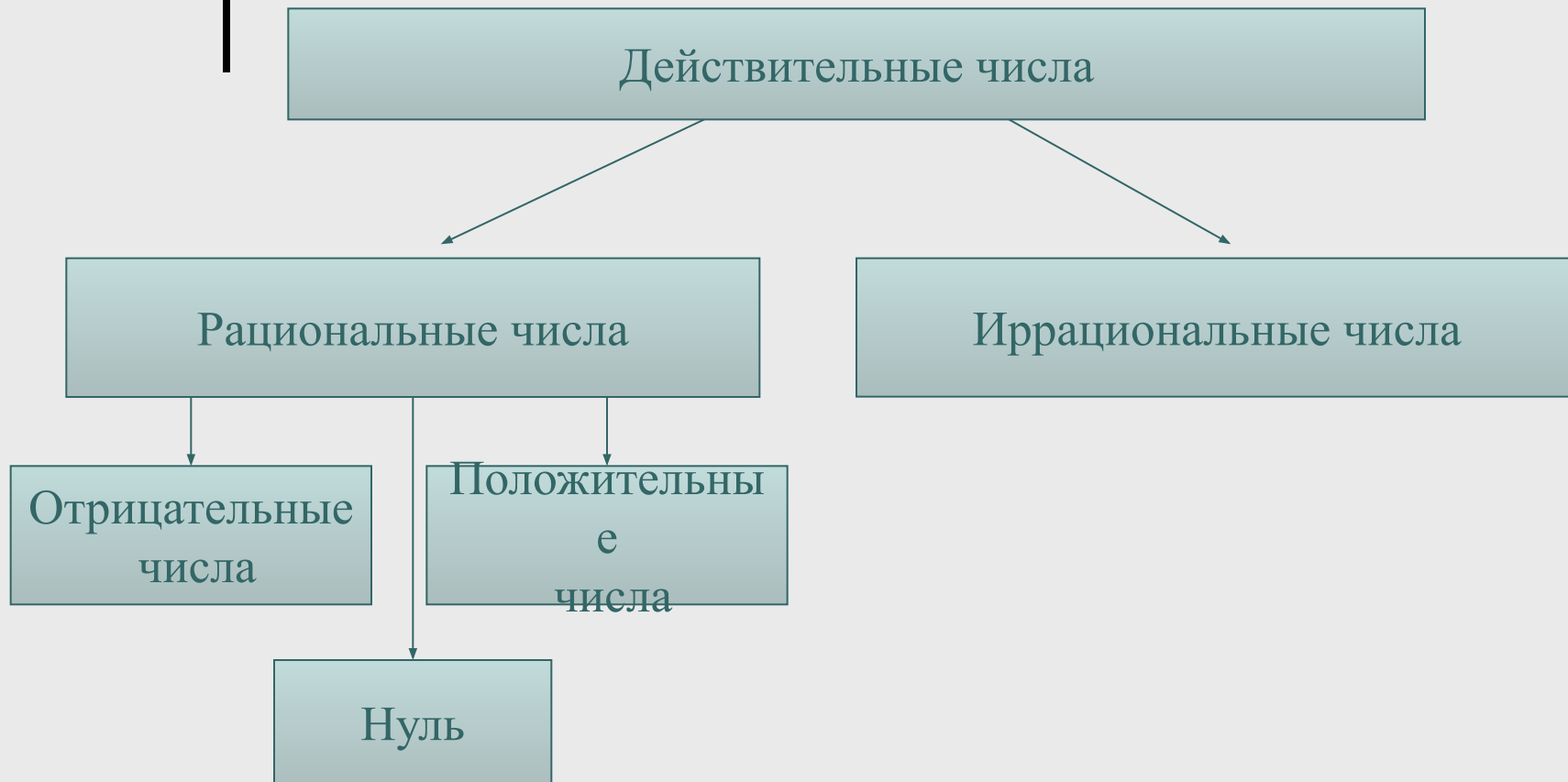
умение на базовом уровне:

- находить значения корня натуральной степени, степени с рациональным показателем;
- проводить по известным формулам и правилам преобразования буквенных выражений, включающих степени, радикалы;
- вычислять значения числовых и буквенных выражений, осуществляя необходимые подстановки и преобразования;
- решать *простейшие иррациональные уравнения, их системы.*




Действительные числа.

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.



Прочитайте материал § 2 учебника «Алгебра и начала анализа 10-11»
(автор Алимов Ш. А. и другие).

Выпишите определение иррационального числа; приведите примеры иррациональных чисел;
Рассмотрите примеры решения задач на страницах 8-9 учебника.



Действительным числом называется бесконечная десятичная дробь вида $a_0, a_1 a_2 a_3 \dots$, где a_0 - целое число, а каждая из букв a_1, a_2, a_3 - это одна из десяти цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Примеры:

1. Выясните, каким числом (рациональным или иррациональным) является числовое значение выражения:

$$\begin{aligned}(\sqrt{8} - 3)(3 + 2\sqrt{2}) &= (\sqrt{4 \cdot 2} - 3)(3 + 2\sqrt{2}) = \\(\sqrt{4} \cdot \sqrt{2} - 3)(3 + 2\sqrt{2}) &= (2\sqrt{2} - 3)(3 + 2\sqrt{2}) =\end{aligned}$$

$$8 - 9 = -1$$

Число -1 является рациональным (его можно представить в виде дроби).

2. Вычислить:
$$\begin{aligned}\sqrt{63} \cdot \sqrt{28} &= \sqrt{9 \cdot 7} \cdot \sqrt{4 \cdot 7} = \\ \sqrt{9} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{7} &= 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{49} \\ &= 6 \cdot 7 = 42\end{aligned}$$

Выполните самостоятельно: из § 2 учебника «Алгебра и начала анализа 10-11» (автор Алимов Ш. А. и другие) упражнение № 9 (2-4), упражнение № 10 (2-4).



Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.

Определение:

Числовая последовательность, первый член которой отличен от нуля, а каждый последующий член, начиная со второго, равен предшествующему члену, умноженному на одно и то же не равное нулю число, называется геометрической прогрессией.

Пример: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \square$

Знаменатель геометрической прогрессии $g = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \square$

Геометрическая прогрессия называется убывающей, если модуль её знаменателя меньше единицы.

Пример.

- Выяснить, является ли геометрическая прогрессия бесконечно убывающей:

Решение:

$$b_7 = 12, b_{11} = \frac{3}{4}$$

$$b_7 = 12, b_{11} = \frac{3}{4}$$

$$b_7 = b_1 \cdot g^6 \quad b_{11} = b_1 \cdot g^{10}$$

$$\frac{b_{11}}{b_7} = \frac{b_1 \cdot g^{10}}{b_1 \cdot g^6} = g^4$$

$$g = \sqrt[4]{\frac{3}{12}} = \sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \frac{1}{2}$$

Так как знаменатель геометрической прогрессии меньше 1, то это убывающая геометрическая прогрессия.

Выполните самостоятельно: упражнение № 16 (3).

Арифметический корень натуральной степени.

Определение:

Арифметическим корнем натуральной степени $n \geq 2$ из неотрицательного числа a называется неотрицательное число b , n -я степень которого равна a .

$$\sqrt[n]{a} = b, b^n = a; \quad a \geq 0, b \geq 0$$

Рассмотрите свойства арифметического корня натуральной степени на странице 19 учебника.

Примеры:

$$-\frac{1}{3} \cdot \sqrt[4]{81} + \sqrt[4]{625} = -\frac{1}{3} \cdot 3 + 5 = -1 + 5 = 4$$

$$\sqrt[3]{343 \cdot 0,125} = \sqrt[3]{343} \cdot \sqrt[3]{0,125} = 7 \cdot 0,5 = 3,5$$

$$\sqrt[5]{7 \frac{19}{32}} = \sqrt[5]{\frac{243}{32}} = \frac{\sqrt[5]{243}}{\sqrt[5]{32}} = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$\sqrt{\sqrt[3]{729}} = \sqrt[6]{729} = 3$$

$$(\sqrt[3]{x})^6 = \sqrt[3]{x^6} = \sqrt[3]{(x^2)^3} = x^2$$

$$\begin{aligned} \sqrt{548^2 - 420^2} &= \sqrt{(548 - 420) \cdot (548 + 420)} = \\ &= \sqrt{128 \cdot 968} = \sqrt{64 \cdot 2 \cdot 484 \cdot 2} = \sqrt{64} \cdot \sqrt{484} \cdot \sqrt{4} = \\ &= 8 \cdot 22 \cdot 2 = 174 \end{aligned}$$

Тожественные преобразования выражений с арифметическим корнем натуральной степени:

примеры заданий из Открытого Банка Задач

Единого Государственного Экзамена

по математике.

$$\frac{\sqrt[9]{7} \cdot \sqrt[18]{7}}{\sqrt[6]{7}} = \frac{\sqrt[18]{7^2} \cdot \sqrt[18]{7}}{\sqrt[18]{7^3}} = \frac{\sqrt[18]{7^3}}{\sqrt[18]{7^3}} = 1$$

$$\begin{aligned} \sqrt{548^2 - 420^2} &= \sqrt{(548 - 420) \cdot (548 + 420)} = \sqrt{128 \cdot 968} = \sqrt{64 \cdot 2 \cdot 484 \cdot 2} = \sqrt{64} \cdot \sqrt{484} \cdot \sqrt{4} = \\ &= 8 \cdot 22 \cdot 2 = 352 \end{aligned}$$

$$5 \cdot \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[6]{9} = 5 \cdot \sqrt[6]{9^2} \cdot \sqrt[6]{9} = 5 \cdot \sqrt[6]{9^3} = 5 \cdot \sqrt[6]{(3^2)^3} = 5 \cdot \sqrt[6]{3^6} = 5 \cdot 3 = 15$$

$$\sqrt{(a-6)^2} + \sqrt{(a-10)^2}, \text{ если } 6 \leq a \leq 10.$$

$$\sqrt{(a-6)^2} = |a-6| = a-6; \sqrt{(a-10)^2} = |a-10| = 10-a, \text{ то}$$

$$\sqrt{(a-6)^2} + \sqrt{(a-10)^2} = (a-6) + (10-a) = a-6+10-a = 4$$



Степень с рациональным показателем.

Если n – натуральное число, m – целое число, то при $a > 0$ справедливо равенство:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Примеры:

$$\sqrt[4]{b^3} = b^{\frac{3}{4}}; \quad \sqrt[5]{\frac{1}{x}} = \sqrt[5]{x^{-1}} = x^{-\frac{1}{5}}$$

$$64^{\frac{1}{2}} = \sqrt{64} = 8; \quad 8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{(2^3)^2} = \sqrt[3]{(2^2)^3} = 2^2 = 4$$

Свойства степени с рациональным показателем.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Примеры решения заданий из Открытого Банка Задач
Единого Государственного Экзамена
по математике

$$\frac{6n^{\frac{1}{3}}}{n^{\frac{1}{12}} \cdot n^{\frac{1}{4}}} = 6 \cdot n^{\frac{1}{3} - \frac{1}{12} - \frac{1}{4}} = 6 \cdot n^{\frac{4}{12} - \frac{1}{12} - \frac{3}{12}} = 6 \cdot n^0 = 6 \cdot 1 = 6$$

$$\frac{a^{3,33}}{a^{2,11} \cdot a^{2,22}} \text{ при } a = \frac{2}{7}$$

$$\frac{a^{3,33}}{a^{2,11+2,22}} = \frac{a^{3,33}}{a^{4,33}} = a^{3,33-4,33} = a^{-1} = \left(\frac{2}{7}\right)^{-1} = \frac{7}{2} = 3,5$$

$$\frac{n^{\frac{5}{6}}}{n^{\frac{1}{12}} \cdot n^{\frac{1}{4}}} = n^{\frac{5}{6} - \frac{1}{12} - \frac{1}{4}} = n^{\frac{10}{12} - \frac{1}{12} - \frac{3}{12}} = n^{\frac{6}{12}} = n^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n} = \sqrt{64} = 8$$

$$n = 64$$

Задания для самостоятельной работы.

1. Выполните упражнение № 57, № 60 на странице 31 учебника.

2. Вычислите значения выражений № 68-70.

3. Прочитайте решение задачи № 10 на странице 30 учебника.

4. Выполните упражнение № 75.

Вычислите:

$$\left((2x^3)^4 - (x^2)^6 \right) : 3x^{12}$$

$$49^2 \cdot 4^3 : 196$$

$$\frac{3^{6,5}}{9^{2,25}}$$

$$3^{\sqrt{5}+10} \cdot 3^{-5-\sqrt{5}}$$

Степенная функция. Взаимно обратные функции.

По материалу § 6 заполните таблицу:

Свойства и график степенной функции.

Показатель степени – четное натуральное число	Показатель степени – нечетное натуральное число	Показатель степени – отрицательное четное целое число
Показатель степени – отрицательное нечетное целое число	Показатель степени- положительное действительное нецелое число	Показатель степени- отрицательное действительное нецелое число

Иррациональное уравнение.

Определение:

- уравнение, содержащее неизвестную величину под знаком корня (радикала), называется иррациональным.

$$\sqrt{4 - 2x} = 6$$

Возведем уравнение во вторую степень:

$$4 - 2x = 36$$

$$-2x = 36 - 4$$

$$-2x = 32$$

$$x = \frac{32}{-2}$$

$$x = -16$$



Выполните самостоятельно:

$$\sqrt{53 + 2x} = 7$$

$$\sqrt{\frac{4x + 40}{17}} = 4$$

$$\sqrt{\frac{18}{2x - 52}} = \frac{1}{8}$$

$$\sqrt{15 - 2x} = 3$$

$$\sqrt{\frac{7x + 28}{18}} = 7$$

$$\sqrt{55 - 3x} = 7$$

$$\sqrt{\frac{2}{7x - 31}} = \frac{1}{4}$$