

# Презентация по теме: «Действительные числа».

Выполнила: учитель математики  
ГОУ СОШ № 457 Ж.Ю. Магаз

—  
Санкт-Петербург  
2010



# Числовые множества.

Обозначение	Название множества
$\mathbb{N}$	Множество натуральных чисел
$\mathbb{Z}$	Множество целых чисел
$\mathbb{Q}$	Множество рациональных чисел
$\mathbb{Q}$	Множество иррациональных чисел
$\mathbb{R}$	Множество вещественных чисел



# Множество натуральных чисел.

- Натуральные числа - это числа счета.  $N = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$ .
- Заметим, что множество натуральных чисел замкнуто относительно сложения и умножения, т.е. сложение и умножение выполняются всегда, а вычитание и деление в общем случае не выполняются

$$\forall n, m \in N \Rightarrow \begin{cases} n + m \\ n \cdot m \end{cases} \in N$$



# Множество целых чисел.

- Введем в рассмотрение новые числа:
  - число 0 (ноль),
  - число  $(-n)$ , противоположное натуральному  $n$ .

При этом полагаем:  $n + (-n) = (-n) + n = 0$ ,  
 $-(-n) = n$ .

Тогда множество целых чисел можно записать так:  
 $Z = \{\dots, -n, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$ .

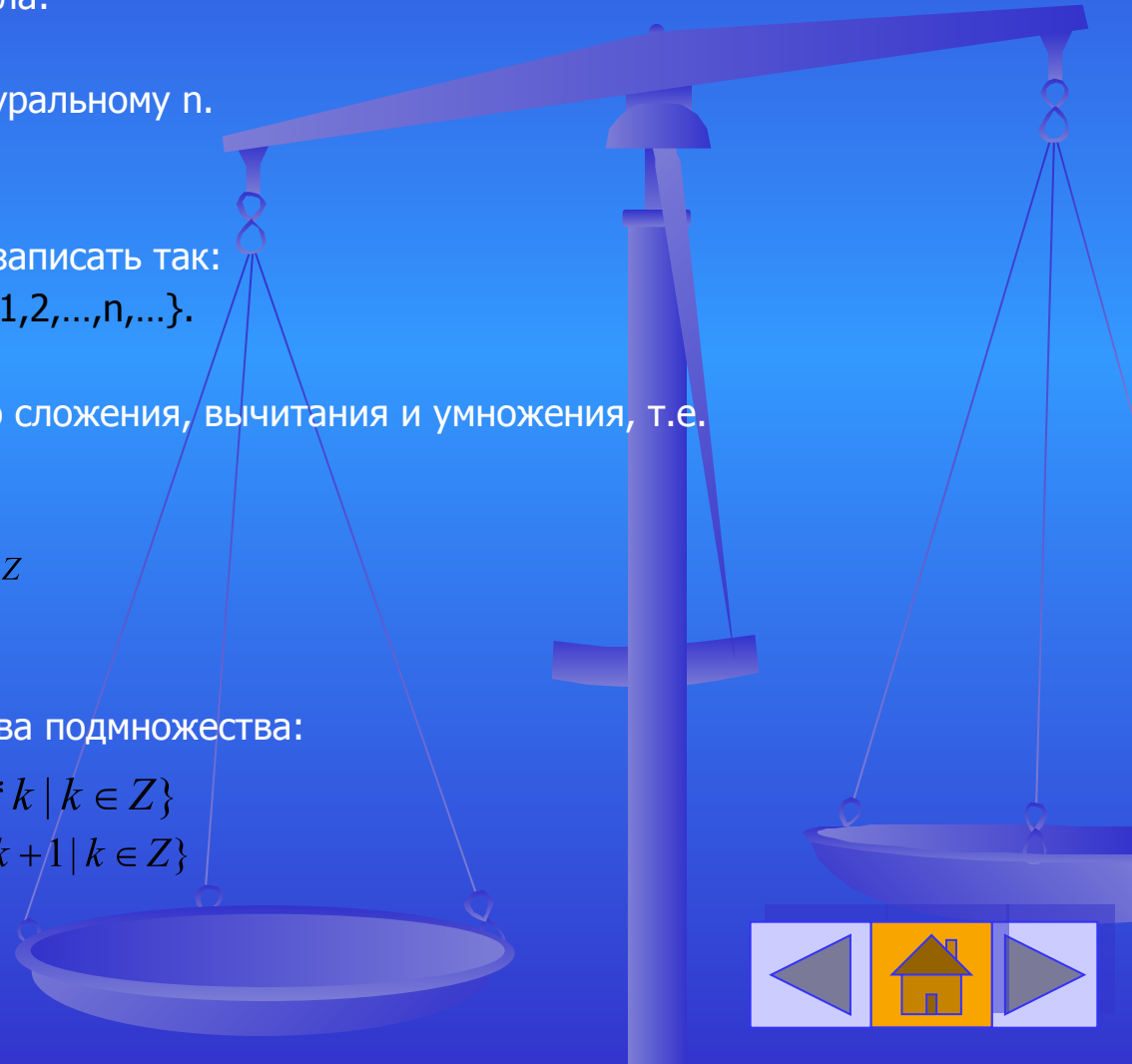
Заметим также, что:  $N \subset Z$

Это множество замкнуто относительно сложения, вычитания и умножения, т.е.

$$\forall n, m \in Z \Rightarrow \begin{cases} n + m \\ n * m \in Z \\ n - m \end{cases}$$

Из множества целых чисел выделим два подмножества:

- множество четных чисел  $\{2 * k \mid k \in Z\}$
- множество нечетных чисел  $\{2 * k + 1 \mid k \in Z\}$



# Деление с остатком.

В общем случае действие деления в множестве целых чисел не выполняется, но известно, что деление с остатком можно выполнить всегда, кроме деления на 0.

## Определение деления с остатком.

Говорят, что целое число  $m$  делится на целое число  $n$  с остатком, если найдутся два числа  $q$  и  $r$ , такие что: (\*)

$$m = nq + r, \text{ где } 0 \leq r < |n|$$

( $q$  – частное,  $r$  – остаток)

Хорошо известен алгоритм деления с остатком.

Замечание: если  $r=0$ , то будем говорить, что  $m$  делится нацело на  $n$ .



# ПРИМЕРЫ:

- Разделить с остатком  $m$  на  $n$ .

1).  $m=190, n=3$

$$\begin{array}{r} 190 \ 3 \\ 18 \ \overline{) 6} \\ \underline{\phantom{0} 3} \\ 10 \\ 9 \\ \underline{\phantom{0} 1} \\ 1 \end{array}$$

$q=63, r=1, 1 < 3$

Проверка:

$$190 = 3 \cdot 63 + 1$$

2).  $m=13, n=5$

Подберем  $q$  и формуле (\*):

$$13 = 5q + r$$

$$\Rightarrow q=2, r=3 \ (3 < 5)$$

$$13 = 5 \cdot 2 + 3$$

3).  $m=-15, n=4$

По формуле (\*):

$$-15 = 4q + r$$

$$\Rightarrow q = -4,$$

$$r = 1$$

$$-15 = 4 \cdot (-4) + 1$$

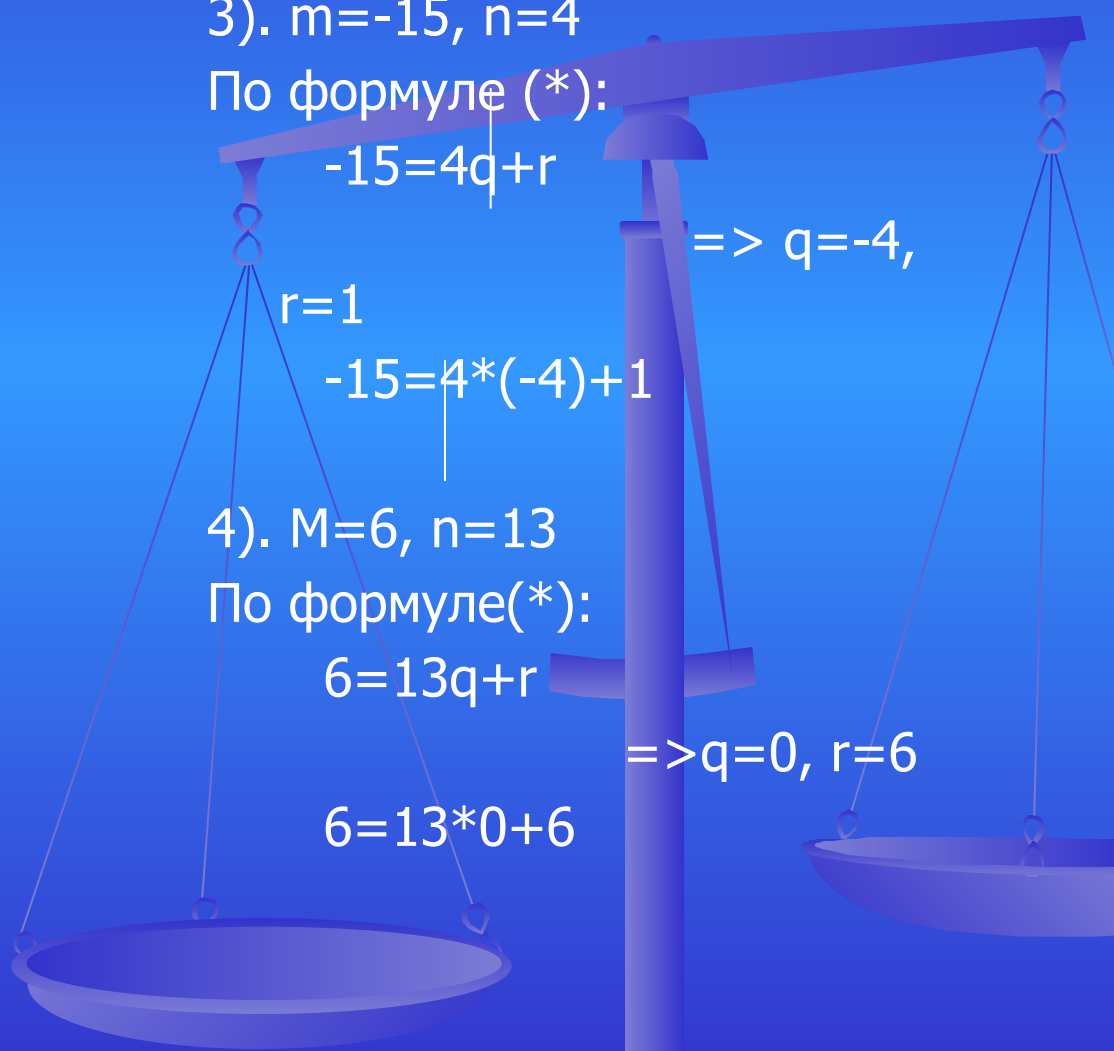
4).  $M=6, n=13$

По формуле(\*):

$$6 = 13q + r$$

$$\Rightarrow q = 0, r = 6$$

$$6 = 13 \cdot 0 + 6$$



# Множество рациональных чисел.

- Множество рациональных чисел можно представить в виде:

$$Q = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in Z, n \in Z \right\}$$

В частности,  $\frac{m}{1} = m \in Z$  Таким образом,  $Z \subset Q$

Множество рациональных чисел замкнуто относительно сложения, вычитания, умножения и деления (кроме случая деления на 0).

$$\forall p, q \in Q \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} p + q, \\ p * q, \\ p - q, \\ \frac{p}{q}, q \neq 0 \end{array} \right\} \in Q$$



- Но в множестве рациональных чисел нельзя, например, измерить гипотенузу прямоугольного треугольника с катетами  $a = 1, b = 1$ .

По теореме Пифагора гипотенуза будет равна  $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$ . Но число  $\sqrt{2}$  не будет рациональным, так как  $\sqrt{2} \neq \frac{m}{n}$  ни для каких  $m$  и  $n$ .

- Нельзя решить уравнение  $x^2 - 2 = 0$ .
- Нельзя измерить длину окружности и т.д.

Заметим, что всякое рациональное число можно представить в виде конечной или бесконечной периодической десятичной дроби.

$$\frac{1}{8} = \frac{5^3}{2^3 * 5^3} = 0.125; \frac{2}{7} = 0.(285714); \frac{1}{3} = 0.(3)$$





# Множество иррациональных чисел.

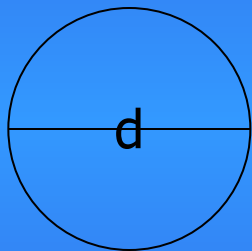
Числа, которые представляются бесконечной непериодической дробью, будем называть иррациональными. Множество иррациональных чисел обозначим  $\bar{Q}$

Для иррациональных чисел нет единой формы обозначения. Отметим два иррациональных числа, которые обозначаются буквами – это числа  $\pi$  и  $e$ .



# Число «пи» $\pi$

- Отношение длины окружности к диаметру есть величина постоянная, равная числу  $\pi$



$$\pi = \frac{l}{d} \Rightarrow l = 2\pi r$$

$l$  — длина



# Число $e$ .

- Если рассмотреть числовую последовательность:

$2, (\frac{2}{3})^2, (\frac{4}{3})^3, (\frac{5}{4})^4, \dots, (1 + \frac{1}{n})^n, \dots$  с общим членом последовательности  $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ , то с

ростом  $n$  значения  $x_n$  будут возрастать, но никогда не будет больше 3. Это означает, что последовательность ограничена. Такая последовательность имеет предел, который равен числу  $e$ .

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = 2,71828\dots$$



Известно, что мощность иррациональных чисел больше мощности рациональных, т.е. Иррациональных чисел «больше», чем рациональных. Кроме того, как бы ни были близки два рациональных числа, между ними всегда есть иррациональное, т.е.

$$\forall p, q \in \mathbb{Q}, \exists r \in \mathbb{Q} : p < r < q$$

Примеры иррациональных чисел:

$$\sqrt{2} \quad \sqrt[3]{7} \quad \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

(золотое сечение) и т.д.

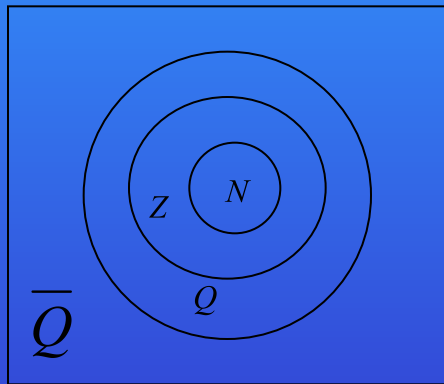


# Множество вещественных (действительных) чисел.

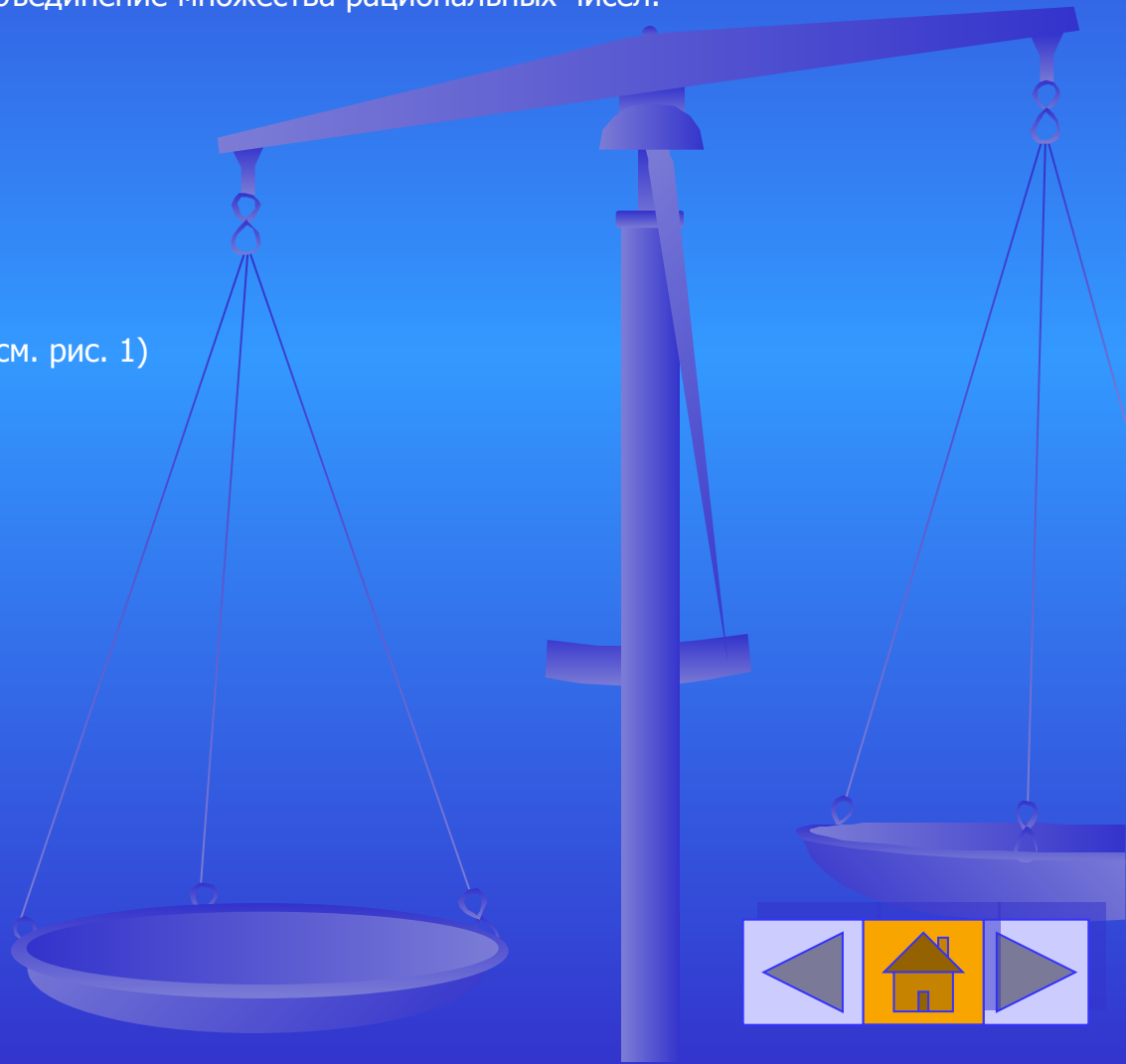
- Множество вещественных чисел – это объединение множества рациональных чисел.

$$R = Q \cup \overline{Q}$$

- Вывод:  $N \subset Z \subset Q \subset R$  (см. рис. 1)



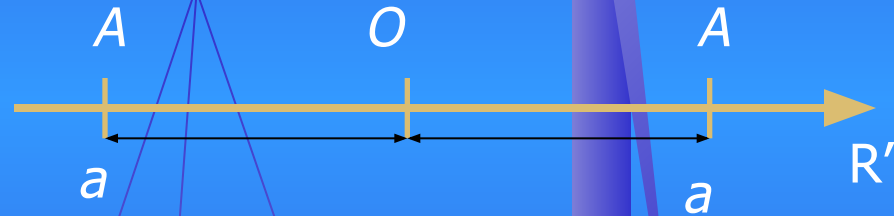
$R$



# Определение модуля вещественного числа

- 1) Пусть на числовой оси точка  $A$  имеет координату  $a$ . Расстояние от точки начала отсчета  $O$  до точки  $A$  называется модулем вещественного числа  $a$  и обозначается  $|a|$ .

$$|a| = |OA|$$



- 2) Раскрытие модуля происходит по правилу:

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$



- Например:

$$|2,5| = 2,5 \qquad \left| -3\frac{1}{3} \right| = -\left(-3\frac{1}{3}\right) = 3\frac{1}{3}$$

- **Замечание.**

Определение модуля можно расширить:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \\ -f(x), & f(x) \leq 0 \end{cases} \quad \text{где } f(x) \text{ — функция аргумента } x$$

- Пример. Раскрыть знак модуля.

$$|3x - 1| = \begin{cases} 3x - 1, & 3x - 1 \geq 0 \\ -(3x - 1), & 3x - 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow |3x - 1| = \begin{cases} 3x - 1, & x \geq \frac{1}{3} \\ -(3x - 1), & x \leq \frac{1}{3} \end{cases}$$



# Основные свойства модуля

- 1)  $|a| \geq 0$ , при этом  $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ,
- 2)  $|a| = |-a|$
- 3)  $|a + b| \leq |a| + |b|$
- 4)  $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
- 5)  $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$
- 6)  $|a^n| = |a|^n$





# Решение примеров с использованием СВОЙСТВ МОДУЛЯ

- Пример 1.  
Вычислить  $|2x - 3|$ , если  $x = 1$ ;  $x = 5$ ;  $x = 1,5$
- Пример 2. Раскрыть знак модуля  $|4 - 7x|$ , если  $x \leq \frac{4}{7}$
- Пример 3.  
Вычислить 1)  $|2x + 1| - |3 - 2x|$ , если  $x \in (1\frac{1}{2}, +\infty)$
- 2)  $\sqrt{(5 - 3x)^2} - \sqrt{(x + 5)^2}$ , если  $x \in [0, 1]$
- 3)  $\sqrt{x^2 - 6x + 9} + \sqrt{4x^2 + 12x + 9}$ , если  $x \in [-\pi, -2]$

