Алгебра и начала математического анализа

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

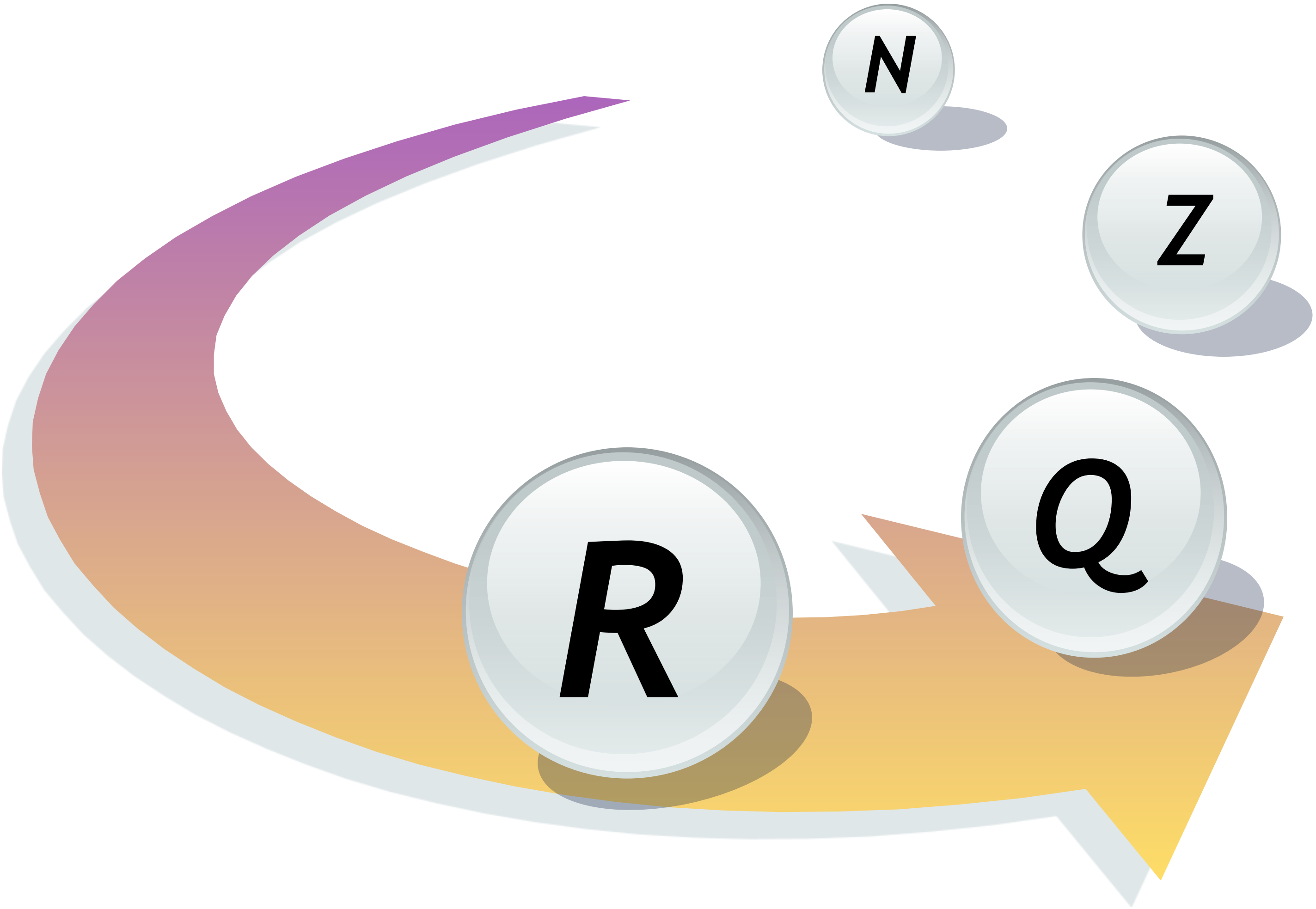
НАТУРАЛЬНЫЕ И ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, … –
ряд натуральных чисел ***N*** *или* ***(Z_+)***

-1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9, -10, -11, … –
ряд противоположных натуральным чисел ***Z_-***

…, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, … –
ряд целых чисел ***Z*** ***(Z_+*** *и* ***Z_-*** *и* ***0)***

МНОЖЕСТВА ЧИСЕЛ



НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Для двух натуральных чисел **a** *и* **b** *если существует натуральное число* **q** *такое, что выполняется равенство* **a = bq**, *то говорят, что число* ***а делится на число b***.

$$a : b = q$$

a – *делимое*

b – *делитель*

q – *частное*

$a \vdots b$ – **a** *делится на* **b** *без остатка*

Свойства делимости

1° *Если* $a \vdots c$ *и* $c \vdots b$*, то* $a \vdots b$.

Пример: **144** $\vdots$ **12** *и* **12** $\vdots$ **3***, то* **144** $\vdots$ **3.**

2° *Если* $a \vdots b$ *и* $c \vdots b$*, то* $(a + c) \vdots b$.

Пример: **84** $\vdots$ **3** *и* **63** $\vdots$ **3***, то* **(84 + 63)** $\vdots$ **3.**

3° *Если* $a \vdots b$ *и* c *не делится на* b*, то* $(a + c)$ *не делится на* b.

Пример: **48** $\vdots$ **3** *и* **52** *не делится на* **3***,*
то **(48 + 52)** *не делится на* **3.**

Свойства делимости

4º Если $a \vdots b$ и $(a + c) \vdots b$, то $c \vdots b$.

Пример: $48 \vdots 3$ и $(48 + 57) \vdots 3$, то $57 \vdots 3$.

5º Если $a \vdots b$ и $c \vdots d$, то $ac \vdots bd$.

Пример: $81 \vdots 3$ и $56 \vdots 4$, то $(81 \cdot 56) \vdots (3 \cdot 4)$.

6º Если $a \vdots b$ и $c \in N$, то $ac \vdots bc$, и наоборот.

Пример: $48 \vdots 12$ и $11 \in N$, то $(48 \cdot 11) \vdots (12 \cdot 11)$, и обратно.

Свойства делимости

7° Если $a ⋮ b$ и $c \in N$, то $ac ⋮ b$.

Пример: $48 ⋮ 3$ и $13 \in N$, то $(48 \cdot 13) ⋮ 3$.

8° Если $a ⋮ b$ и $c ⋮ b$, то для любых $n, k \in N$ следует $(an + ck) ⋮ b$.

Пример: $81 ⋮ 9$ и $54 ⋮ 9$, то $(81 \cdot 17 + 54 \cdot 28) ⋮ 9$.

9° Среди **n** последовательных натуральных чисел **одно и только одно** делится на **n**.

Пример: среди трех последовательных натур. чисел 111, 112, 113 только одно делится на 3. $(111 ⋮ 3)$

Автор: *Хамраева Мехринисо*

Признаки делимости

Для того, чтобы натуральное число делилось

На 2: *необходимо и достаточно, чтобы последняя цифра числа делилась на* ***2****.*

Пример: ***56738*** ⋮ ***2*** *т.к.* ***8*** ⋮ ***2.***

На 5: *необходимо и достаточно, чтобы последняя цифра числа делилась на* ***5*** *(0 или 5).*

Пример: ***56735*** ⋮ ***5*** *т.к.* ***5*** ⋮ ***5.***

На 10: *необходимо и достаточно, чтобы цифра единиц была* ***0****.*

Пример: ***56730*** ⋮ ***10.***

Автор: *Хамраева Мехринисо*

Признаки делимости

Для того, чтобы натуральное число делилось

На 4: *необходимо и достаточно, чтобы делилось на* **4** *число, образованное двумя последними цифрами.*

Пример: **56736** ⋮ **4**, *т.к.* **36** ⋮ **4**.

На 25: *необходимо и достаточно, чтобы делилось на* **25** *число, образованное двумя последними цифрами.*

Пример: **56775** ⋮ **25**, *т.к.* **75** ⋮ **25**.

На 8: *необходимо и достаточно, чтобы делилось на* **8** *число, образованное тремя последними цифрами.*

Пример: **56552** ⋮ **8**, *т.к.* **552** ⋮ **8**.

Признаки делимости

Для того, чтобы натуральное число делилось

На 125: *необходимо и достаточно, чтобы делилось на* ***125*** *число, образованное тремя последними цифрами.*

Пример: **56375** $\vdots$ **125**, *т.к.* **375** $\vdots$ **125**.

На 3: *необходимо и достаточно, чтобы сумма его цифр делилась на* ***3****.*

Пример: **56742** $\vdots$ **3**, *т.к.* **(5+6+7+4+2)** $\vdots$ **3**.

На 9: *необходимо и достаточно, чтобы сумма его цифр делилась на* ***9****.*

Пример: **56545** $\vdots$ **9**, *т.к.* **(5+6+7+4+5)** $\vdots$ **9**.

Автор: *Хамраева Мехринисо*

Признаки делимости

Для того чтобы натуральное число делилось

На 11: *необходимо и достаточно, чтобы сумма его цифр, взятых со знаком «+», стоящих на нечетных местах, и сумма цифр, взятых со знаком «–», стоящих на четных местах, делилась на* ***11***.

Пример: ***8637519*** ⋮ ***11****, т.к.* ***(9-1+5-7+3-6+8)*** ⋮ ***11****.*

На 7 (на 13): *необходимо и достаточно, чтобы сумма чисел, образующих грани, взятых со знаком «+» для нечетных граней и со знаком «–» для четных граней, делилась на* ***7 (на 13)***.

Пример: ***254 390 815*** ⋮ ***7****, т.к.* ***(815-390+254)*** ⋮ ***7****.*

Обозначения

$$\overline{abcdef} = 100000a + 10000b + 1000c + 100d + 10e + f$$

Пример: $\overline{2543} = 2\cdot 1000 + 5\cdot 100 + 4\cdot 10 + 3$

Пример: $\overline{100410} = 1\cdot 100000 + 4\cdot 100 + 1\cdot 10$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (n-3)(n-2)(n-1)n$$

Примеры: $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$

$2! = 1 \cdot 2 = 2$

$1! = 1$

$0! = 1$

Автор: *Хамраева Мехринисо*

Деление с остатком

Теорема 4. *Если натуральное число a больше натурального числа b и a не делится на b, то существует, и только одна, пара натуральных чисел q и r, причем $r < b$, такая что выполняется равенство:*

$$a = bq + r$$

a – *делимое*

b – *делитель*

q – *неполное частное*

r – *остаток*

Пример: **37 : 15 = 2 (*ост.* 7)**

$a = 37$, $b = 15$, *тогда* $37 = 15 \cdot 2 + 7$;

где $q = 2$, $r = 7$.

Замечание. *Если* $a \vdots b$, *то можно считать, что* $r = 0$.

Простые числа

Если натуральное число имеет <u>только два</u> делителя – само себя и 1, то его называют ***простым числом****.*

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, … *– простые числа.*

Теорема 1. *Любое, натуральное число a > 1 имеет хотя бы один простой делитель.*

Теорема 2. *Множество простых чисел бесконечно.*

Теорема 3. *Расстояние между двумя соседними простыми числами может быть больше любого наперед заданного натурального числа.*

Составные числа

Если натуральное число имеет более двух делителей, то его называют ***составным числом****.*

4, 6, 8, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 30, 32, 33, 34, 35, 36, 38, 39, 40, 42, 44, 45, 46, 48, 49, 50, 51, 52, 54, 55, 56, 57, 58, 60, 62, 63, … *– составные числа*

1 *не является ни простым, ни составным числом.*

Основная теорема арифметики. *Любое натуральное число (кроме 1) либо является простым, либо его можно разложить на простые множители.*

Примеры: $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$; $56 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7$.

Автор: *Хамраева Мехринисо*

Наибольший общий делитель (НОД)

Найти НОД чисел: 72 и 96.

Делители числа 72: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72

Делители числа 96: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96

Среди них есть одинаковые: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 24

Их называют общими делителями чисел 72 и 96, а наибольшее из них называют наибольшим общим делителем (НОД) чисел 72 и 96.

НОД (72; 96) = 24

Автор: *Хамраева Мехринисо*

Наибольший общий делитель (НОД)

*Два натуральных числа a и b называют **взаимно простыми** числами, если у них нет общих делителей, отличных от 1, т.е. НОД(a, b) = 1.*

Пример: ***35** и **36** взаимно простые числа, т.к. **НОД (35; 36) = 1.***

Автор: *Хамраева Мехринисо*

Наименьшее общее кратное (НОК)

Найти НОК чисел: 12 и 18.

Кратные числа 12: *12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, …*

Кратные числа 18: *18, 36, 54, 72, 90, 108, 126, 144, …*

Среди них есть одинаковые: *36, 72, 108, 144, …*

Их называют общими кратными чисел 12 и 18, а наименьшее из них называют наименьшим общим кратным (НОК) чисел 12 и 18.

НОК (12; 18) = 36

Автор: *Хамраева Мехринисо*

Разложение на простые множители

3780	2
1890	2
945	3
315	3
105	3
35	5
7	7
1	

7056	2
3528	2
1764	2
882	2
441	3
147	3
49	7
7	7
1	

НОД (3780; 7056)=
$= 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 = 252$

НОК (3780; 7056)=
$= 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2 =$
$= 105840$

$3780 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$

$7056 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7^2$

Автор: *Хамраева Мехринисо*

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Рациональные числа – это числа вида $\frac{m}{n}$, где m – целое число, а n – натуральное.

$\mathbf{Q}$ - множество рациональных чисел.

Любое рациональное число можно записать в виде конечной десятичной дроби или в виде бесконечной десятичной периодической дроби.

Примеры: $\frac{5}{28} = 0{,}17(857142)$; $\frac{2}{7} = 0{,}(285714)$;

$6 = 6{,}000\ldots = 6{,}(0)$; $7{,}432 = 7{,}432000\ldots = 7{,}432(0)$.

Автор: *Хамраева Мехринисо*

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Верно и обратное утверждение:
Любую бесконечную десятичную периодическую дробь можно представить в виде обыкновенной дроби.

Примеры: $0{,}3333\ldots = 0{,}(3) = \frac{1}{3}$;

$0{,}3181818\ldots = 0{,}3(18) = \frac{7}{22}$.

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Записать в виде обыкновенной дроби бесконечную десятичную периодическую дробь :

Пример (1 способ):

Пусть $\boldsymbol{x = 1{,}(23) = 1{,}23232323\ldots}$

Умножим $\boldsymbol{x}$ *на 100, чтобы запятая переместилась вправо на один период:*

$$
\begin{array}{r}
- \; 100x = 123{,}232323\ldots \\
x = \quad 1{,}232323\ldots \\
\hline
\end{array}
$$

$$100x - x = 122{,}000000\ldots$$

Т.е. $\boldsymbol{99x = 122}$, *откуда* $x = \dfrac{122}{99}$

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Записать в виде обыкновенной дроби бесконечную десятичную периодическую дробь :

Пример (2 способ):

Пусть ***1,(23) = 1,232323… = 1 + 0,23 + 0,0023 + 0,000023 + …***
Рассмотрим эту сумму ***1*** *и суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии:* $S = 1 + S_1$, *где* $S_1 = b_1 / (1 - q)$ *– формула суммы бесконечно убывающей прогрессии со знаменателем* $q = 0,01$, *и первым членом* $b_1 = 0,23$:

$$S_1 = \frac{0,23}{1 - 0,01} = \frac{23}{99}$$

$$S = 1 + \frac{23}{99} = \frac{122}{99}$$

Автор: *Хамраева Мехринисо*

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Иррациональным числом называют бесконечную десятичную непериодическую дробь.

Термины «рациональное число», «иррациональное число» происходят от латинского слова ratio – разум (буквальный перевод: «рациональное число – разумное число», «иррациональное число – неразумное число»).

Примеры:

0,1234567891011121314…

$\pi \approx 3{,}1415926535897932\ldots$

$e \approx 2{,}7182818284590452\ldots$

$\sqrt{11} \approx 3{,}31662479035539\ldots$

Автор: *Хамраева Мехринисо*

Thank You !

Add your company slogan